

出版前言

本书是俄罗斯唯一的一本外弹道学教科书,由莫斯科包曼大学飞行力学教研室主任 Л. Н. 雷申科教授等三人编写。

本书详尽而系统地讲述了外弹道学的基本理论和应用,不仅有一般外弹道学的内容,例如弹道方程的建立和求解、角运动和稳定性、扰动运动和散布分析、弹道优化设计和修正理论、弹道试验和射表编制等,而且包含了俄罗斯在外弹道领域的最新成果,例如灵巧弹药和子母弹的外弹道理论。同时本书在理论体系上采用了严格的弹丸非线性运动方程和李雅普诺夫稳定性分析方法,将有控飞行器的最优控制理论和统计飞行力学方法与经典的外弹道理论相融合,适应了常规弹药制导化的需要。因此本书代表了当今俄罗斯外弹道学领域的水平。

Л. Н. 雷申科教授曾应邀到我校讲学,为了加强我们两国和两校的学术交流,向读者介绍俄罗斯学者在外弹道领域的贡献以及所采用的方法和得到的结果,并从中得到启发和借鉴,促进我国外弹道学和兵器技术的发展,在征得三位作者以及莫斯科机械制造出版社的同意后,在我国国防工业出版社的大力支持下,决定翻译出版此书,以供从事兵工专业的师生、设计和试验人员参考。

本书第四~十二章由韩子鹏翻译,第一~三章由薛晓中翻译,第十三~十四章由张莺翻译,全书由韩子鹏统稿。徐明友、郭锡福教授分别审阅了部分章节,在翻译过程中还得到教研室全体同志和南京理工大学外事办公室同志的支持和帮助,特向他们表示衷心的感谢。

同时,我们也向三位作者及莫斯科机械制造出版社的友好合作表示衷心的感谢。

由于译者水平有限,译文中错误缺点在所难免,欢迎广大读者批评指正。

译者

中文版序

为中国读者所关注的这本书是俄罗斯唯一的一部外弹道学教科书,本书有三个版本(第一版-1972年,第二版-1979年,现在的第三版-1991年)。由于这类书很少,故需对它的详情作些说明。骤然看来,“外弹道学”是专业面相当窄的学科,内容也相当稳定。但事实上并非完全如此,无论是培养从事民用的或是培养从事军用的火箭火炮系统研究、设计、制造和维修的专家,这都是一门基础课。

此外,近十几年来,这门科学及由它服务的技术部门都发生了很大的变化,故需对“外弹道学”课程及用于在专门高等学校讲课的教材作相应的修订。

这些变化在很大程度上是由以下原因产生的:

——由于计算技术领域里众所周知的成就,使过去在弹道设计和试验研究阶段,以及在战斗射击的弹道学保障阶段不可能实现的新的算法现在已能实现。

——由于科学的进一步发展,首先是基础数学和应用数学的发展,极大地提高了火箭炮弹稳定性和控制性研究方法的成效,发展了求解弹道问题的统计方法和对策论方法。

——由于出现了大量的新原理弹药,例如弹道修正弹,非传统的目标杀伤兵器,按非经典空气动力原理设计的战斗部元件等等。

这些变化在本教科书中都有一定的反映。

俄罗斯弹道学学者 A. A. 德米特里耶夫斯基是在苏联出版本书的倡导者,早在本世纪40~50年代他就曾在迫击炮弹和火箭增程弹的外弹道发展中作出了卓越的贡献。许多专家参加了前两个版本的写作和出版前的准备,这些专家是在 A. A. 德米特里耶夫斯基领导下的工作集体,然而 A. A. 德米特里耶夫斯基所作的贡献是与他们的集体劳动成果分不开的。本版教科书是本书封面所列名字的专家参加工作编写的,这一版无论从其内容讲还是从其学科描述方法讲

都是最成功的,它是对我们的导师——А. А. 德米特里耶夫斯基教授的纪念,在本教科书第三版刚出版时他已去世了。

正如任何一本教科书那样,本书也不纯粹是作者独创的科学著作,它吸收了我们的先辈——世界著名的俄罗斯弹道学流派的代表人物的优秀成果,他们以这些成果证实了自己在火箭火炮武器的军事应用和历史发展中的优先地位。本书在对学生教课的过程中还为由我所领导的莫斯科国立包曼技术大学弹道教研室和空气动力教研室的教师们所完善,包曼大学是苏联最老和最大的培养国防工业部门干部的大学。在本书所作的修订中还大量引用了我国军事、科研和国防工业中同行和朋友的意见和建议。所有的这些使我有理由认为,本书对中国高等学校的学生、研究生以及在武器制造部门的专家来说将不是无益的。

最后,我向中国的弹道学者韩子鹏教授表示感谢,感谢他倡议在中国出版本书并在将本书翻译成中文的过程中做了大量的工作。

俄罗斯科学院院士 教授 Л. Н. 雷申科

第三版序

本书第二版出版(1979年)以来,外弹道学又增添了许多新的研究成果和更切实际的分析理论。没有这些新的理论研究成果,外弹道学在相应专题上的技术研究就不完备了。

这些研究理论有研究各类飞行器运动的微分方程组的定性方法,外弹道中关于弹丸的修正弹道,以及非传统方法摧毁目标的新理论。计算弹道的研究得到了进一步的发展(在计算机应用的基础上),弹道实验的技术装备精度和方法得到了大大改观,另外还有定位测量技术、射击瞄准所需要的气象数据的获取方法等都大大完善了。

现在,射击威力的提高、射程的增加和无控弹丸射击精度的提高,在很大程度上成为了现实。所以,本书新版着重注重于身管武器发射弹丸和无控火箭的动力学问题。

全书除包括基本章节外,书中部分章节还介绍了许多用于选修科的资料。

在参考文献中列出了引用作者文章的清单,为更深入的学科研究指明了方向。本书的序言和绪论,第1、2、3、5、6章内容由 A. A. 德米特里耶夫斯基(Дмитриевский)写成,第7、11、13、14章由 Л. Н. 雷申科(Лысенко)撰写,第4、8、12章由 С. С. 波哥吉斯托夫(Богодистов)撰写,第9、10章由 A. A. 德米特里耶夫斯基和 Л. Н. 雷申科一起完成。

在第三版手稿付印的准备过程中,采纳了工程科学院院士 H. M. 蒙钦科教授的许多评论意见,作者在此向他致以衷心的感谢。

作者同样衷心地感谢那些参加本书前几版工作的全体同志们,他们对该书第三版的出版同样给予了很大的帮助。

本书以黑体拉丁字母表示矢量,以黑体大写字母表示矩阵或对矩阵的偏导数。

标量函数或矢量函数表示成 $X(t); f(x); f(x, t)$ 。即,数变量和

矢变量形式的自变量放在括号中。

基本符号符合国家图书20058—80《飞行器空间运动动力学》和4401—81《标准大气、参数》的有关规定。

基本符号

- A 方位角
 a 声速
 a_a 弹体质心的绝对运动加速度
 a_e 弹体质心的相对运动加速度
 a_r 弹体—燃料—气体系统质心相对火箭壳体运动的加速度
 c 弹道系数
 c_R 空气动力合力的气动系数
 c_x, c_y, c_z 空气动力系数
 F 外力合力
 F_{kop} 科氏力
 F_P 反作用力合力
 $F(V), G(V), K\left[\frac{V}{a}\right]$ 空气阻力函数
 g 自由落体加速度
 g_r 重力加速度
 Γ 表面摩擦力矩
 H 位势高度
 $H(y)$ 依赖于高度的空气密度函数
 $I_{x_i}, I_{y_i}, I_{z_i}$ 火箭相对各坐标轴的转动惯量
 $I_{x_i y_i}, I_{x_i z_i}, I_{y_i z_i}$ 惯性积
 K 物体动量矩矢量
 L 沿地球表面的线射程
 M 马赫数
 M_λ 阻尼力矩
 M_{CT} 静力矩

M_F 外力相对惯性中心的合力矩
 m 运动体(火箭、弹丸)的质量
 m_x, m_y, m_z 空气动力矩系数
 Π 重力势, 比重
 Π_T 地球引力势
 Π_n 离心惯性力势
 P 推力
 p 气压
 Q 物体的动量矢
 Q_i 广义力
 q 速度头
 S 特征面积
 $T = t_c = t_n$ 全飞行时间
 T_n 变质量物体的动能
 V_a 物体质心绝对运动速度
 V_r 物体质心相对运动速度
 V_r 弹体—燃料—气体系统质心相对火箭壳体的速度
 $V_{x_c} = u$ 质心速度在射出点坐标系 OX_c 轴上的投影
 $V_{y_c} = w$ 质心速度在射出点坐标系 OY_c 轴上的投影
 X_a 迎面阻力
 X_p, Y_p, Z_p 控制力在固连坐标系上的分量
 x_c 水平距离
 V_a 气动升力
 y 地理高度
 y_s 弹道高
 Z_a 气动侧向力
 α 攻角
 β 侧滑角
 γ 侧倾角

ϵ	当地角
θ	弹道倾角
ϑ	俯仰角
λ_*	经度
λ	结点的线经度
$\pi(y)$	气压函数
ρ	空气密度
τ	虚温
φ_r	地球纬度
φ_{r_0}	相对地心的纬度
Ψ	弹道偏角
ψ	偏航角
Ω	地球角速度
ω	火箭弹体角速度矢
下标	κ 终点量
	u 目标

上标	0 单位矢(OPT), 理想值
	T 矢量或矩阵的转置记号
	$*$ 名义值 局部导数

鉴于外弹道学公式繁多,使用符号很多,故本书全部沿用原书中的符号;书中采用的其它符号在文中解释。

出版前言
中文版序
第三版序
基本符号

目 录

绪论

B. 1	外弹道学的研究目的和任务	1
B. 2	外弹道学的发展历史	3

第一部分 火箭和炮弹的飞行条件 及运动数学模型

第一章 作用在飞行器上的力和力矩

§ 1.1	确定飞行器空间位置的坐标系和角度	9
1.1.1	坐标系的一般特征	9
1.1.2	坐标系相互方位的确定	12
1.1.3	利用方向余弦矩阵进行坐标变换	15
§ 1.2	地球引力场及地球旋转对火箭和炮弹飞行 的影响	20
1.2.1	地球引力的力势, 地球的形状和大小	20
1.2.2	重力和重力势	26
1.2.3	地球旋转对火箭和弹丸飞行的影响	29
§ 1.3	大气及其特性	35
1.3.1	大气的构成	35
1.3.2	标准大气	37

§ 1.4 空气动力及其力矩	42
1.4.1 空气阻力矢量和由它产生的力矩	42
1.4.2 总空气动力和总空气动力矩的各分量	43
1.4.3 空气动力和力矩转化为标准阻力函数	48
§ 1.5 火箭发动机的推力	55
§ 1.6 附加力和力矩以及控制力和控制力矩	58
1.6.1 附加力和力矩	58
1.6.2 控制力和力矩	59

第二章 飞行器运动数学模型建立的理论基础

§ 2.1 数学模型的分类和表示形式	61
2.1.1 作为动力系统的飞行器	62
2.1.2 数学模型的可能形式	63
§ 2.2 建立飞行器运动方程的原理	66
2.2.1 密歇尔斯基(Менделеевский)方程	66
2.2.2 变质量物体和常质量物体运动的动力学基本定理、 固化原理	68
2.2.3 将火箭作为变质量物体时的直线运动 矢量方程	72
2.2.4 飞行器旋转运动方程	75
2.2.5 矢量方程在弹道法线和切线上的投影	78
2.2.6 火箭和炮弹运动方程的线性化	81

第三章 火箭和炮弹运动微分方程组的建立

§ 3.1 火箭在主动段上的空间运动方程	86
3.1.1 火箭空间运动的基本方程组	86
3.1.2 在稠密大气层中火箭相对基准地球坐标系的 空间运动方程组的简化	90
3.1.3 考虑地球旋转时火箭质心运动方程组	95
§ 3.2 在弹道主动段上飞行器纵向和侧向运动方程组	

的简化	101
3.2.1 将运动分解成在纵向平面和侧向平面中的运动	101
3.2.2 在地球中心引力场中有控火箭弹的纵向运动方程	103
3.2.3 在地球平面平行引力场里火箭的纵向运动方程	105
3.2.4 侧向和纵向稳定运动的标准线性方程	107
3.2.5 无量纲化自变量的运动方程组	112
3.2.6 以过载形式表示的运动方程	113
§ 3.3 有控和无控火箭在弹道被动段上运动的数学模型	117
3.3.1 常质量火箭在稠密大气层中的自由运动方程组	117
3.3.2 在大气中飞行器质心纵向运动方程的简化	119
3.3.3 不考虑外部介质阻力时飞行器质心自由运动方程组	122
§ 3.4 炮弹的自由飞行	125
3.4.1 矢量形式下的炮弹运动方程	125
3.4.2 B. C. 普加乔夫形式下的炮弹运动方程	129
3.4.3 章动角较小时炮弹的空间运动方程	135
检查题	137

第二部分 飞行器运动数学模型的研究和外弹道问题的解法

第四章 火箭和炮弹的运动稳定性

§ 4.1 运动稳定性的一般概念及火箭和炮弹的运动稳定性	139
------------------------------------	-----

4.1.1	火箭和炮弹的弹道稳定性	139
4.1.2	稳定无控火箭和炮弹的方法	141
§ 4.2	李雅普诺夫运动稳定性	146
4.2.1	李雅普诺夫运动稳定性的定义	146
4.2.2	李雅普诺夫第一方法和一级近似稳定性	148
4.2.3	李雅普诺夫第二方法	151
§ 4.3	高速旋转弹的运动稳定性	156
4.3.1	在弹道起始段上弹丸相对质心运动方程 的首次积分	156
4.3.2	弹丸角运动稳定性的必要条件	158
4.3.3	炮弹运动的李雅普诺夫稳定性一般问题	160

第五章 外弹道方程的数值积分和电子计算机的应用

§ 5.1	步进积分法及其实际应用	166
5.1.1	差分法数值积分	166
5.1.2	计算精度和积分步长的选取	174
5.1.3	利用电子计算机求解外弹道基本问题	176
5.1.4	飞行器运动方程计算机积分程序的编制	177
§ 5.2	飞行器运动过程的模拟仿真	181
5.2.1	利用模拟计算机求解外弹道问题	181
5.2.2	利用电子模拟机研究常质量尾翼弹纵轴的摆动	182

第六章 外弹道问题的近似解法和表解法

§ 6.1	不考虑空气阻力的解析方法	187
6.1.1	抛物线理论	187
6.1.2	椭圆理论	190
6.1.3	计算火箭最大飞行速度的齐奥尔科夫斯基公式	197
§ 6.2	常质量弹丸弹道的近似计算方法	199

6.2.1	采用解析函数表示空气阻力的解法	199
6.2.2	假速度法 主要函数和辅助函数	202
6.2.3	弹道相似和表解法	207
第七章	外弹道最优问题的求解	210
§ 7.1	外弹道边值问题	211
7.1.1	外弹道两点边值问题	211
7.1.2	在有控飞行边值问题中确定多点曲线问题的 提法	213
§ 7.2	外弹道学逆问题	215
7.2.1	飞行动力学逆问题的概念	215
7.2.2	基于逆问题概念的有控飞行动力学边值问题的 求解	216
7.2.3	在求解身管武器外弹道逆问题时射程参数控制的 近似确定	217
§ 7.3	最简单的基准运动规划极值问题	220
7.3.1	弹道式轨道最优射角的确定	220
7.3.2	有控尾翼弹水平滑翔的最大射程	222
§ 7.4	火箭动力学和外弹道学中的变分问题	225
7.4.1	变分计算和最优控制问题的提法和分类	225
7.4.2	基于经典变分法的基准运动最优规划	228
7.4.3	根据极大值原理确定飞行器的最优控制运动 ...	234
7.4.4	用动态规划法计算滑翔飞行器最大飞行 斜距弹道	240
第八章	火箭和弹丸的角运动	
§ 8.1	旋转稳定弹相对质心的运动	246
8.1.1	在仅有翻转力矩作用时弹丸的角运动	246
8.1.2	弹丸角运动稳定性的充分条件	257
8.1.3	作用力的构成对旋转稳定弹运动稳定性的	

影响	262
§ 8.2 尾翼弹和迫击炮弹相对质心的运动	268
8.2.1 尾翼式旋转弹的角运动	268
8.2.2 尾翼式非旋转弹的运动	271
§ 8.3 尾翼式旋转弹的共振	273
8.3.1 外形、质量轻微不对称及推力偏心对尾翼式 旋转弹丸角运动的影响	273
8.3.2 稳定共振旋转的研究	276
8.3.3 共振旋转状态的稳定性	279
§ 8.4 沿弹道降弧段的自由飞行	284
8.4.1 飞行器再入大气层的运动	284
8.4.2 飞行器再入大气层时角运动的定性分析	288
检查题	292

第三部分 飞行器的扰动运动和散布特征的确定

第九章 外弹道修正公式和扰动弹道计算

§ 9.1 修正理论的基本原理	293
9.1.1 修正的概念	293
9.1.2 修正理论基本公式	294
9.1.3 一定参数的定性影响及弹道导数的符号	296
9.1.4 初始质量改变时火炮弹丸射程的变化	299
§ 9.2 弹道诸元改变量和弹道导数的计算方法	300
9.2.1 利用积分运动方程的方法确定弹道诸元改变量 和修正系数	300
9.2.2 利用积分偏差微分方程的方法确定 修正系数	304
9.2.3 共轭偏差方程组及其解	309
9.2.4 由弹道相似条件确定修正系数	311

9.2.5	获得弹道导数的解析方法	312
9.2.6	计算修正系数值的表解法	314
9.2.7	确定运动参数全(等泛函)偏差的概念和方法 ...	314
§ 9.3	大气参数对火箭和炮弹飞行影响的计算	316
9.3.1	气象因素偏差对飞行器运动影响的考虑方法 ...	316
9.3.2	对气压和气温变化的考虑	317
9.3.3	考虑气压和气温变化时常质量弹丸的 运动方程	317
9.3.4	风对无控火箭和炮弹飞行影响的计算	318
9.3.5	弹道平均风和弹道平均温度偏差	324
9.3.6	对常值纵风和横风的修正公式	327
9.3.7	射击时的气象准备	330
§ 9.4	无控火箭的空间扰动运动方程	332
9.4.1	推力偏心影响的计算	332
9.4.2	无控火箭空间扰动运动的数学模型	334

第十章 火箭和弹丸扰动运动的起始条件

§ 10.1	运载器运动对起始发射条件的影响	339
10.1.1	总初速的确定	339
10.1.2	运载器振动对火箭发射初始条件形成的 影响	340
§ 10.2	发射时火箭的运动	346
10.2.1	火箭起飞运动的特点	346
10.2.2	火箭沿发射装置定向器的运动	346
§ 10.3	弹丸扰动运动起始条件的形成	350
10.3.1	起始进动运动	350
10.3.2	由弹丸不平衡性产生的起始章动角和 章动角速度	351
10.3.3	弹丸质心的径向偏心对初速矢量偏差的 影响	353

10.3.4	后效期内炮口波对弹丸运动的影响·····	354
--------	----------------------	-----

第十一章 统计飞行力学方法及火箭和弹丸的射击散布

§ 11.1	火箭和炮弹运动的先验统计分析法·····	356
11.1.1	飞行器运动统计分析中所用的数字特征·····	356
11.1.2	影响矩阵方法·····	359
11.1.3	应用马尔可夫过程理论确定飞行器弹道 散布特征·····	364
11.1.4	用统计试验法确定散布特征·····	372
§ 11.2	射击结果的统计处理·····	378
11.2.1	根据射击试验结果确定散布特征·····	378
11.2.2	试射数据和野战火炮射击数据的处理·····	384

第十二章 弹道修正弹和子母弹的弹道特性

§ 12.1	弹道修正弹的空间运动·····	388
12.1.1	修正弹弹道问题求解的特点·····	388
12.1.2	脉冲修正弹的空间运动·····	389
12.1.3	在冲击力矩作用下弹丸的角运动·····	391
12.1.4	旋转稳定脉冲修正弹的角运动稳定性·····	393
§ 12.2	复杂外形战斗部和子母弹的弹道特性·····	398
12.2.1	具有可变弹道系数的运动·····	398
12.2.2	高速非对称战斗部弹道的确定·····	404
12.2.3	非对称子弹的运动·····	408
	检查题·····	411

第四部分 实验外弹道基础, 射击试验 和射表编制

第十三章 实验外弹道的基本任务和方法

§ 13.1 弹道靶道上的试验·····	413
13.1.1 弹道靶道的一般特点·····	413
13.1.2 弹丸速度的靶道测定·····	415
13.1.3 由靶道射击确定迎面阻力系数·····	422
13.1.4 法向力和翻转力矩系数的确定·····	423
§ 13.2 靶场试验·····	427
13.2.1 根据靶场试验数据确定速度和 迎面阻力系数·····	427
13.2.2 根据靶场射击的外弹道测量数据确定 弹丸运动速度·····	428
13.2.3 确定物体角运动的磁测法·····	431
13.2.4 飞行器模型运动识别基础·····	432
§ 13.3 靶场弹道射·····	434
13.3.1 确定定起角的射击·····	434
13.3.2 距离射和密集度射·····	435
13.3.3 偏流的测定·····	437
13.3.4 弹药结构诸元变化时距离和初速的 对比射击·····	438
§ 13.4 火箭和导弹飞行试验的基本理论·····	438
13.4.1 飞行弹道试验设计基础·····	438
13.4.2 测量结果处理方法的简要评述·····	444
13.4.3 在飞行试验结果处理中作为动力系统的 飞行器参数识别·····	446

第十四章 射表编制的弹道学原理

§ 14.1 火炮弹丸射表编制方法的基础·····	463
14.1.1 射表射击准备·····	463
14.1.2 将射击结果换算到标准表定条件·····	465
14.1.3 弹道基本诸元、修正诸元和弹道系数与 试验射角关系式的计算·····	466

14.1.4	火炮射表编制的步骤.....	467
§ 14.2	火箭射表编制的特点.....	470
14.2.1	火箭发射的表定条件和实际条件.....	470
14.2.2	射表射击结果标准化和无控火箭 射表编制.....	470
	检查题.....	472
	参考文献.....	473

绪 论

B. 1 外弹道学的研究目的和任务

研究弹丸和火箭运动的科学称弹道学,内弹道学是研究弹丸在火炮身管内运动的科学。与内弹道学不同,中间弹道学是研究弹丸出膛后在火药气体后效期内的运动。外弹道学是研究弹丸和火箭与发射装置脱离作用力后运动的一门科学。

“弹道学”这个词是拉丁词“бросаю”(βαλλω)的谐音;按这个谐音的意义将第一个笨重的抛射装置称为“баллист”,该装置称作抛石机。

具有一定初速的、在空间运动中不受任何机械力作用的运动称自由运动。因而,外弹道学研究的是一种最一般的机械运动——具有六个自由度的刚体运动。在这种情况下,它的运动伴随着一些附加效果,这些附加效果决定于飞行的外界条件、修正力的作用、火箭质量的变化、质心沿着壳体的变动等等。

在讨论弹丸在外力(空气动力、重力、推力)作用下运动的研究范畴内,外弹道的任务是:火炮火箭系统设计参数的确定,新武器系统的实验保障,射表的编制,射击诸元计算机弹道计算和射击结果的综合处理,飞行中弹道轨迹的测量和受力的确定。

一个新武器系统的研制一开始总要进行弹道设计、求解外弹道和内弹道的问题。外弹道可确定弹道的形状、最大和最小射角、对于过载值的要求等。研究各种弹丸结构的运动稳定性是外弹道学的一项重要任务。利用外弹道的方法可以在理论上首先确定出火箭的主动段。以计算实际射击条件相对标准条件的差别为基础的修正理论可以在对固定目标和移动目标进行射击时准确地确定出起始条件。弹丸散布和射击精度的计算可以在解决这样那样的战术任务时确定出弹丸的用弹量。

外弹道的另一个重要任务是确定运载兵器(舰船、飞机)对弹丸运动起始条件的影响。在对运动目标进行射击时,用外弹道学的方法

能确定出提前角以及提前角在目标运动过程中的变化量。

弹丸的设计、引信的设计和炮弹各种控制(修正)系统的设计都与外弹道学有密切的联系。

弹道计算通常是在逐次近似下进行的。在弹道设计阶段,弹道计算通常使用简单的运动数学模型,这些模型仅计及主要的因素。而在系统总体设计时,可用新的准确的数据代入,再重复进行弹道计算。

尽管对于不同种类的火箭和弹丸,弹道问题有一定的区别。但是,这些弹道问题的提出和它们的求解,在很多方面存在着共性。火箭和弹丸的运动都遵循同一个力学规律,可以用同样类型的微分方程组进行描述,区别在于方程右边部分的有关力和力矩的表达不同。

为了研究的方便,对火箭外弹道,划分出主动段。在主动段上弹丸的运动必须考虑到,由于燃烧室内燃料的燃烧而引起的气体从喷管组中的排出。推力消失以后(被动段),火箭运动的计算实际上与常质量的炮弹完全一样。

书中介绍的对火箭弹研究的结论虽不能完全扩充应用在有控火箭弹上,但这些结论的进一步发展给有控弹丸的弹道轨迹研究打下了基础。特别是对于属中间类型弹药的弹道修正炮弹更为适用。

外弹道学的研究可以归纳为四个基本任务。

第一个任务是根据给定的起始条件计算弹丸运动轨迹。为此,首先必须要正确地确定出弹丸飞行过程中作用在其上的力和每个瞬时这些力的大小。然后建立考虑了全部作用力的弹丸运动微分方程组,在预先给定的起始条件下求解微分方程组,可得到运动的全部特征量:速度、飞行时间和质心的坐标。并根据这些坐标确定弹道轨迹。有时把第一个任务称作外弹道基本问题或直接(正面)问题。弹丸在运动中作用在其上的力的个数,这些力的变化特性、描述运动的方程组的个数和类型,这些都取决于弹丸的用途、结构、飞行中的稳定方式和预定的运动轨迹。

第二个任务称之为外弹道反面问题。它是根据预先给定的火箭火炮系统的战术技术指标,设计确定出弹丸结构及运动的弹道特性。寻求运动和飞行弹道的最佳方案,乃是弹道设计的重要阶段。

外弹道学的第三个任务是对各种用途弹丸的稳定性进行分析计算。如果火箭和弹丸在飞行中不稳定,显然它们不会正确地按预定方向飞行。

在进行弹道设计计算时,通常把弹丸看作理想的弹丸,并在标准的、平均意义的气象条件下进行设计。但在实际上,在飞行中总存在着各种引起弹丸偏离计算弹道的因素。一定射击条件下的弹道散布可能是由于结构和工艺上的原因(例如,它们引起了火箭的推力偏心)引起的,也可能是由于飞行条件与计算条件不同(例如气象因素的变化、喷管临界截面积不一致)等原因引起的。研究影响弹丸弹道散布的因素,确定它们的影响大小,寻求减小散布和提高射击精度的方法,是外弹道学的第四个任务。

假设较少,而考虑的因素较多的火箭和弹丸的外弹道问题的求解通常是在电子计算机上用数值积分计算方法来完成的。只是少数比较简单的弹道问题是通过查表或近似分析的方法求解的。

在靶场或战场上直接求解射击问题时,需要进行充分的准备:它包括目标位置和炮射阵地的测量,气象诸元的测量,计及纵横坐标的联系和各种扰动因素影响的实际弹道的计算。这些扰动因素包括如火药温度的变化和弹丸初速的相应变化等等。

因此,可以把外弹道问题的内容划分成两个基本的方面:第一个方面称弹道设计,第二个方面称射击问题的弹道保障。

B2. 外弹道学的发展历史

弹丸和火箭技术高速发展的现代化现状,在很大程度上依赖于俄罗斯的科学。为了组织炮兵事业,早在 15 世纪和 16 世纪在俄罗斯成立了炮兵院和炮兵事务部门。在 1620 年由奥尼西姆·米哈依洛夫著作的《军事、火炮和其它问题的战斗科学条例》一书中,能找到关于火箭和身管武器发射的炮弹的首批资料。

在火箭技术领域第一部科学著作出现以前,炮弹外弹道已取得了很高的发展水平。第一部外弹道学是意大利数学家尼古拉·塔尔塔勒(1499—1557)编写的。作为理论依据的第一部关于自由抛射

物轨迹计算的书籍是伽利略(1564—1642)写成的,该书于1638年在意大利的波伦亚出版。在这本书里已经指出,如果抛掷体上没有空气阻力的作用,且认为自由落体的加速度在数值和方向上不变化,则该抛掷物的运动轨迹是一条抛物线。

在17世纪末至18世纪初,外弹道学在空气阻力对快速飞行物体的影响方面进行了研究,英国著名物理学家牛顿(1643—1727)首先研究了介质对在其中运动物体的作用。牛顿研究的范畴涉及低速运动的物体,他的研究成果被以后的研究所证实。

1753年,俄罗斯科学院成员埃列罗姆首次对考虑空气阻力的弹丸运动进行了求解,其结果发布于1755年。后来,他还发表了极有名的著作《流体运动的一般原理》。该著作奠定了流体动力学的基础。

第一个在火箭学方面进行科学研究的人是俄罗斯炮兵上将К. И. 康斯坦丁诺夫(1818—1871),自1849年开始他任彼得堡火箭学校的校长,他对火箭制造业的组织和加工技术做了大量出色的工作。К. И. 康斯坦丁诺夫揭示了火箭运动的物理本质,并发现了火箭的动量增量与排出气体动量之间的平衡关系。他还得出了一个重要的结论:火箭的推力偏心是火箭偏离运动初始方向的根本原因,并为提高射击精度指出了防止尾翼式火箭弹翻转的措施。

在19世纪前半叶,火箭炮兵学得到了飞速的发展。随后,射击精度较差的和射击精度较好的身管发射火箭在各个国家的炮兵部队中得到了大量的应用。在火炮弹丸广泛应用的基础上,飞行力学原理也得到了发展。

1820年俄罗斯创建了炮兵学校,1855年对炮兵科学院进行了改造,外弹道学的发展在很大程度上与这些教学研究联系在一起。其中,炮兵学校的В. А. 安库多维奇教授编著了第一本外弹道学教科书,并于1836年出版。在炮兵科学院里,自1855年至1858年期间,外弹道课程是由著名俄罗斯数学家М. В. 奥斯特罗格拉德斯基讲授的,他第一个给出了球形旋转弹丸空中运动复杂问题的一般解的形式。

从1858年开始,俄罗斯的弹道专业由著名学者和设计师Н. В.

马也夫斯基领导,他对俄罗斯炮兵的发展作出了很大的贡献。其中,他对高速运动炮弹的空气阻力作了深入的研究,并且还研究了长圆形炮弹的旋转运动。在1865年发表了著作《长圆形炮弹空中飞行的旋转运动影响》。H. B. 马也夫斯基第一个讲授了由他研究的炮弹纵轴在空中运动的旋转理论。在他的领导下,研制了一系列性能优良的火炮系统,这些火炮系统在当时是最先进的了。H. B. 马也夫斯基的学生H. A. 扎布茨基(1853—1917)继承了他的事业。1892年俄罗斯数学家A. M. 李雅普诺夫发表了举世闻名的著作《运动稳定性的一般问题》,它开创并发展了关于飞行器运动稳定和飞行器稳定装置的系统理论。他创立的理论至今还被采用。

伟大的教育家И. B. 密歇尔斯基(1859—1935)在他的理论力学著作中发表了变质量物体运动方程,该方程在研究火箭的运动时得到了应用。他还建立了火箭弹的垂直运动方程。1903年К. Э. 齐奥尔科夫斯基发表了著作《利用火箭仪器仓的宇宙空间研究》,在该著作中建立了有名的确定火箭运动最大速度的公式,其假设条件是忽略空气阻力和重力的作用。

К. Э. 齐奥尔科夫斯基预见到了火箭技术的发展,并根据自己的理论研究,对火箭技术提出了一系列的重要建议。这些建议包括以下一些设想:在远距离飞行火箭的推进发动机中使用液体燃料;为了控制火箭的飞行使用燃气舵,因为在没有空气的空间中通常使用的空气舵已经失效,这时燃气舵便可以发挥作用;飞行原理中求极值解的方法,其中包括火箭运动最佳状态的确定;揭示了К. Э. 齐奥尔科夫斯基第二问题的解,在该问题中确定了火箭的质量与能达到最大上升高度的火箭飞行期间速度之间的变化规律。

在苏维埃从事火箭技术工作的著名学者中,有К. Э. 齐奥尔科夫斯基的首批学生,出色的工程师Ф. Л. 灿杰尔和发明家Ю. В. 康德拉特尤克(А. И. 莎尔格)。Н. А. 雷尼恩、Я. И. 别列里曼和Ф. Л. 灿杰尔对运动推进原理的推广做了大量的工作。

在1918年,根据В. И. 列宁的提议,成立了空气流体动力中心研究所——ЦАГИ。杰出的俄罗斯空气动力学者Н. Е. 茹科夫斯基是

ЦАГИ 的创始人,茹科夫斯基是飞行器气动力计算和飞行力学的奠基人。第一次空气动力的实验工作是由 Н. Е. 茹科夫斯基在莫斯科大学和莫斯科技术学校(以后莫斯科技术学校以 Н. З. 包曼的名字命名)内完成的。科学院院士 А. Н. 图波列夫、Б. И. 尤里耶夫、А. А. 阿尔汉格里斯基、Б. С. 斯捷奇金、В. В. 戈卢别夫和许多优秀的设计者都曾 是 Н. Е. 茹科夫斯基的学生,而他们中的许多人曾经是莫斯科技术学校的由 Н. Е. 茹科夫斯基组织的学员科学训练班的成员。按照 Н. Е. 茹科夫斯基的提议,在 1919 年成立了莫斯科航空工程学院,在 1922 年变成空军工程学院,并以 Н. Е. 茹科夫斯基的名字命名。

1882 年,Н. Е. 茹科夫斯基写出了《关于运动可靠性》一书,该书成为他的代表作。

关于飞行动力学和外弹道学的现代化科学理论,在很大程度上归功于 В. П. 韦特钦金、И. В. 奥斯特斯拉夫斯基、В. С. 瓦德罗夫、В. С. 培什诺夫、Н. М. 蒙钦科等教授们,以及空军工程学院的 Л. А. 范特采里、Г. Ф. 布拉科教授、В. С. 普加乔夫院士和其他一些学者。

1918 年,苏联政府决定成立炮兵试验常设专门委员会(КОСАРТОП)。该委员会负责解决有关建立火炮系统的技术问题。在这个委员会里,В. М. 特罗菲莫夫、Н. Ф. 德罗兹多夫、Г. П. 基斯涅姆斯基、Н. Е. 茹科夫斯基、А. Н. 克雷洛夫、С. А. 恰普雷金等火炮专家们进行了卓有成效的工作。因而在 1917~1918 年间 А. Н. 克雷洛夫院士研究得出了弹丸运动微分方程的数值积分方法,该方法在《先进的膛线缠度计算方法》一文中得到了发展。这种方法大大地提高了身管的寿命。炮兵试验常设专门委员会的专家学者们在新型武器的设计方面取得了卓越的成就。

在战后苏联的工业和国家极端贫困饥饿的环境情况下,炮兵试验常设专门委员会还出色地完成了各项任务。这个委员会以及随后它的继承者——炮兵研究所(АНИИ,РККА)和炮兵研究院在 1920 年期间所做的工作均给 1930 年前后红军炮兵的武器装备奠定了科学基础,它们成为培养苏联火炮专家和设计师的科学摇篮。

高速空气动力学及燃气动力学的奠基者是 C. A. 恰普雷金院士 (1869—1942)。他是 H. E. 茹科夫斯基的优秀学生。C. A. 恰普雷金在气动中心研究所里担任了十多年的领导职务,使该研究所在仪器、设备和科学知名度方面很快超过了欧洲、美国的同类科学研究所。直至 C. A. 恰普雷金逝世前,他一直是一位空气燃气动力的出色的科学领导者。这一学派的科学家 C. A. 恰普雷金和 M. B. 克尔德什、M. A. 拉夫连齐夫、Л. И. 谢道夫、С. А. 克里斯蒂安诺维奇等院士们解决了许多与飞行理论有关的问题。

外弹道学的发展与火箭和火炮系统设计实际问题的解决密切相关。在苏联,火箭技术方面的理论设计和试验研究开始是在空气动力实验室(ГДЛ)内完成的。该实验室是 1921 年由战争指挥部组织成立起来的。在 1925 年,该实验室迁往列宁格勒。在 1931~1932 年间创造了火箭推进运动研究室(ГРПД),在这个研究室里工作过的有火箭事业的爱好者 Ф. А. 灿杰尔、С. П. 柯罗连夫、М. К. 齐洪拉沃夫、Ю. А. 波别多诺斯崔夫和其他一些学者。第一颗苏联火箭的飞行就是在这个研究室里进行计算、设计、加工和试验的。1933 年,空气动力实验室和莫斯科推进运动研究室进行合并,并创造了当时世界上第一所国家火箭研究所(РНИИ)。1930 年,工程师——学者 Н. И. 齐霍米罗夫、В. А. 阿捷姆耶夫、В. С. 彼得罗帕夫洛夫斯基、Г. Э. 郎格马克和其他工作人员共同设计出了苏联第一枚固体燃料军用火箭弹,这些带有某种修正的火箭弹曾经在 1941~1945 年期间伟大的卫国战争中发挥了作用。由火炮专家 В. Г. 格拉宾、В. И. 沙维林、И. И. 伊凡诺夫、Ф. Ф. 彼特罗夫和其他苏联设计师们领导的设计集体取得了很大的成绩。

在第二次世界大战初期,小的无控火箭(火箭弹)的射程还不大,火箭的外形类似炮弹或者迫击炮弹,火箭的质心运动方程组与炮弹的运动方程没有多大区别。为了确定空气阻力采用了“标准”的空气阻力函数或者称为“空气阻力定律”。

随着飞行距离的增加,随着火箭运动速度的增加,也随着制导的出现与复杂结构和复杂外形火箭的出现,火箭弹的运动方程变得极

为复杂。为了解决与火箭设计有关的技术问题,需要吸收包括动力装置和自动控制方面在内的有关学者和专家一起工作。

为了计算能跟踪运动目标的火箭弹的轨迹需要建立一套专门的理论。在那里,把大家熟悉的火炮对提前点的射击方法作为初步研究这种飞行的基础。在这方面,首先的工作是对方向进行“运动学”特征的修正。

在近代,苏联科学家已成功地解决了有控火箭飞行理论中复杂的动力学问题。当火箭弹处于自动导引的运动状态时,求解反面问题会遇到困难。在该研究领域里,苏联学者 A. A. 科斯莫杰米杨斯基、Д. Е. 阿哈茨门姆斯基、T. M. 埃涅耶夫、Д. A. 波哥列洛夫和其他科学家们发表了极有价值的文章。

多级火箭的发射需要依靠广大学者、设计师、工程师和工人們的集体创造力。研究宇宙撞击的某组织的一位领导人是 С. П. 科罗列夫院士(1906—1966)。他是第一艘苏联载人宇宙飞船和运载火箭的主要设计者。

在求解许多无控外弹道问题时、同样在进行火箭和炮弹的设计时,将会广泛采用苏联科学家们的研究成果。这些苏联科学家还有 A. A. 安德罗诺夫和 H. H. 巴乌金,Г. C. 比尤什根斯和 P. B. 斯图德涅夫,H. H. 克拉索夫斯基,H. H. 莫伊谢耶夫,Г. E. 库兹马克,A. A. 列别捷夫,H. Ф. 格拉休特,C. A. 高尔巴钦科,B. A. 雅罗舍夫斯基,等等。

第一部分 火箭和炮弹的飞行 条件及运动数学模型

第一章 作用在飞行器上的 力和力矩

作用在火箭和弹丸上的力和力矩可分成内部的和外部的两部分。外界作用的力和力矩有：空气动力和力矩、由地球的影响所决定的力。当弹丸相对地球运动时，由于地球的影响，将对弹丸产生以下几个力的共同作用：引力、离心惯性力和地球旋转引起的科氏力。属于内部的力和力矩有：由火箭喷出的质量产生的力和力矩（即反作用力和力矩），由发动机内工质（燃料和气体）的移动而引起的力和力矩（火箭摆动时产生的哥氏力，由发动机内物质不稳定运动而引起的附加力和力矩），通常认为后者是次要因素。

按控制装置结构和工作原理的不同，控制力和力矩既可以是内部的，也可是外部的。对于无控火箭与弹丸，自然都没有控制力的作用。当它们自由飞行时，当然认为没有推力的作用。

在计算弹丸运动参数时，应把作用在火箭和弹丸上的力矢量向选择的坐标系投影而成为标量的形式。这样，在组成运动方程组时可以把力分解在各种坐标系上。这些坐标系有与地球固连的坐标系（对于引力和重力），有与速度矢固连并随轨迹运动的弹道坐标系（对于空气动力），有与弹丸固连的坐标系（对于推力）。

§ 1.1 确定飞行器空间位置的坐标系和角度

1.1.1 坐标系的一般特征

当把飞行器看作刚体时，飞行器在空间的位置由三个线坐标和

三个角坐标所确定,通常运动微分方程组可以表示在右手坐标系上。在计算时经常采用的有:直角坐标系、柱坐标系和球坐标系。在实验弹道中,为了确定飞行器在空间的位置,坐标系的选择决定于实际测试仪器的测量方法。

对于在地球引力场内飞行的飞行器,为了便于理论研究,通常采用仅是原点不同的两大类坐标系。第一类坐标系与地球固连或者与其它的空间点固连,第二类坐标系与飞行器本身固连。

经常采用各种各样的地球坐标系,这些地球坐标系的原点可采用地心、射出点或者一个相对地球不动的点。

为了研究飞行器的绝对运动,常常采用惯性坐标系 $O_{\kappa}X_{\kappa}Y_{\kappa}Z_{\kappa}$ 。在一般情况下,惯性坐标系的轴在空间的方向是不变化的。惯性坐标系随地球绕太阳作进动运动,而它的方向与地球的自转无关(与地球固连的坐标系则不同,地球固连坐标系是与地球一起自转的,该坐标系在研究火箭的相对运动时应用)。

地球坐标系 $O_0X_0Y_0Z_0$ 的原点为 O_0 ,其轴相对地球固连。原点位于地球质心,坐标轴中的一个轴沿着地球的旋转轴指向北方,这种与地球固连的直角坐标系称之为地心坐标系。如果取地球质心为球面坐标系的原点,则该系统称之为地心球面坐标系。

如果坐标系的原点在地面上,则称为地面坐标系。

标准地面坐标系 $O_0X_gY_gZ_g$ 的原点 O_0 固连于地球表面, O_0Y_g 轴垂直向上, O_0X_g 轴和 O_0Z_g 轴的方向根据研究问题的情况而定。对于地面炮兵系统来说射出点坐标系 $O_0X_cY_cZ_c$ 也是一个地面直角坐标系(图 1.1),它的原点决定于发射装置的情况,与发射状态下火箭的质心重合。该坐标系的 O_0Y_c 轴垂直向上, O_0X_c 、 O_0Z_c 轴位于射出点水平面上,其 O_0X_c 轴指向射击方向。通过初速的垂直面 $O_0Y_cX_c$ 称作射击面,有时也称作抛射面。射击平面相对地球的方位由身管方位角或射击方位角 A_c 表示。

为了确定火箭或空中目标相对于地球表面的空间位置,常利用射出点球面坐标系(图 1.2)。火箭质心位置 P 由有时称为斜距 D 的半径矢量 r 的模和两个角度来确定。这两个角度是在当地水平面内

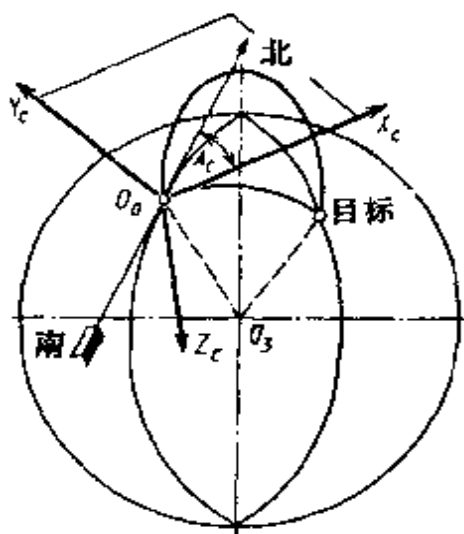


图 1.1 射出点直角坐标系

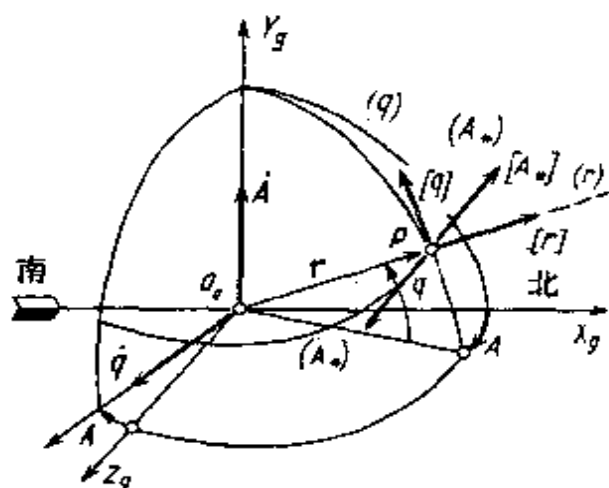


图 1.2 射出点球面坐标系

自正北方顺时针算起的方位角 A 和垂直平面内的高底角 q 。当在球面坐标系内组成运动方程组时,在许多情况下,为了保持水平面内角度计算方向的统一,将方位角 A 用从正北方向开始按逆时针方向转到射向的角度 A_* 代替。在图中,球面坐标系的坐标平面是半径为 r 的球、通过半径 r 的铅直面、顶点在 O_0 顶角为 $180^\circ - 2q$ 的圆锥面。坐标线: (r) ——矢径直线; (q) ——通过给定点 P 的球的大圆周; (A_*) ——通过给定点 P ,以平行于 $O_0X_gZ_g$ 平面切大球而得的圆周。曲线坐标系的坐标轴 $[r]$ 、 $[q]$ 和 $[A_*]$ 与坐标线相切。

大多数动坐标系的一般表示方法是:其坐标原点位于飞行器的特征点上,一般情况下为它的质心。动坐标系 $OX_uY_uZ_u$ 轴的方向在空间(相对星座)是不变的。地球动坐标系 $OX_0Y_0Z_0$ 的轴是这样规定的:轴的方向与地心坐标系(相对地球不动) $O_0X_0Y_0Z_0$ 的轴重合。在随飞行器运动的标准坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 上,与 O_0Y_0 轴不同,在飞行器运动过程中,轴 Y_g 通过当地的铅直线向上、轴 OX_g 和 OZ_g 平行于当地的水平面,其方向根据求解问题的情况,选择合适的方向。

固连坐标系 $OXYZ$ 按如下规定选择轴的方向:纵轴 OX 在飞行器的对称面内,或者如果坐标原点不在对称平面上时(对于轴对称的飞行器, OX 轴沿着它的对称轴指向弹顶) 则平行于对称面。法线轴

OY 位于对称面内或者位于平行于对称面的平面内指向飞行器的上部。横轴 OZ 位于垂直于对称面的右手方向。在速度坐标系 $OX_aY_aZ_a$ 中, 速度轴 OX_a 与空速矢量线重合(飞行器相对大气的速度矢 V), 法线轴 OY_a 在飞行器的对称平面内或者平行于对称面的平面内, 横轴 OZ_a 符合右手系。

弹道坐标系 $OX_kY_kZ_k$ 的原点通常在飞行器的质心, OX_k 轴沿着飞行器的地速矢量(飞行器相对地球的速度矢 V_k), OY_k 轴在通过 OX_k 的铅直面内, 相对于地面向上, OZ_k 轴位于水平方向上。在无风的情况下, 轴 OX_k 与轴 OX_a 的方向重合, 因为此时空速与地速重合。

1.1.2 坐标系相互方位的确定

速度坐标系与固连坐标系之间的关系由攻角 α 、侧滑角 β (由总攻角 α_0 和气动倾斜角 φ_0 确定)

来表示。攻角是空速矢量线在飞行器纵向对称面 OXY 上的投影与纵轴 OX 之间的夹角, 侧滑角是空速矢量线与飞行器纵向对称面之间的夹角(图 1.3)。总攻角是飞行器纵轴与速度矢之间的夹角。坐标系

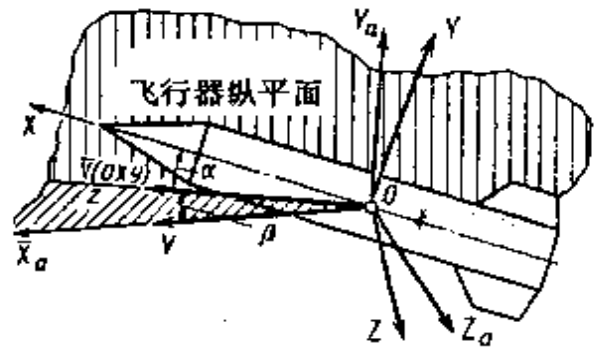


图 1.3 空速矢量在固连坐标系上的方位

$OX_aY_aZ_a$ 与总攻角有关。 OX_aY_a 平面与总攻角平面重合(图 1.4)。 OX_a 轴与纵轴重合, OY_a 轴位于总攻角平面内, OZ_a 轴按右手系确定。法线轴 OY 与 OY_a 轴之间的夹角称作气动倾斜角。

标准坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 与固连坐标系 $OXYZ$ 之间的关系由偏航角、俯仰角和倾斜角表示。

偏航角 ψ 是 OX_g 轴与纵轴 OX 在水平面 OX_gZ_g 上的投影之间的夹角。在有些飞行器中, 偏航角是根据安装在垂直于 X_gOY_g 抛射面并通过纵轴 OX 的平面上的仪表实际测量角来确定的。如果将确定在上述倾斜平面上的偏航角用 ψ_H 表示, 则从图 1.6 可以看出, $\sin\psi_H = \sin\psi\cos\vartheta$ 。显然, 在 $\vartheta = 0$ 时, 有 $\psi_H = \psi$ 。

俯仰角 ϑ 是纵轴 OX 与水平面之间的夹角。应该注意的是,关于静止水平面(即标准地面坐标系下)的俯仰角和关于当地水平面的俯仰角之间是有区别的。这种区别对于研究远射程的飞行器的运动特性是有特别意义的(图 1.5)。

倾斜角 γ 是当偏航角为零时 OZ 轴与 OZ_g 轴之间的夹角。

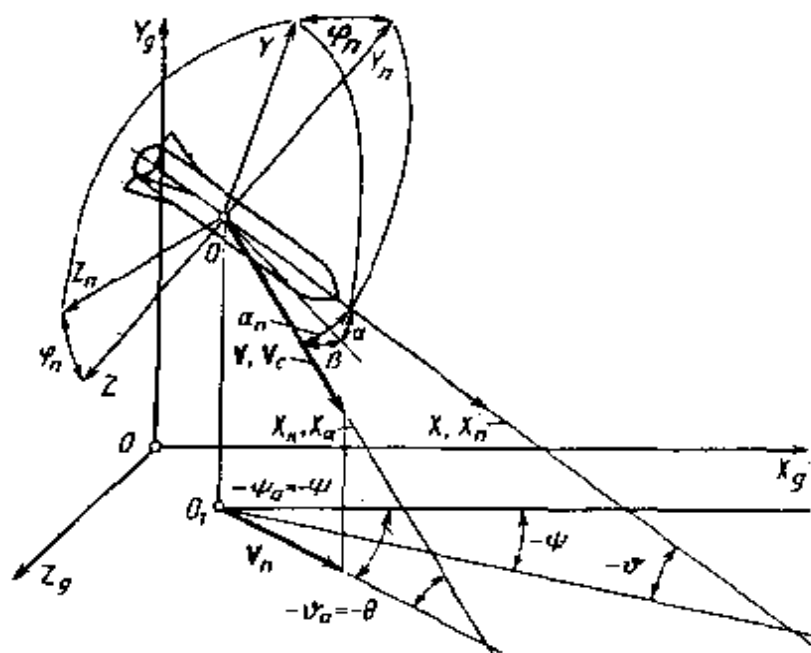


图 1.4 无风时,带方位攻角的坐标系、固连坐标系、标准坐标系之间的关系

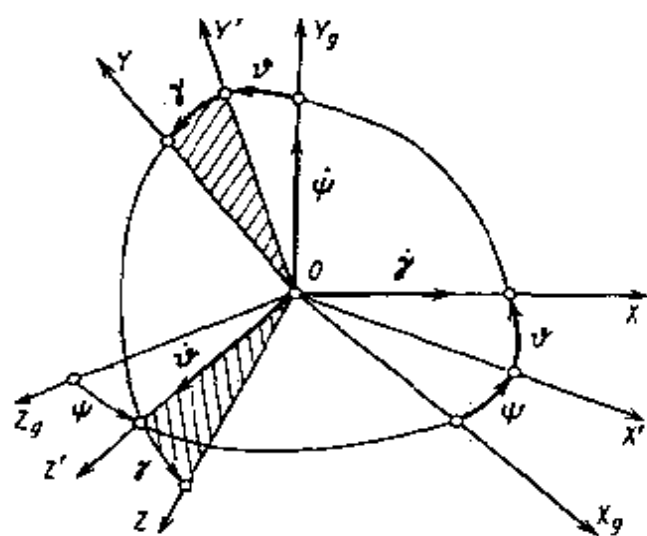


图 1.5 OY_g 轴为第一转轴时固连坐标系与标准坐标系之间的位置关系

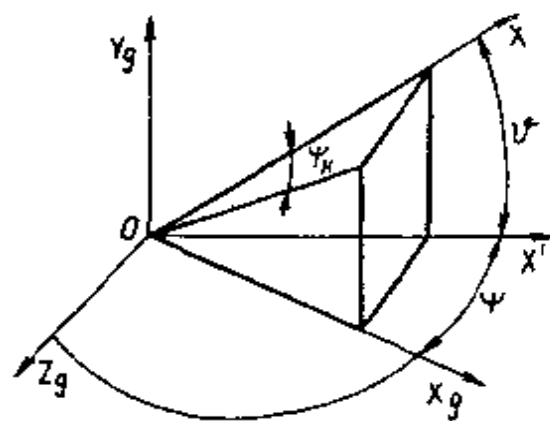


图 1.6 偏航角在水平面和倾斜面上的变化

标准坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 与速度坐标系 $OX_aY_aZ_a$ 之间的位置关系可通过速度偏航角、速度俯仰角和速度倾斜角来表示。速度偏航角 ψ 。

表示 OX_g 轴与速度矢在水平面 OX_gZ_g 上的投影之间的夹角。速度俯仰角 ϑ_a 表示速度轴 OX_a 与水平面 OX_gZ_g 之间的夹角，速度倾斜角 γ_a 表示速度偏航角为零时横轴 OZ_a 与 OZ_g 轴之间的夹角。

弹道坐标系相对标准坐标系之间的位置关系由 θ 和 Ψ 角确定。 θ ——弹道倾角(飞行器的地速与水平面之夹角)， Ψ ——弹道偏角(OX_g 轴与飞行器地速在 OX_gZ_g 平面上投影之夹角)。

在无风情况下，地速与空速重合。因而，弹道倾角 θ 与速度俯仰角 ϑ_a 重合，弹道偏角 Ψ 与速度偏航角 ϕ_a 重合。

地速矢量 V_k 在标准地面坐标系上的投影可由图 1.7 求得。

$$V_{xg} = V_k \cos \theta \cos \Psi \quad V_{yg} = V_k \sin \theta \quad V_{zg} = V_k \cos \theta \sin \Psi \quad (1.1)$$

当 $\Psi = 0$ 时，为平面运动。此时速度的水平和垂直分量为：

$$V_{xg} = u = V_k \cos \theta \quad V_{yg} = w = V_k \sin \theta \quad (1.2)$$

OX_g 轴与风速

矢量在水平面上的投影之夹角称为风向偏角 ϕ_w ，风速矢量与水平面之夹角称为风向倾角 θ_w 。

一个坐标轴相对另外一个作为支撑或基础的坐标轴之角度方位可以通过欧拉旋转角的方法实现。

在发射准备过程和飞行器飞行过程中，欧拉角可以通

过三基架陀螺稳定平面来测定。陀螺仪外框架的旋转轴始终指向飞行器的纵轴。陀螺仪内框架旋转轴应该与标准坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 或惯性动坐标系 $OX_aY_aZ_a$ 的轴重合。这个轴可实现欧拉角的一次旋转。第

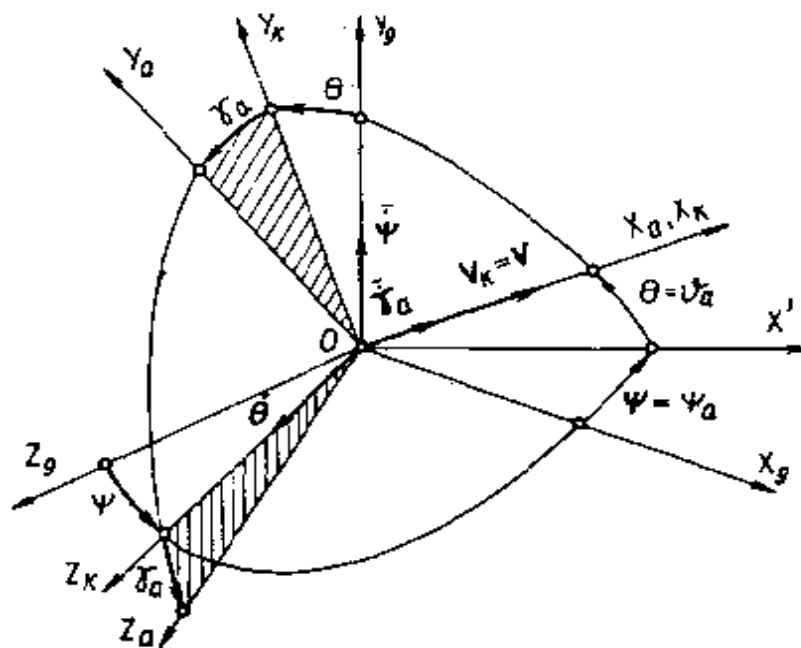


图 1.7 在无风情况下的速度系、弹道系与标准系之间的位置示意图

一个旋转轴应选择为飞行过程中相对于该轴转动角度较大的轴。对于飞航类型的飞行器,第一个旋转轴是 OY_g ,它旋转的角是方向角 ψ 。欧拉角依次的转动图可以参看图 1.5。对于垂直发射,并带倾角按程序变化装置的飞行器,第一个旋转轴是 OZ_g ,它旋转的角是倾角(图 1.8)。

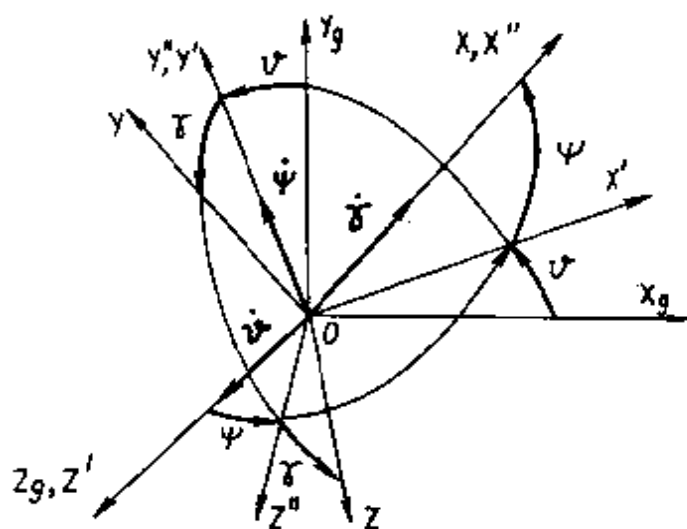


图 1.8 第一次绕 OZ_g 轴旋转时固连坐标系与标准地面坐标系之位置示意图

应记住,欧拉角之间是各向无关的,即一个角变化时,其它两个角是不变化的。

1.1.3 利用方向余弦矩阵进行坐标变换

由一个坐标系向另一个坐标系转换可以通过方向余弦矩阵来实现,有时将该矩阵表示成转换角方向余弦的一栏表。矩阵通常用两个脚注表示较方便。例如 $A_1^{(2)}$,此处下标相应作为基础的不动坐标系,上标对应于相对不动坐标系依次作欧拉角旋转而得到的坐标系。矩阵的元素是欧拉旋转角的函数,它也可方便地用两个脚注表示。例如 a_{ij} ,这里 i ——行号, j ——列号:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = A_1^{(2)} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad A_1^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

每一个矩阵元素等于某一不动坐标系轴的单位矢量在另一动坐标系轴上的投影。换句话说,每一个矩阵元素是相应由行和列确定的单位矢量的数量积,例如 $a_{11} = x_1^0 x_2^0$ 。如果要从第二个坐标系向第一个坐标系的转换,则需要利用转置矩阵。第一坐标系向第二坐标系转

换,第二坐标系向第三坐标系转换的复杂过程服从矩阵的乘法法则:

$$A_1^{(3)} = A_2^{(3)} \cdot A_1^{(2)} \quad (1.4)$$

但是,在一般情况下矩阵的乘法没有交换律,即

$$C = A \cdot B \neq B \cdot A$$

矩阵的乘法可以推广到任意几个坐标系的情况

$$A_1^n = A_{n-1}^n \cdot A_{n-2}^{n-1} \cdots A_1^{(2)} \quad (1.5)$$

即矩阵的乘法有结合律。

为了组成由原始坐标系向最终坐标系的转换矩阵,首先必须依次组成相应于每一个转角的转换矩阵,然后再把它们连乘起来。现在来建立所谓第一类的三次转换矩阵。作为例子,让我们来组成从标准坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 向固连坐标系 $OXYZ$ 过渡的转换矩阵。每次旋转均按逆时针方向进行,即按 $\vartheta \rightarrow \psi \rightarrow \gamma$ 的次序作为旋转的正方向。第一次旋转 ϑ 角,记 $A_1^{(2)} = A_\vartheta$,得

$$A_\vartheta = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

第二次旋转 ψ 角,有

$$A_2^{(3)} = A_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

第三次旋转 γ 角,有

$$A_3^{(4)} = A_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

应当注意,在这里交换律不适用。当保留矩阵中值为零的元素时,便能得到由标准坐标系 $OX_gY_gZ_g$ 向固连坐标系 $OXYZ$ 过渡的转换矩阵。首先

$$A_\gamma \cdot A_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & -\sin\phi \\ \sin\gamma\sin\phi & \cos\gamma & \sin\gamma\cos\phi \\ \cos\gamma\sin\phi & -\sin\gamma & \cos\gamma\cos\phi \end{bmatrix}$$

再乘以第三个矩阵得

$$A_1^{(4)} = A_\gamma \cdot A_\phi \cdot A_\vartheta = A_\gamma \cdot A_\phi \times \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta & 0 \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

于是得到由标准坐标系向固连坐标系过渡的转换矩阵

$$A_1^{(4)} = A = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\vartheta & \cos\phi\sin\vartheta & -\sin\phi \\ \sin\gamma\sin\phi\cos\vartheta - \cos\gamma\sin\vartheta & \sin\gamma\sin\phi\sin\vartheta + \cos\gamma\cos\vartheta & \sin\gamma\cos\phi \\ \cos\gamma\sin\phi\cos\vartheta + \sin\gamma\sin\vartheta & \cos\gamma\sin\phi\sin\vartheta - \sin\gamma\cos\vartheta & \cos\gamma\cos\phi \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

而转换公式为:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

利用变换方向余弦矩阵(1.3)的两个脚标的元素 a_{ij} , 得到如下单位矢量的关系:

$$\begin{cases} x^0 = a_{11}x_g^0 + a_{12}y_g^0 + a_{13}z_g^0 \\ y^0 = a_{21}x_g^0 + a_{22}y_g^0 + a_{23}z_g^0 \\ z^0 = a_{31}x_g^0 + a_{32}y_g^0 + a_{33}z_g^0 \end{cases} \quad (1.12)$$

当固连坐标系向标准坐标系转换时, 有

$$\begin{cases} x_g^0 = a_{11}x^0 + a_{21}y^0 + a_{31}z^0 \\ y_g^0 = a_{12}x^0 + a_{22}y^0 + a_{32}z^0 \\ z_g^0 = a_{13}x^0 + a_{23}y^0 + a_{33}z^0 \end{cases} \quad (1.13)$$

地球中心直角坐标系和地球中心球面坐标系(图 1.9)之间的关系可表示成简单的关系式:

$$x_0 = r\cos\varphi_{ru}\sin\lambda \quad y_0 = r\sin\varphi_{ru} \quad z_0 = r\cos\varphi_{ru}\cos\lambda \quad (1.14)$$

式中, φ_{ru}, λ ——分别为火箭相对地心的纬度和经度。

由曲线球面坐标系向地面坐标系 $O_0X_gY_gZ_g$ 的转换可借助表 1.1 实现。在表 1.2 ~ 1.6 中给出了其它坐标系间变换的方向余弦。

表 1.1 曲线球面坐标系与标准地球坐标系之间的方向余弦

坐标轴	O_0X_g	O_0Y_g	O_0Z_g
$[r]$	$\cos q \cos A$	$\sin q$	$\cos q \sin A$
$[q]$	$-\sin q \cos A$	$\cos q$	$-\sin q \sin A$
$[A]$	$-\sin A$	0	$\cos A$

表 1.2 弹道坐标系与速度坐标系之间的方向余弦

坐标轴	OX_a	OY_a	OZ_a
OX_k	1	0	0
OY_k	0	$\cos \gamma_a$	$-\sin \gamma_a$
OZ_k	0	$\sin \gamma_a$	$\cos \gamma_a$

表 1.3 固连坐标系与弹道坐标系之间的方向余弦

坐标轴	OX	OY	OZ
OX_k	$\cos \alpha \cos \beta$	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\sin \beta$
OY_k	$\cos \gamma_a \sin \alpha + \sin \gamma_a \cos \alpha \sin \beta$	$\cos \gamma_a \cos \alpha - \sin \gamma_a \sin \alpha \sin \beta$	$-\sin \gamma_a \cos \beta$
OZ_k	$\sin \gamma_a \sin \alpha - \cos \gamma_a \cos \alpha \sin \beta$	$\sin \gamma_a \cos \alpha + \cos \gamma_a \sin \alpha \sin \beta$	$\cos \gamma_a \cos \beta$

表 1.4 标准地面坐标系与弹道坐标系之间的方向余弦

坐标轴	OX_k	OY_k	OZ_k
OX_g	$\cos \theta \cos \Psi$	$-\sin \theta \cos \Psi$	$\sin \Psi$
OY_g	$\sin \theta$	$\cos \theta$	0
OZ_g	$-\cos \theta \sin \Psi$	$\sin \theta \sin \Psi$	$\cos \Psi$

表 1.5 标准地面坐标系与固连坐标系之间的方向余弦

坐标轴	OX	OY	OZ
OX_g	$\cos \vartheta \cos \psi$	$-\cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma$	$\cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma$
OY_g	$\sin \vartheta$	$\cos \vartheta \cos \gamma$	$-\cos \vartheta \sin \gamma$
OZ_g	$-\cos \vartheta \sin \psi$	$\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma$	$\cos \gamma \cos \psi - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma$

表 1.6 速度坐标系与固连坐标系之间的方向余弦

坐标轴	OX	OY	OZ
OX_a	$\cos\alpha\cos\beta$	$-\sin\alpha\cos\beta$	$\sin\beta$
OY_a	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	0
OZ_a	$-\cos\alpha\sin\beta$	$\sin\alpha\sin\beta$	$\cos\beta$

对于作旋转运动的飞行器(例如线膛炮弹),固连坐标系相对基准(例如运动着的定向基准)的位置可以由三个欧拉角确定:相对纵轴的旋转角 φ ,章动角 δ 和进动角 ν 。在动量矩矢量 K 与质心地速矢量 V_k 重合的情况下可以得到欧拉—潘索(Эйлера-Пуансо)(图 1.10)运动图。注意在图中标出的是角速度矢 $\dot{\varphi}$ 、 $\dot{\nu}$,而不是 φ 和 ν 。

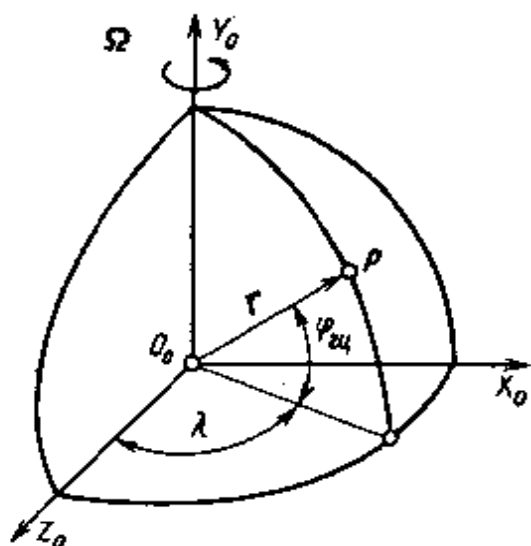


图 1.9 地心直角坐标系与地心球面坐标系

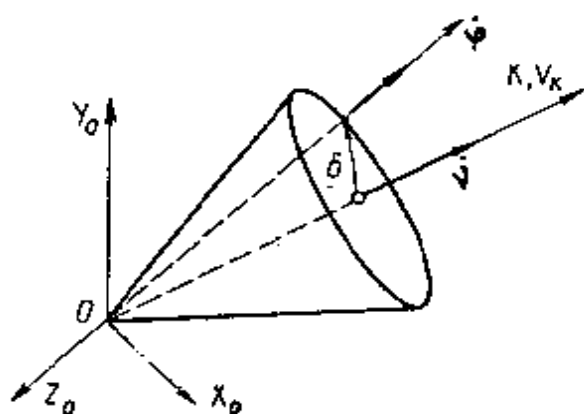


图 1.10 飞行器角运动关系

$\dot{\varphi}$ —飞行器相对自身纵轴旋转角速度矢量;
 $\dot{\nu}$ —进动角速度矢量; δ —章动角;
 K —动量矩矢; V_k —飞行器地速矢量。

自由运动的情况下,当上述角度的三角函数用相应符号表示时,利用四元素可方便地确定飞行器在空间的方向,罗德里加—哈密顿(Годрига-Гамильтона)四元素 ξ_0 、 ξ_1 、 ξ_2 、 ξ_3 满足关系式 $\xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$, ξ_1 、 ξ_2 和 ξ_3 关于时间的导数与角速度之间的关系满足方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} A_{\xi} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad a\dot{\xi} = -\frac{1}{2}\omega\xi \quad (1.15)$$

式中, $\omega = \omega_x + \omega_y + \omega_z$, $\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$

$$A_{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & \xi_0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & \xi_0 \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

固连坐标系相对惯性坐标系的角速度矢量可用 Ω 表示。固连坐标系相对与所选地球固连坐标系的角速度用 ω 表示。 ω 在固连坐标系 $OXYZ$ 上的分角速度相应称之为倾斜角速度 ω_x , 偏航角速度 ω_y , 俯仰角速度 ω_z 。类似地可以表示出飞行器在其它坐标系上的分角速度。

§ 1.2 地球引力场及地球旋转对火箭和炮弹飞行的影响

1.2.1 地球引力的力势, 地球的形状和大小

某个函数的全导数等于作用在该点上力的元功, 称此函数 $\Pi(x, y, z)$ 为势函数或位势:

$$d\Pi = F d\mathbf{r} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \quad (1.17)$$

作用在该点的等效力在坐标轴上的投影等于

$$F_x = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \quad F_y = \frac{\partial \Pi}{\partial y} \quad F_z = \frac{\partial \Pi}{\partial z} \quad (1.18)$$

位于地球外距地球质量元 dM 距离为 l 的单位质点的势, 可根据牛顿引力定律有

$$d\Pi_T = f dM / l \quad (1.19)$$

式中, f 为地球引力常数; l 为单位质量的质点(点 P) 与质量元 dM 之间的距离(图 1.11)。将上式关于地球总质量 M 积分, 得到地球引力

场对单位质点产生的位势：

$$\Pi_T = f \int_M dM/l \quad (1.20)$$

P 点的位置和地球质量元 dM 的位置可用球坐标表示： P 点——由 r, φ_{iu}, λ 确定； dM ——由 $\rho, \varphi'_{iu}, \lambda'$ 确定。在球坐标系下位势函数可由下式表示：

$$\begin{aligned} & \Pi(r, \varphi_{iu}, \lambda) \\ &= f \int_M \frac{dM}{l(r, \varphi_{iu}, \lambda, \rho, \varphi'_{iu}, \lambda')} \end{aligned} \quad (1.21)$$

因为不能确切地知道地球的形状并且地球的物质密度 μ_3 也是沿体积改变的，故上式的积分只能用近似方法计算，以 ψ 表示 ρ 和 r 之间的夹角，则

$$l = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos\psi} \quad (1.22)$$

在火箭相对地球运动时， r 和 ψ 的值以至 l 的值是变化的。显然，在火箭运动过程中位势在某个范围内是变化的，在作出若干种假设后可以近似计算。实际中最重要的假设是关于地球的形状，它的大小和质量分布。

作为一种近似处理方法，取地球的形状为地球体，其形状是一个由重力势水平表面限制的形状，而该水平面与没有扰动状态下的海洋平面重合。所谓没有扰动指没有涨潮和落潮，没有大气和任何其它扰动，在该表面上，引力势在所有点处都相等。目前，还没有充分资料用数学方法准确地描述出地球体。在进行各种各样（大地测量学、天文学和弹道学）的计算时，对地球体的逐级近似采用：球体模型——球体，扁球体模型——椭球体（椭圆旋成体）和三轴椭球体模型。

在俄罗斯，大地测量学和天文学方面的著作中在很长一段时间内都采用了别谢利（Бессель）椭球体的假说。在 1924 年，国际协议曾

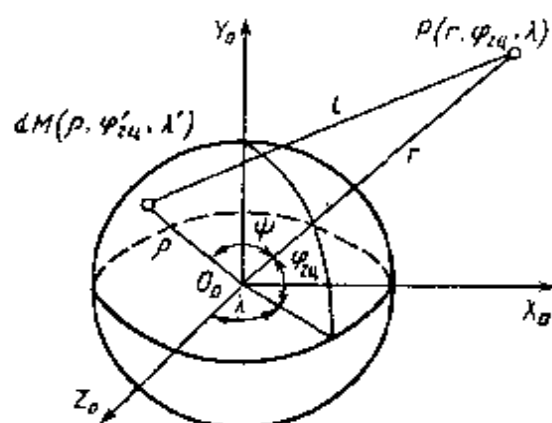


图 1.11 地球外某单位质量质点的坐标

把赫伊弗德(Хейфорл) 椭球体作为最好的假设模型。在许多情况下, 采用了克列罗(А. Клеро) 建议的所谓标准椭球体假说, 因为该假设较为方便。

可以用测量椭球体子午线弧长的方法来计算椭球的大小(其轴的 长度)。因为地球的形状与椭球有差别, 所以在同一纬度不同地方测量出的子午线弧度有着不同的曲率。因此, 用角度法测量来确定地球椭圆度与测量的地点有关。由此可以解释, 为什么不同学者得到的地球椭圆度在数值上会有区别。

在 Ф. Н. 克拉索夫斯基(Красовский)(1878 — 1948) 的领导下, 俄罗斯大地测量工作者借助角度测量仪对苏联、西欧和美国的地形进行了测量, 确定出了椭球两轴的大小, 它在苏联的大地测量工作中被采用并命名为 Ф. Н. 克拉索夫斯基地球椭球体。在此基础上得到了三轴椭球体的数据。

对克拉索夫斯基的两轴扁球体来说, 其长轴半径(平均的赤道半径) 为 $a = 6378245\text{m}$, 其短轴半径为 $b = 6356863\text{m}$ 。两个轴的差约为 42800m 。椭圆体的扁率 $\alpha = (a - b)/a = 1/298.3 = 0.003352$, 第一偏心率的平方 $e_1^2 = (a^2 - b^2)/a^2 = 0.006693$, 第二偏心率的平方 $e_2^2 = (a^2 - b^2)/b^2 = 0.006739$ 。

对球形的地球模型来说, 其基本的地球参数是地球的半径。可以用各种不同方法来确定出地球的半径, 如果取 Ф. Н. 克拉索夫斯基的扁球体三半轴的算术平均值, 可得地球半径为 6371118m 。与地球扁球体具有相同表面积的球体半径等于 6371110m , 许多近似方法都可给出后一个结果。

实际上, 对于各种地球模型, 地球引力势的一般表达式可由展开为球面函数级数 Π_r 的表达式求出。让我们先来看一下较为简单的结果, 它很好地表示了级数展开式中第一项的物理意义。从式(1.22) 可得:

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - \frac{2\rho}{r}\cos\psi}} = \frac{1}{r} f\left[\frac{\rho}{r}, \psi\right] \quad (1.23)$$

把该函数展开成二项式级数形式,用包含勒让德(Лежандр)多项式 $P_n(\cos\psi)$ 的总和来表示:

$$\left[\frac{\rho}{r}\right] = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\rho}{r}\right]^n p_n(\cos\psi) \quad (1.24)$$

n 阶多项式的一般表达式为:

$$p_n(\cos\psi) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n [(\cos\psi)^2 - 1]^n}{d(\cos\psi)^n} \quad (1.25)$$

对于 n 的个别值,有

$$p_0(\cos\psi) = 1;$$

$$p_1(\cos\psi) = \cos\psi;$$

$$p_2(\cos\psi) = \frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2};$$

$$p_3(\cos\psi) = \frac{5}{2}\cos^3\psi - \frac{3}{2}\cos\psi;$$

$$p_4(\cos\psi) = \frac{35}{8}\cos^4\psi - \frac{15}{4}\cos^2\psi + \frac{3}{8};$$

.....

利用式(1.24),式(1.20)变为 $\Pi_T = \frac{f}{r} \int_{Mn=0}^{\infty} \left[\frac{\rho}{r}\right]^n p_n(\cos\psi) dM$ 。取到展开项的前三项,可以把位势写成三个积分的和:

$$\begin{aligned} \Pi_T = \frac{f}{r} \left[\int_M dM + \frac{1}{r} \int_M \rho \cos\psi dM \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2} \int_M \rho^2 \left(\frac{3}{2}\cos^2\psi - \frac{1}{2} \right) dM \right] \quad (1.26) \end{aligned}$$

第一个积分的意义是很显然的: $\int_M dM = M$ 。如果对地球的质量分布和形状作某些限制,其余两个积分也能得到最终的形式。对于原点位于地球质心的坐标系来说,当假设地球的质量按体积均匀分布时,用质点元 dM 的坐标和外部单位质量物体的坐标来表示 $\cos\psi$,可得 $\int_M \rho \cos\psi dM = 0$ 。

地球非球体外形对于质量分布的影响可用相对于地心坐标系各轴的地球的转动惯量来表示,如果以 B 表示相对与地球旋转轴重合的主轴 O_0Y_0 的转动惯量,以 A 和 C 表示相对位于赤道平面的主轴 O_0X_0 、 O_0Z_0 的转动惯量。利用直角坐标与球坐标之间的关系,可以求

得 P 点与质量元 dM 之位置的一般形式。例如

$$\begin{cases} X_{0p} = r \cos \varphi_{\text{m}} \cos \lambda \\ Y_{0p} = r \sin \varphi_{\text{m}} \\ Z_{0p} = -r \cos \varphi_{\text{m}} \sin \lambda \end{cases} \quad (1.27)$$

则得

$$\begin{aligned} \int_M \rho^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right) dM &= (A + C - 2B) \frac{1}{4} (3 \sin^2 \varphi_{\text{m}} - 1) \\ &+ \frac{3}{4} (C - A) \cos^2 \varphi_{\text{m}} \cos 2\lambda \end{aligned} \quad (1.28)$$

用 $\Pi_{T,H}$ 表示展开式中未考虑到的各项的和, 可得到地球引力位势的公式:

$$\begin{aligned} \Pi_T &= \frac{fM}{r} + \frac{f}{4r^3} (A + C - 2B) (3 \sin^2 \varphi_{\text{m}} - 1) \\ &+ \frac{3f}{4r^3} (C - A) \cos^2 \varphi_{\text{m}} \cos 2\lambda + \Pi_{T,H} \end{aligned} \quad (1.29)$$

式(1.29)中的第一项表示了假设地球为质量均匀分布的球体时的引力位势, 所以称之为牛顿引力位势。第二项与纬度 φ_{m} 有关, 它计及了地球两极扁平的影响。第三项考虑到了地球质量分布与经度的关系, 也就是体现了侧向扁平的影响。最后一项(以 $\Pi_{T,H}$ 表示), 它考虑了地球南半球与北半球质量分布的不对称性和地球引力场的不均匀性。

如果假设地球是一个质量均匀分布的绕旋转轴转动的椭球体, 则可以用一个多项式来表示它的位势:

$$\begin{aligned} \Pi_T &= \frac{\pi_0}{r} + \frac{\pi_2}{r^3} \cdot \frac{1}{2} (3 \sin^2 \varphi_{\text{m}} - 1) + \frac{\pi_4}{r^5} \cdot \frac{1}{8} (35 \sin^4 \varphi_{\text{m}} \\ &- 30 \sin^2 \varphi_{\text{m}} + 3) \dots \end{aligned} \quad (1.30)$$

系数 $\pi_0, \pi_2, \pi_4 \dots$ 称做地球常数, 根据 И. Д. 然加洛维奇 (Жанголович) 的研究^[43], 可以取:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 3.9859 \times 10^{14} \text{m}^3/\text{s}^2; & \pi_2 &= -1.77 \times 10^{25} \text{m}^5/\text{s}^2; \\ \pi_4 &= 2.3 \times 10^{35} \text{m}^7/\text{s}^2 \end{aligned}$$

在大多数情况下, 在实际工作中可以采用如下较简单的公式:

$$\Pi_T = \frac{\pi_0}{r} + \frac{\pi_2}{r^3} \cdot \frac{1}{2} (3 \sin^2 \varphi_{\text{m}} - 1) \quad (1.31)$$

地球引力位势的更进一步的多项式可以表示成球面函数的级数形式, 该级数可通过勒让德函数来表示。对于三角函数 ζ , 勒让德函数有如下形式:

$$P_{nm}(\zeta) = (1 - \zeta^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\zeta^m} P_n(\zeta) \quad (1.32)$$

此处, n 表示多项式的次数、 m 表示导数的阶数。

用球面函数表示的地球引力场位势公式为

$$\begin{aligned} \Pi_T = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\frac{R_s}{r} \right]^n (C_{1nm} \cos m\lambda \right. \\ \left. + C_{2nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi_u) \right\} \end{aligned} \quad (1.33)$$

式中, C_{1nm} 、 C_{2nm} 为无量纲系数, R_s 为地球赤道半径。

如果地球的质量分布关于旋转轴对称, 则公式(1.33) 有更方便的形式:

$$\begin{aligned} \Pi_T = \frac{fM}{r} \left\{ 1 + C_{20} \left[\frac{R_s}{r} \right]^2 P_{20}(\sin \varphi_u) + C_{30} \left[\frac{R_s}{r} \right]^3 P_{30}(\sin \varphi_u) + \right. \\ \left. + C_{40} \left[\frac{R_s}{r} \right]^4 P_{40}(\sin \varphi_u) + \dots \right\} \end{aligned} \quad (1.34)$$

式中的无量纲参数 C_{n0} 由地球的水平面和旋转角速度确定, 量 $P_{n0}(\sin \varphi_u)$ 称为区域球面函数。

利用地球卫星测得的地球引力场的资料^[113], 可以确定出

$$K = fM = 398603.2 \text{ km}^3/\text{s}^2; \quad \alpha = 1 : (298.2 \pm 0.2);$$

$$C_{20} = -1082.645 \times 10^{-6}; \quad C_{30} = 2.546 \times 10^{-6};$$

$$C_{40} = 1.649 \times 10^{-6}; \quad R_s = 6378.165 \text{ km}$$

如果假设地球是一个质量均匀分布的平均半径为 R_s 的球体, 则

由式(1.29) 可得 $\Pi_T = \frac{fM}{r} = \frac{K}{r}$ 。因而, 在此情况下地球引力场是一个中心引力场, 作用在单位质量物体上的引力加速度等于 $g_T = -\frac{d\Pi_T}{dr} = \frac{K}{r^2}$ 。负号的意义表示导数 $d\Pi_T/dr$ 沿 r 方向, 而矢量 g_T 的方向与其反向。

比较半径分别为 r 和 R_s 时 g_T 的值得 $\frac{g_T}{g_{T0}} = \left[\frac{R_s}{r} \right]^2$, 它说明了在地球中心引力场中, 引力加速度的大小随离地心的距离 r 改变的关系。

1.2.2 重力和重力势

重力可以表示成

$$F = F_T + F_u \quad (1.35)$$

式中, F_T ——地球引力矢量; F_u ——惯性离心力矢量。在地球球面坐标系中, 作用于质量为 m 的物体上的, 方向与地球旋转轴垂直的离心惯性力为

$$F_u = mr\Omega^2 \cos \varphi_{ru} \quad (1.36)$$

式中, Ω ——地球旋转角速度。

重力的方向与铅垂线重合, 即与给定点处地表面的垂线重合。某处地表面的法线 n 与地球赤道平面之间的夹角称之为地理纬度 φ_r , 它与相对于地心的纬度 φ_{ru} 是有区别的 (图 1.12), 地理经线以格林尼治子午线作为基准线。相对于地心的纬度与地理纬度之间的关系可按下面的近似公式确定:

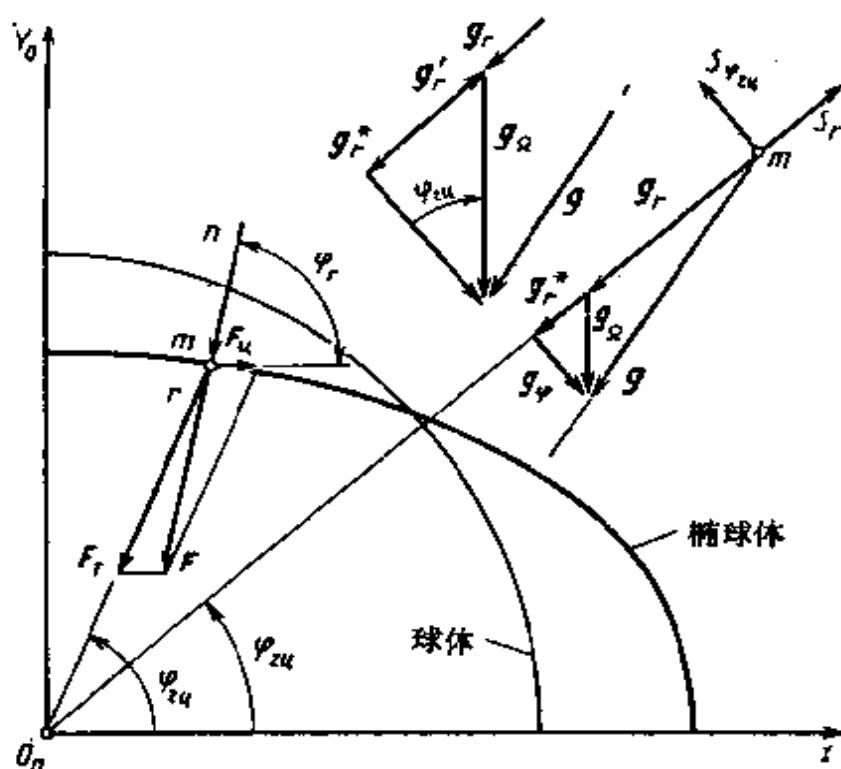


图 1.12 地理纬度 φ_r 处的地球铅垂线, 自由落体加速度矢量在斜角三角形坐标轴的分量

$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{ru}} = \operatorname{tg} \varphi_r (1 - l_1^2) \quad (1.37)$$

式中, l_1 ——第一偏心率。

角度差 $\varphi_r - \varphi_{\text{ru}}$ 由下式确定:

$$\varphi_r - \varphi_{\text{ru}} = a \sin 2\varphi_r \quad (1.38)$$

当 $\varphi_r = 45^\circ$ 时, $\varphi_r - \varphi_{\text{ru}}$ 的最大差值等于 $11.5'$ 。

同样, 重力位势也可以表示成地球引力位势与地球自转所决定的惯性离心力的位势之和。即

$$\Pi = \Pi_T + \Pi_u \quad (1.39)$$

考虑到 $d\Pi_u = F_u dr_u$, 其中 $r_u = r \cos \varphi_{\text{ru}}$, 可以得到单位质量惯性离心力的位势

$$\Pi_u = \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \cos^2 \varphi_{\text{ru}} \quad (1.40)$$

如果利用公式(1.31)表示的 Π_T 公式, 则得

$$\Pi = \frac{\pi_0}{r} + \frac{\pi_2}{2r^3} (3 \sin^2 \varphi_{\text{ru}} - 1) + \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \cos^2 \varphi_{\text{ru}} \quad (1.41)$$

现在来推导自由落体加速度公式。根据位势的特性, 对于单位质量可以求出

$$g_s = \frac{\partial \Pi}{\partial S} \quad (1.42)$$

式中, g_s ——自由落体加速度在 S 方向上的投影; $\partial \Pi / \partial S$ ——重力位势沿 S 方向的导数。在有些情况下自由落体加速度矢量 g 在斜角坐标系中给出较为方便。例如在由矢量半径 r 和角 φ_{ru} 形成的坐标系内, 有

$$g = g_r^* r^0 + g_\varphi S_{\varphi_{\text{ru}}}^0 \quad (1.43)$$

式中, g_r^* 和 g_φ 分别是 g 在坐标 S_r 和 $S_{\varphi_{\text{ru}}}$ 方向上的投影; r^0 和 $S_{\varphi_{\text{ru}}}^0$ ——相应的单位矢量。

对由矢量半径 r 和地球角速度矢量 Ω 形成的坐标系, 与上面类似, 可有形式

$$g = g_r r^0 + g_\Omega \Omega^0 \quad (1.44)$$

根据公式 $g_r^* = \frac{\partial \Pi}{\partial S_r} = \frac{\partial \Pi}{\partial r}$ 和 $g_\varphi = \frac{\partial \Pi}{\partial S_{\varphi_{\text{ru}}}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_{\text{ru}}}$, 可得到自由落体加速度的投影 g_r^* 和 g_φ 。依次对式(1.41)求导, 可得

$$P_{\text{out}} = P_{\text{in}} \cdot 2$$

当把地球假定为球体模型,不计及其自转,由式(1.50)得 $g = fM/r^2 = g_T$ 。

通常在式(1.50)中引入如下量:

$$\mu = \frac{A - B}{R_s^2} \text{ 和 } q = \frac{\Omega^2 R_s}{fM/R_s^2} = \frac{\Omega^2 R_s^3}{fM}$$

在数值上 μ 具有质量的量纲,而 q 为表示地球形状的无量纲参数,其值等于离心加速度与赤道面上自由落体加速度之比,计算表明, $\mu = 0.0011M$, $q = 0.003468$,在式(1.50)中引入量 μ 和 q 后,得

$$g = \frac{fM}{r^2} \left[1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{\mu}{M} \cdot \frac{R_s^2}{r^2} (1 - 3\sin^2\varphi_{\text{ru}}) - q \frac{r^3}{R_s^3} \cos^2\varphi_{\text{ru}} \right] \quad (1.51)$$

在初步计算时,可以利用下式计算地球表面处的自由落体加速度:

$$g_0 = g_{0s}(1 + \beta \sin^2\varphi_{\text{ru}}) \quad (1.52)$$

式中, g_{0s} ——赤道处 $\varphi_{\text{ru}} = 0$ 时的自由落体加速度。

量 β 称之为克列罗(Клеро)系数。在量值上 $g_{0s} = 9.78034\text{m/s}^2$, $\beta = 0.00528001^{[113]}$ 。有时,可以把 g 取为常数,这时 $g = 9.81\text{m/s}^2$ 。当地球取球体模型时, $g \approx g_0(R_s/r)^2$ 。在较精确计算中,应取 $g_0 = 9.80665$ 来计算 g 。

1.2.3 地球旋转对火箭和弹丸飞行的影响

地球在空间作复杂的运动——绕太阳每年旋转一圈并且每昼夜绕自身轴线旋转一周。地球的轴线作章动和进动运动。但是在研究火箭和弹丸的运动时,由于它们的飞行时间很短,一般可以认为地球沿轨道围绕太阳的运动是均匀直线的前进运动,由于地球的章动和进动的角速度很小,所以可不予考虑(进动运动周期是 26000 年,章动摆动周期在幅角不超过 $9.2''$ 时是 18.6 年)。如只考虑地球的昼夜旋转,这种旋转实际上是均匀的,旋转一周的时间是 23h 56min 4s,故旋转角速度为:

$$\Omega = \frac{2\pi}{(23 \cdot 60 + 56) \cdot 60 + 4} = 7292 \cdot 10^{-5} \text{1/s}$$

如果在惯性地心坐标系中研究火箭和弹丸的运动,地球的昼夜旋转对其飞行的影响便容易观察到。设在射击(发射)瞬时火箭的相

对运动初速为 V_0 ，则绝动运动的初速是 $V_{a0} = V_0 + V_{nep,0}$ ，式中 $V_{nep,0}$ ——火箭的牵连速度，该速度取决于地球的牵连旋转角速度 Ω 和射击阵地位置处的地理纬度（在此和以下文中，绝对运动的质心弹道诸元都将用下标“a”表示）。

显然 $V_{nep,0} = \Omega r_0 \cos \varphi_{r0}$ ，式中 r_0 ——射击阵地距假设地球中心间的距离； φ_{r0} ——射击阵地位置处相对于地心的纬度。

在两极处， $V_{nep,0} = 0$ ；在赤道处 $V_{nep,0} \approx 1674 \text{ km/h} (465 \text{ m/s})$ 。

由于地球相对于极轴的旋转是自西向东，因而向东方向发射时 $V_{a0} > V_0, \theta_{a0} < \theta_0$ ；向西方向（逆地球旋转）发射时， $V_{a0} < V_0, \theta_{a0} > \theta_0$ （图 1.13）。

在自由飞行的条件下，对“面对面”类型的火箭的绝对运动弹道，在第一次近似中，即在均质分布的球体地球模型的情况下将是一条平面曲线，并且该平面在空间的位置保持不变。同时，由于地球的旋

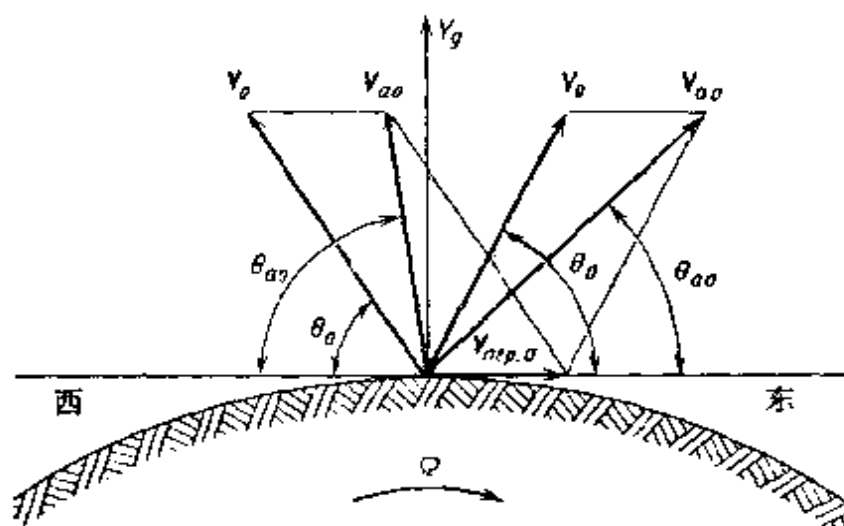


图 1.13 火箭的绝对初速与其发射方向的关系

转，目标在惯性空间中的位置是变化的，在火箭飞行的全部时间内，目标位置的变化量为

$$\Delta L_u = \Omega R_s t_n \cos \varphi_u \quad (1.53)$$

式中， ΔL_u ——目标沿经线的位移， t_n ——火箭飞行的全部时间；

φ_u ——目标相对地心的纬度，它在地球旋转过程中保持不变。

“面对面”类型的火箭（弹丸）的发射位置和下落位置都位于地球上，对火箭飞行的观测是由安置在地面上的观测站来完成的。因此通常是在与地球固连的即在作相对运动的坐标系中进行火箭和弹丸

运动的弹道计算。采用地心惯性坐标系 $O_0X_0Y_0Z_0$ 和与地球固连的地心坐标系 $O_0X_0Y_0Z_0$, 其中 O_0Y_0 轴和 O_0Y_0 轴与 Ω 矢量重合, 建立发射初始条件在绝对和相对运动中的关系。

火箭在第一坐标系中的运动是绝对运动而在第二个坐标系中的运动是相对运动。为了在惯性坐标系中确定火箭的位置, 通常利用球面坐标 $r_0, \varphi_{00}, \lambda_0$, 而在与地球固连的坐标系中可利用 r, φ_{01}, λ 。在绝对和相对运动中, 相应的经度关系按下式确定:

$$\lambda_0 = \lambda + \Omega t \quad (1.54)$$

确定火箭质心相对运动弹道的初始条件为: $t = t_0$ 时有 $r_0, \varphi_{00},$

1. 初速 V 射角 A (图 1.14) 和初速在母线与发射点 P 处的球切面

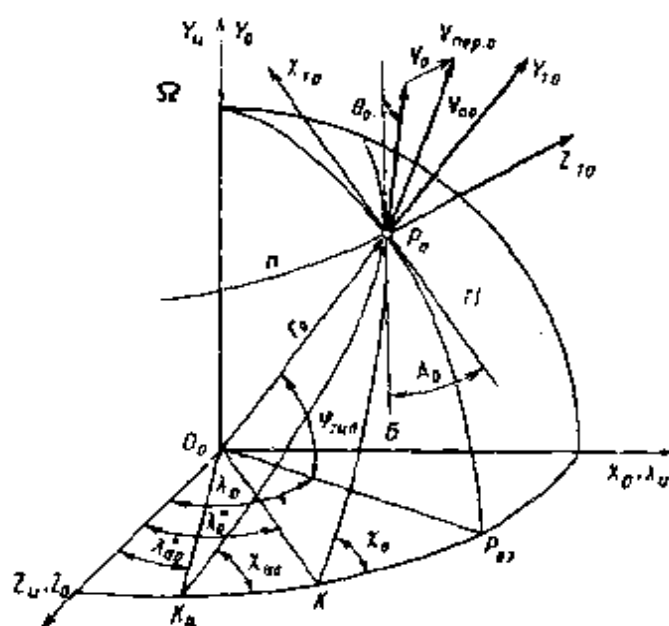


图 1.14 在绝对和相对运动中，
初始射角的确定

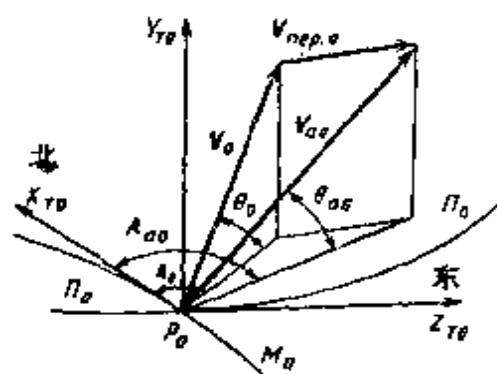


图 1.15 在绝对和相对运动
中，初速矢量、方位角
和射角之间的关系

$$V_0 \cos \theta_0 \cos A_0 = V_{a0} \cos \theta_{a0} \cos A_{a0};$$

$$V_0 \cos \theta_0 \sin A_0 + \Omega r_0 \cos \varphi_{ru0} = V_{a0} \cos \theta_{a0} \sin A_{a0} \quad (1.57)$$

由第一等式可得绝对运动的射角

$$\theta_{a0} = \arcsin \left[\frac{V_0}{V_{a0}} \sin \theta_0 \right] \quad (1.58)$$

由第二等式得射击方位角

$$A_{a0} = \arccos \left[\frac{V_0}{V_{a0}} \cdot \frac{\cos \theta_0 \cos A_0}{\cos \theta_{a0}} \right] \quad (1.59)$$

由第三等式，经过变换，可得到计算初速的公式

$$V_{a0} = \sqrt{V_0^2 + 2V_0 \Omega r_0 \cos \varphi_{ru0} \cos \theta_0 \sin A_0 + \Omega^2 r_0^2 \cos^2 \varphi_{ru0}} \quad (1.60)$$

再回到图 1.14，由球面直角三角形 \$K_a P_0 P_{a0}\$，求得绝对运动的发射面 (\$\phi_a\$) 相对于赤道平面的倾斜度。

$$\cos \chi_{a0} = \cos \varphi_{ru0} \sin A_0 \quad (1.61)$$

中心线的经度

因为 Ω 和 V_{y0} 共线, 所以 $a_{koy0} = 0$ 。

当要确定 a_{koy} 在空间的方向时, 也可以利用茹科夫斯基 (ЖУКОВСКИЙ) 法则。按该法则, 把矢量 V 在赤道平面上的投影 V_0 向牵连旋转方向转 $\frac{\pi}{2}$ 角就决定了 a_{koy} 的方向。当沿子午线从北半球向南发射时, 矢量 a_{koy} 将指向东并且和纬度线的切线共线, 直到当矢量 V 在赤道面上的投影方向指向地球中心为止。当 V 在赤道面上的投影方向刚指向地球中心时, 矢量 a_{koy} 就转为指向西方 (图 1.18)。显然, 由于牵连惯性力和科氏惯性力的作用 (当然还有其它一些因素), 火箭相对运动弹道将是双曲率线的, 即在运动中火箭将相对于射击平面向侧面偏移。

如果把牵连 (离心) 加速度和地球引力加速度合成为一般的自由下落加速度 (参看 1.2.2 节), 则科氏加速度就是火箭在相对运动中考虑了地球旋转影响的单独因素。对于地球的椭球体模型, 当飞行器的相对速度在赤道面上的投影 $V_0 = 1000\text{m/s}$ 时, 科氏加速度的最大值约等于自由落体加速度的 1.5%。计算表明, 只有当射程大于 10000m 时, 才要适当地考虑地球旋转对弹丸飞行的影响。

§ 1.3 大气及其特性

1.3.1 大气的构成

大气的基本物理参数有空气密度、温度、大气压力、湿度、声速和风等, 它们是影响火箭和弹丸运动特性的重要参量。为了研究大气的状况, 建立了遍布于全世界的气象台网, 借助于安装在探空气球、无线电探空仪、专门配备的飞机、气象火箭和地球卫星上的气象仪器进行研究。并将测量的结果进行科学的整理和综合。

包围地球的大气, 在化学成份上主要是氮气和氧气。其中氮气的含量约占 76%, 氧气约含 21%, 水蒸气、二氧化碳、氢气和其它一些气体约占 3%。建立大气的按层分类的一些原则, 是众所周知的按空气的成分来分的。大气可分为均质层和非均质层, 在延伸到约

95000m 高度处的均质层中,空气的成份几乎不随高度而变化。

在非均质层中,氮、氧及其它气体在太阳的紫外线辐射作用下将分解并处于游离状态之中。

由于空气的温度是决定大气状态特征的基本参量,所以在弹道学中最感兴趣的是按照温度随高度的分布特性来建立大气结构图。在地球的这个大气结构图上,大气分成五个称之为圈的基本层。

底层为对流层,在中纬度上向上延伸到约 11000m 高度处,而在赤道附近区域将延伸到约 16000m 高处。对流层的高度与一年的四季有关,夏天增高,冬季降低。对流层包含有大气全部质量的 75% 和水蒸气的主要部分,在对流层内形成了所有的天气现象。对流层的特点是气温随高度的增加而下降;但在冬季和在夏季的晴朗寒冷的夜晚以后可以观察到温度的逆转,在这种情况下,温度随高度的变化先是增加,后来又下降。在对流层的相当大的范围内存在着水平和垂直方向的空气流动,也就是风。水平的风是由于地球表面上不同区域的气压差引起的,垂直风是由随高度的温度差引起的。

第二层是同温层。在中纬度上约从 11000m 延伸到约 50000m 高处,平均约在 30000m 高度以后,同温层的特点是温度不变。到更高处,当接近同温层的上边界处,温度增加。在这里,存在着一昼夜和各昼夜之间的相当大的温度变化。对流层和同温层之间的温度梯度变化,发生在相当窄的所谓亚同温层内。亚同温层的厚度在数百米到约 2000m 之间变化。在相当窄的亚同温层内,可观察到强大的空气质量从西向东的流动,这就是所谓的西风急流,其流动速度约可达到 110m/s(400km/h)。大气中急流区域的特点是,在垂直和水平方向上有很大的速度梯度。

散逸层位于同温层之上,该层约从 50000m 高处延伸到约 90000m。该层特点是,直到上层的边界,温度随高度而降低,并且紊流度逐渐增加。

电离层是介于 90000~500000m 间的大气层,该层特点是热力学温度不断增加,在 400000~500000m 高度的电离层的上层部分,空气的热力学温度约可达到 1500K。

从高度 500000m 到大气层外界,也就是约到 2000000 ~ 3000000m 的大气层称为外大气层,在外大气层中空气十分稀薄。以上所述的各层之间的过渡层相应地称为亚同温层、亚散逸层、亚电离层。

1.3.2 标准大气

研究表明,大气物理参数的变化在很大程度上取决于气候条件、一年中的季节及高度。例如至高度 5000m 内的大气层中占了空气总质量的 50%,而至高度 20000m 内的大气层中,约占空气总质量的 95%。弹道计算是在与实验资料统计平均值相符合的标准气象条件或标准大气下进行的。气象条件对于其标准值的偏差将在修正理论中单独考虑。

1920 年以前,在俄国使用的气象条件,是通过对莫斯科地区的贴近地面的气象资料整理得出的。1920 年采用了国际标准大气(MCA)。在 1927 年,为了炮兵的应用引入了标准炮兵大气(HAA)。1949 年颁布了详细的标准大气表(ГОСТ 4401—4B)。随着航空和火箭技术的发展,产生了研究大气上层的必要性和技术可能性,到 50 年代末期,已经积累了大量的实验资料,这些资料使得苏联科学院协调委员会有可能发表新的标准大气方案。最初被采用的是临时标准大气 BCA—60,后来采用的是 CA—64 或简写为 CA 的标准大气,而现在使用的是与 ГОСТ4401—81 相应的 CA—81 标准大气。

标准大气的作用是用于飞行器的计算和设计,用于地球物理学和气象学观测结果的分析,用于把飞行器的试验结果与其诸元换算到同一条件下。在 CA—81 中规定的大气参数标准值是:在高度 2000m 到 50000m 范围内,看作是地理高度(h)和位势高度(H)的函数;在高度 50000m 到 80000m 范围内推荐采用惯用值;在高度 80000m 到 120000m 范围内给出了参考值。相对于国际宇宙空间研究委员会(КОСНАР)的国际平均参考大气(CIRA—1972)来说,该参考值是过渡性的。

在气象学中重力位势高度是通过“位势”来表示的。为了便于大

气压力分布的研究,在计算公式中引入位势高。位势表征了位于给定
点上的单位质点的重力势能 $\Phi(x, y, z)$ 。对应于方程 $\Phi(x, y, z) = \text{常数}$
的平面称为等位势面或等重力势能面。要使单位质量的物体从具
有位势 Φ_1 的平面移动到相近的具有位势 Φ_2 的平面,必须做单位功:

$d\Phi = g(h)dh$ 。由于 $\Phi_2 = \Phi_1 + d\Phi$, 积分可得 $\Phi = \int_0^h g(h)dh$ 。用标准
(即对应于零高度的)自由落体加速度 g_c 去除 Φ , 得到具有长度因次
的重力位势高度。

$$H = \frac{\Phi}{g_c} = \frac{1}{g_c} \int_0^h g(h)dh \quad (1.67)$$

为了确定重力位势高度和几何高度之间的关系,必须首先确定
出函数 $g(h)$ 。在 CA - 81 标准大气中,当不计离心加速度并取地球
为球体模型时,它可按式计算:

$$g = g_c \left[\frac{R_{s,c}}{R_{s,c} + h} \right]^2$$

式(1.67)的右端积分后,可得

$$H = \frac{R_{s,c}h}{R_{s,c} + h} \text{ 和 } h = \frac{R_{s,c}H}{R_{s,c} - H} \quad (1.68)$$

在计算相应于 CA 表的参数时,取 $R_{s,c} = 6356766\text{m}$ 。

根据大气铅直平衡的假设可确定出压力随高度的变化公式。按
这个假设,厚为 dh ,底面积为一个单位的空气微元的重量与作用
于该层上、下面的压力差 dp 相平衡。即有公式

$$dp = -g\rho dh \quad (1.69)$$

利用理想气体的状态方程

$$p = \frac{\rho RT}{M} \quad (1.70)$$

式中, R ——普适气体常数; M ——空气的摩尔质量。94km 以下空气
的摩尔质量为常数,并有关系 $R/M = R^*$, 式中 R^* ——比气体常数。
那么

$$p = \rho R^* T \quad (1.71)$$

根据 CA - 81 标准大气中温度的变化特点,沿高度可以分成数
层。在每一层中,温度近似为重力位势高度的线性函数

$$T = T_* + \beta(H - H_*) \quad (1.72)$$

式中, $\beta = dT/dH$ ——沿重力位势高度的温度梯度; T_* 和 H_* ——相应层底部的温度和重力位势高度。利用方程(1.69), (1.70), (1.71) 并对方程(1.69) 积分, 对于同温层($\beta = 0$) 可以得到

$$\ln\left[\frac{p}{p_*}\right] = -\frac{g_c}{R_* T_*}(H - H_*) \quad (1.73)$$

或者

$$p = p_* \exp\left[-\frac{g_c}{R_* T_*}(H - H_*)\right] \quad (1.74)$$

对于温度按线性变化的层($\beta \neq 0$)

$$\ln\left[\frac{p}{p_*}\right] = \ln\left[\frac{T_* - \beta(H - H_*)}{T_*}\right]^{-\frac{g_c}{R\beta}}$$

或者

$$p = p_* \left[1 + \frac{\beta}{T_*}(H - H_*)\right]^{-\frac{g_c}{R\beta}} \quad (1.75)$$

再根据状态方程确定空气密度

$$\rho = p/(R_* T) \quad (1.76)$$

而比重为

$$\gamma = \rho g \quad (1.77)$$

声速为

$$a = \sqrt{\frac{kRT}{M}} = 20.046796 \sqrt{T} \quad (1.78)$$

式中, $k = c_p/c_v = 1.4$ ——绝热指数。

根据上面推导的公式可以计算出大气基本特征量的表: 温度(T, K 和 $t, ^\circ C$) 压力 p (帕斯卡和毫米汞柱)、空气密度、自由落体加速度、声速, 同样还能导出相对量 p/p_c 、 ρ/ρ_c 和其它一些量。下标“ c ”表示平均海平面(零高度)的特征量值。表 1.7 给出了 CA-81 标准大气中部分温度梯度值。

图 1.19^①给出了温度随几何高度的变化关系。

① 原文无此图, 此处为译者补上的图。——译者

表 1.7 温度系数

H_0/km	T_0/K	$\beta/\text{K} \cdot \text{km}^{-1}$
-2	301.15	-6.5
0	288.15	-6.5
11	216.65	0.0
20	216.65	1.0
32	288.65	2.8
47	270.65	0.0
51	270.65	—

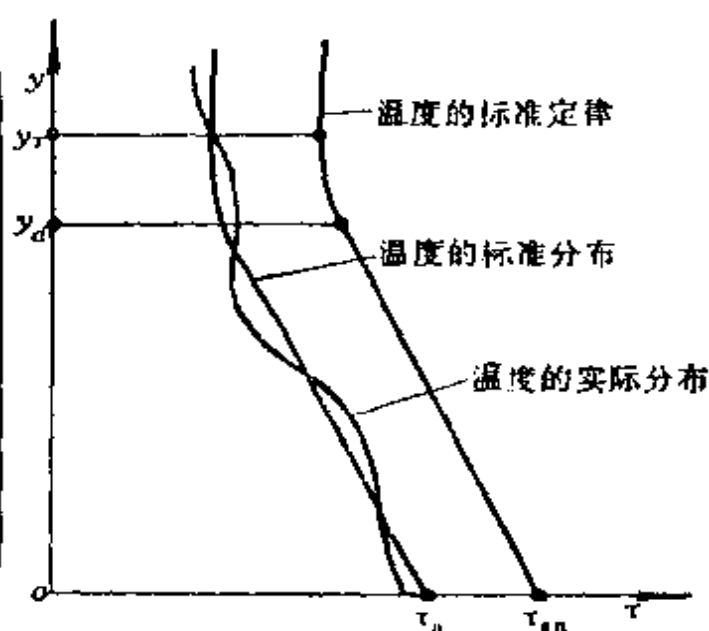


图 1.19 温度随高度的变化

为了考虑空气的湿度,习惯上用条件温度即虚温 τ 代替实际的温度 T ,由此可得计算空气比重和压力的简化关系式。对于干空气的比重 $\Pi = \rho g$ 。由(1.71)式可得①

$$\Pi = p/RT \quad (1.79)$$

如果以毫米汞柱高代替测量的大气压(单位为帕斯卡)并用 h 表示,因 $p = \frac{10333}{760}h = 13.6h$,则相应地有比重与汞柱高压力的关系

$$\Pi = 13.6 \frac{h}{RT} \quad (1.80)$$

湿空气的压力 h 可以用干空气压力 $h_{c,B}$ 和水蒸气分压力 e 两部分之和来确定,即

$$h = h_{c,B} + e \quad (1.81)$$

在单位容积(m^3)内,湿空气的比重可用类似的关系式求得,即

$$\Pi = \Pi_{c,B} + \Pi_e \quad (1.82)$$

实际上,可以足够准确地认为,在相同的压力、温度下,水蒸气的密度等于干空气密度的 $\frac{5}{8}$,故有

① 以下文中改用 $R = R^*/g$ 表示空气气体常数。——译者

$$\Pi_e = \frac{5}{8} \cdot 13.6 \frac{e}{RT} \quad (1.83)$$

最后可得

$$\Pi = 13.6 \frac{h}{RT} \left[1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{e}{h} \right] \quad (1.84)$$

在弹道计算中,为考虑空气湿度,可引入所谓的“虚温”

$$\tau = \frac{T}{1 - \frac{3}{8} \cdot \frac{e}{h}} \quad (1.85)$$

今后,我们将以特征量 h 、 Π 和 τ 表示的假定干空气来代替以 h 、 Π 、 T 和 e 表示的真实湿空气。这种假定的干空气对在其中运动的弹丸作用阻力和真实空气是一样的。引入 τ 后,比重和密度有如下关系式:

$$\Pi = 13.6 \frac{h}{R\tau} \quad (1.86)$$

$$\rho = 13.6 \frac{h}{gR\tau} \quad (1.87)$$

压力和密度值可按公式 $h = h_{0N} e^{-\frac{1}{R} \int_0^y \frac{dy}{\tau}}$ 和据式(1.79) 得出的如下公式计算:

$$\Pi = 13.6 \frac{h_{0N}}{R\tau} e^{-\frac{1}{R} \int_0^y \frac{dy}{\tau}} \quad (1.88)$$

如果拿这个比重去除地球表面上空气的标准比重,那么能得到比重随高度变化的无量纲函数。在地球表面处有

$$\Pi_{0N} = 13.6 \frac{h_{0N}}{R\tau_{0N}} \quad (1.89)$$

则

$$\frac{\Pi}{\Pi_{0N}} = \frac{\tau_{0N}}{\tau} e^{-\frac{1}{R} \int_0^y \frac{dy}{\tau}} \quad (1.90)$$

相应地可写出气压比的关系式:

$$\frac{h}{h_{0N}} = e^{-\frac{1}{R} \int_0^y \frac{dy}{\tau}} \quad (1.91)$$

对于线性关系 $\tau = f(y)$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{h}{h_{0N}} &= \pi(y) = \left[\frac{\tau}{\tau_{0N}} \right]^{\frac{1}{RG_1}}; \\ \frac{\Pi}{\Pi_{0N}} &= H(y) = \pi(y) \frac{\tau_{0N}}{\tau} \end{aligned} \quad (1.92)$$

对于复杂的温度关系 $\tau = f(y)$, 公式(1.88) 右端部分的积分就

要选择一种数值方法来处理。

在解决许多弹道实际问题时,例如在弹道设计时,为了计算密度随高度变化的无量纲函数关系,可方便地利用如下一些经验公式:

$$\text{B. II. 维特钦金公式: } H(y) = \frac{2000 - y}{2000 + y} \quad (1.93)$$

$$\text{线性公式: } H(y) = 1 - ky \quad (1.94)$$

$$\text{双曲线公式: } H(y) = \frac{1}{1 + ky} \quad (1.95)$$

$$\text{指数公式: } H(y) = e^{-ky} \quad (1.96)$$

在所有的这些公式中, y 的单位用米,后三式中系数 $k = 0.0001$ 。

§ 1.4 空气动力及其力矩

1.4.1 空气阻力矢量和由它产生的力矩

火箭或弹丸在大气中飞行时,作用在其上的空气阻力称为空气动力。

总空气动力 R_A 是由飞行器表面上的法向空气压力和切向摩擦力组成的, R_A 在飞行器上的作用点称为压力中心(见图 1.20),通常压力中心与飞行器质心并不重合,所以力 R_A 相对于质心将产生力矩 M 。作用在火箭质心上的力 $R'_A (= R_A)$ 称为

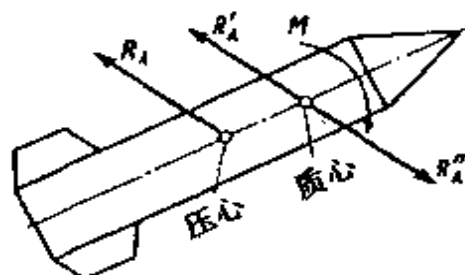


图 1.20 空气动力向火箭质心分解的示意图

空气动力,而力矩 M 称为总空气动力矩。空气动力的主要作用是降低火箭的飞行速度,力矩 M 的作用是引起火箭围绕质心的旋转运动。研究飞行器与空气绕流间相互作用及伴随现象的一门科学称为空气动力学^[57]。

本书只介绍一些在外弹道中实际应用的主要空气动力和力矩的计算公式。

计算空气动力 R_A 的一般公式为

$$R_A = q S c_R(M, R_e, \alpha, \beta) \quad (1.97)$$

式中, $q = \rho V^2/2$ ——未扰动来流的速度头; S ——火箭的特征面积; c_R ——无量纲空气动力系数, 主要取决于火箭的外形, 马赫数 $Ma = V/a$, 雷诺数 $Re = Vd\rho/\mu$, 攻角 α 和侧滑角 β 。

在计算 R_A 时, 如果必须要考虑角 α 和 β 随时间的变化, 或者必须考虑火箭相对某坐标轴 i_r 的角速度 ω_i 时, 也即要考虑环绕火箭壳体的空气流不稳定时, 则在公式 (1.97) 中的函数 c_R 中还必须引进变量 $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \omega_i$ 和时间 t 。总空气动力矩由下式确定

$$M = qSlm \quad (1.98)$$

式中, l ——火箭的特征长度 (例如火箭从其底部到圆锥体顶部的长度); m ——无量纲空气动力矩系数, 它取决于火箭的外形, 火箭在弹道上的位置、转速、时间和其它一些因素。

1.4.2 总空气动力和总空气动力矩的各分量

利用类似式 (1.97) 和 (1.98) 的形式, 可以确定 R_A 和 M 的各个分量。力 R_A 的投影可用如下各种形式表示: 在固连坐标系 $OXYZ$ 各轴上, X ——轴向空气动力 (并用该符号表示), Y ——法向空气动力, Z ——侧向空气动力, 在速度坐标系 $OX_aY_aZ_a$ 各轴上, X_a ——迎面阻力 (并用该符号表示), Y_a ——升力, Z_a ——侧向力; 在与空间攻角相固连的坐标系 $OX_\alpha Y_\alpha Z_\alpha$ 的各轴上相应地记为 $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$ 。总空气动力矩在速度和固连坐标系的各轴上的投影, 有如下表示方法: 在固连坐标系的轴上, M_x ——滚转空气动力矩, M_y ——偏航空气动力矩, M_z ——俯仰空气动力矩; 在速度坐标系的各轴上相应地为 $M_{x_a}, M_{y_a}, M_{z_a}$, 且它们具有同样的定义名称。

由于 M 投影的定义名称相同, 故必须注明其投影是属于哪个坐标系的。

在空气动力的计算中, 比较方便的不是讨论力与力矩的分量, 而是它们的系数。对于固连坐标系, 根据式 (1.97) 和式 (1.98) 可以相应地写出:

$$\begin{cases} X = qSc_x & M_x = qSlm_x \\ Y = qSc_y & M_y = qSlm_y \\ Z = qSc_z & M_z = qSlm_z \end{cases} \quad (1.99)$$

式中, $c_x, c_y, c_z, M_x, M_y, M_z$ 为力和力矩相对应的无因次系数。

在速度坐标系中, R_A 和 M 的分量也可以按照类似于公式(1.99)的形式确定, 只是力、力矩及其系数用带有脚注“a”的符号表示。系数的名称是由它们所决定的力和力矩的名称来命名。例如, c_{x_a} ——迎面阻力系数; c_x ——轴向力系数; m_{x_a} ——速度坐标系下的俯仰力矩系数; m_x ——固连坐标系下的俯仰力矩系数。

在进行弹道计算和风洞实验时, 所有空气动力系数都是在某一个坐标系下确定的。借助方向余弦矩阵可以将它们向另一些坐标系变换。

空气动力值与空气动力系数值的区别在于 qS , 而力矩值与力矩系数值的区别在于 qSl 。因此, 气动力系数和力矩系数从一个坐标系向另一坐标系进行换算的公式与力及力矩本身的换算公式是一样的。

在运动不稳定的情况下, 力和力矩的空气动力系数不仅取决于上面式(1.97)所提到的基本参量, 而且还取决于不稳定绕流的特征。例如, 升力和侧向力系数可写成如下的函数关系:

$$\begin{aligned} c_y &= f(\alpha, \beta, M, Re, \dot{\bar{\alpha}}, \dot{\bar{\beta}}, \bar{\omega}_{x_0}, \bar{\omega}_{y_0}, \bar{\omega}_{z_0}, t, \dots); \\ c_z &= f(\alpha, \beta, M, Re, \dot{\bar{\alpha}}, \dot{\bar{\beta}}, \bar{\omega}_{x_0}, \bar{\omega}_{y_0}, \bar{\omega}_{z_0}, t, \dots) \end{aligned} \quad (1.100)$$

式中, $\bar{\omega}_{x_0}, \bar{\omega}_{y_0}, \bar{\omega}_{z_0}$ ——飞行器相对于静止的地面坐标系各轴的无因次旋转角速度; $\dot{\bar{\alpha}}, \dot{\bar{\beta}}$ ——飞行器相对速度系的无因次摆动角速度; M ——马赫数; Re ——雷诺数。

无因次角速度是无因次量, 有关系式

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\alpha}} &= \dot{\alpha} \frac{l}{V} & \dot{\bar{\beta}} &= \dot{\beta} \frac{l}{V}; \\ \bar{\omega}_{x_0} &= \omega_{x_0} \frac{l}{V} & \bar{\omega}_{y_0} &= \omega_{y_0} \frac{l}{V} & \bar{\omega}_{z_0} &= \omega_{z_0} \frac{l}{V} \end{aligned} \quad (1.101)$$

空气动力矩可以表示成 $M_x = Y\Delta l, M_y = Z\Delta l$, 其中 Δl ——质心和压心之间的距离。

对 Y 和 Z 取类似于(1.99)和(1.100)的关系式,可以得到用相应空气动力系数表示的力矩关系式

$$M_x = qSl \frac{\Delta l}{l} c_y(\alpha, \beta, M, R_x, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dots) \quad (1.102)$$

$$M_y = qSl \frac{\Delta l}{l} c_z(\alpha, \beta, M, R_x, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dots) \quad (1.103)$$

对于空气动力矩系数,要确定出它们与所有决定因素之间的关系是很困难的。因此,通常只考虑那些对力矩产生实质性影响的主要因素。

空气动力学的研究表明,在固连坐标系中,俯仰力矩系数只限于满足如下关系式:

$$m_x = f(\alpha, \bar{\omega}_x, \bar{\alpha}) \quad (1.104)$$

公式(1.104)在马赫数变化不大时是正确的。应当注意到,当马赫数变化足够大时,曲线 $m_x(\alpha)$ 的形状将发生明显变化,这一点必须予以考虑。

现在将式(1.104)变换成便于计算的形式,考虑到全微分等于各偏微分之和,并据近似关系式: $dm \approx \Delta m_x = m_x - m_0$, 可得

$$m_x = m_{x_0} + \frac{\partial m_x}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial m_x}{\partial \bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x + \frac{\partial m_x}{\partial \bar{\alpha}} \bar{\alpha} \quad (1.105)$$

式中, m_{x_0} ——当 $\alpha, \bar{\omega}_x, \bar{\alpha}$ 都为零值时的空气动力系数。

引入 A^λ 表示力和力矩系数的偏导数,其中 A ——相应于力或力矩系数符号; λ ——对其进行求导的量的符号。例如 $c_{y_\alpha}^\alpha = \partial c_{y_\alpha} / \partial \alpha$ 表示升力系数对攻角的偏导数。

关于角度的偏导数 $m_x^\alpha = \partial m_x / \partial \alpha$ 称为静导数。关于角速度的偏导数 $m_x^{\bar{\omega}_x} = \partial m_x / \partial \bar{\omega}_x, m_x^{\bar{\alpha}} = \partial m_x / \partial \bar{\alpha}$ 称为力矩的动导数。

式(1.105)采用简化记法后,得

$$m_x = m_{x_0} + m_x^\alpha \alpha + m_x^{\bar{\omega}_x} \bar{\omega}_x + m_x^{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} \quad (1.106)$$

类似于俯仰力矩系数的表示方法,可得偏航力矩系数的公式

$$m_y = m_y^\beta \beta + m_{y^x}^{\omega_x} \bar{\omega}_x + m_{y^y}^{\omega_y} \bar{\omega}_y + m_y^{\bar{\beta}} \bar{\beta} \quad (1.107)$$

式中, $m_y^\beta = \partial m_y / \partial \beta$ 为静导数

$$m_{y^x}^{\omega_x} = \partial m_y / \partial \bar{\omega}_x;$$

$$m_{y^y}^{\omega_y} = \partial m_y / \partial \bar{\omega}_y, \quad m_y^{\bar{\beta}} = \partial m_y / \partial \bar{\beta} \text{ —— 旋转导数。}$$

当 $\beta, \bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\beta}$ 为零值时空气动力系数 $m_{y_0} = 0$, 因此 m_{y_0} 没包括在公式(1.107)中。

在以上写出的公式中含有角速度 $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 和 $\bar{\omega}_i$ 的项是描述空气滞止飞行器摆动和旋转的空气动力, 这种滞止使转动位移减小(衰减)。因此旋转导数也可以称为阻尼导数。

在滚转空气动力矩 $M_x = qSlm_x$ 中, 当马赫数不变时, 无量纲系数 m_x 可写成如下函数关系式:

$$m_x = f(\alpha, \beta, \bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z) \quad (1.108)$$

考虑到各参量之间的互相影响时, 滚转空气动力矩系数可展开成一般形式:

$$m_x = m_{x_0} + m_x^\beta \beta + \frac{\partial^2 m_x}{\partial \alpha \partial \beta} \alpha \beta + m_{x^x}^{\omega_x} \bar{\omega}_x + m_{x^y}^{\omega_y} \bar{\omega}_y + \frac{\partial^2 m_x}{\partial \alpha \partial \omega_y} \alpha \bar{\omega}_y + \frac{\partial^2 m_x}{\partial \beta \partial \omega_x} \beta \bar{\omega}_x \quad (1.109)$$

式中, m_{x_0} —— 由飞行器空气动力不对称性引起的滚转空气动力系数分量; $m_x^\beta \beta$ —— 由侧滑角引起的分量; $\frac{\partial^2 m_x}{\partial \alpha \partial \beta} \alpha \beta$ —— 由攻角和侧滑角相互影响而引起的滚转力矩系数分量; $m_{x^x}^{\omega_x} \bar{\omega}_x$ —— 由侧翼和尾翼产生的滚转阻尼力矩系数; $m_{x^y}^{\omega_y} \bar{\omega}_y, \frac{\partial^2 m_x}{\partial \alpha \partial \omega_y} \alpha \bar{\omega}_y, \frac{\partial^2 m_x}{\partial \beta \partial \omega_x} \beta \bar{\omega}_x$ —— 由飞行器围绕轴 OY 和 OZ 旋转时产生的螺旋力矩分量。在式(1.109)中不包含相对于角 α 和 β 的高阶项。

由式(1.109)可看出滚转空气动力系数在一定程度上取决于所谓的交叉空气动力导数。对于带扩展升力面的飞行器, 当其绕自身纵轴倾斜和旋转时, 纵向运动和横向运动的相互影响表现得很强。空气动力特征点可按如下方法选取: 对攻角而言的焦点 —— 位于固连坐

标系 OX 轴上,当攻角变化很小时,相对于该点的俯仰空气力矩保持常数,即 $\partial m_z / \partial \alpha = 0$ 。 OX 轴的方向可这样选择,当攻角为零时飞行器的升力也趋于零,对侧滑角而言的焦点位置取决于等式 $\partial m_y / \partial \beta = 0$ 和 $\partial m_x / \partial \beta = 0$ 。对俯仰控制机构舵偏角而言的焦点位置取决于 $\partial m_z / \partial \delta_H = 0$ 。而对控制偏航的舵偏角而言的焦点——取决于 $\partial m_y / \partial \delta_H = 0$ 和 $\partial m_x / \partial \delta_H = 0$ 。

在有些情况下总空气动力矩可表达成和的形式

$$M = M_{CT} + M_g \quad (1.110)$$

式中, M_{CT} ——稳定或者翻转力矩; M_g ——阻尼力矩。 M_{CT} 的意义取决于其对攻角 α 和侧滑角 β 的作用特征。如果力矩使这两角增加,则称其为翻转力矩,若使它们减小——稳定力矩。当飞行器对于质心摆动时,阻尼力矩 M_g 的方向与旋转方向相反,它力图阻滞(制止)火箭的摆动和旋转。

阻尼力矩可以由以下表达式确定:

$$M_g = qSl \left| m_{\bar{\omega}_i}^{\bar{\omega}_i} \right| \frac{\bar{\omega}_i l}{V} = qSl \left| m_{\bar{\omega}_i}^{\bar{\omega}_i} \right| \bar{\omega}_i \quad (1.111)$$

式中, $m_{\bar{\omega}_i}^{\bar{\omega}_i}$ ——相应的旋转角速度的阻尼力矩系数导数。

在有些情况下阻尼力矩可表示成飞行角速度的一次方形式:

$$M_w = qSl \left| m_{\bar{\omega}_i}^{\bar{\omega}_i} \right| \bar{\omega}_i = S\rho V l^2 \left| m_{\bar{\omega}_i} \right| \omega_i \quad (1.112)$$

式中 $m_{\bar{\omega}_i}$ 称为阻尼系数,它等于 $m_{\bar{\omega}_i} = \frac{1}{2} m_{\bar{\omega}_i}^{\bar{\omega}_i}$ 。在解决空间运动问题时,阻尼系数应该按三个固连轴确定 ($m_{\bar{\omega}_x}, m_{\bar{\omega}_y}, m_{\bar{\omega}_z}$)。飞行器的阻尼系数和阻尼力矩可看作飞行器基本结构部件的相应系数之和。例如为了求飞航式火箭相对于 OZ 轴的阻尼力矩,可以把尾翼、侧翼、弹体的阻尼力矩之和确定为总的阻尼力矩。对于不带凸起平板,即无弹翼和尾翼的火箭或弹丸,其弹身的阻尼系数将按赤道轴确定成一个系数,而阻尼力矩的差别将取决于 ω_x 和 ω_y 值的不同。

在火箭(尾翼式弹丸)未扰动平衡飞行过程中,攻角和侧滑角将发生平稳的变化,此时正如许多研究所证明的,角速度对总空气动力矢量及其分量影响很小。因此对于升力和侧力的空气动力系数与完整函数关系式(1.100)中的角速度无关,但是空气动力矩系数将与

角速度有关。为了使计算简化,当 α 和 β 很小时认为升力与侧力是无关的。可得到简化公式:

$$c_y = c_{y_0} + c_y^a \alpha \quad (1.113)$$

$$c_z = c_z^b \beta \quad (1.114)$$

$$i = \frac{c_{x_a}(V/a)}{c_{x_{a^*T}}(V/a)} \quad (1.121)$$

式中, $c_{x_a}(V/a)$ ——新设计物体的未知空气动力系数; $c_{x_{a^*T}}(\frac{V}{a})$ ——与所设计弹丸相似的、并且被选定作为标准的弹丸的已知空气动力系数。

如对于某一组火箭(或弹丸), 已知 $c_{x_{a^*T}}(V/a)$, 那么对于任一空气动力外形与之相近的火箭, 可以采用下式计算阻力:

$$X_a = \frac{\rho V^2}{2} S i c_{x_{a^*T}}(V/a) \quad (1.122)$$

如果一组火箭(弹丸)的形状和飞行条件不是完全相似, 那么显然 $i \neq 1$, 并且形状系数还取决于比值 V/a 。在这种情况下对于新设计的弹丸要用实验的方法或在计算出理论值 $c_{x_{a^*T}}(V/a)$ 后才能较准确地确定出形状系数。此时将失去引入形状系数 i 的意义。因此通常采用 i 的近似值, 并假定在计算给定弹道时它是常量。

i 的数值取决于新设计对象的外形和与其相比较的已知飞行器(火箭, 弹丸)的 $c_{x_{a^*T}}(V/a)$ 值, 因此, 必须说明系数 i 是根据什么标准空气阻力定律所确定的。在应用中较方便的是可以按试验射程计算出符合弹形系数 i 。此时 i 不仅考虑到弹丸形状, 而且还考虑到在该计算中没有反应出的全部因素。例如在射击时所得到的弹形系数值与标准系数值之间的区别, 以及在各种不同射击起始条件下相对质心的摆动影响等。

在方程(1.122)中包含密度 $\rho(\text{kg/m}^3)$, 如果改为比重 $\Pi(\text{H/m}^3)$ 可得:

$$X_a = \frac{\pi d^2}{8} \cdot \frac{\Pi}{g} V^2 i c_{x_{a^*T}}(V/a) \quad (1.123)$$

将方程(1.123)的右端部分分别乘以和除以 $Q\Pi_{0N} \times 10^3$ 。结果将有

$$X_a = \frac{Q}{g} \cdot \frac{id^2}{Q} \times 10^3 \cdot \frac{\Pi}{\Pi_{0N}} \frac{\pi}{8 \times 10^3} \Pi_{0N} V^2 c_{x_{a^*T}}(V/a) \quad (1.124)$$

在上面的关系式中, 积 $\frac{id^2}{Q} \times 10^3 = c$, 称为弹道系数, 而把项

$$\begin{aligned}
 F(V) &= \frac{\pi}{8 \times 10^3} \Pi_{0N} V^2 c_{x_{aST}}(V/a) \\
 &= 4.74 \times 10^{-4} V^2 c_{x_{aST}}(V/a)
 \end{aligned}
 \quad (1.125)$$

称为空气阻力函数。

经过整理可得简便的公式

$$X_a = mcH(y)F(V) \quad (1.126)$$

其中乘积 $cH(y)F(V)$ 的物理意义表示了空气阻力产生的弹丸加速度,并记作 J 。

对于火箭弹,在发动机工作段,应注意式(1.126)中的 m 和 c 是变量。并且等于

$$m = \frac{Q - \int_0^t Q_{cek} dt}{g} \quad (1.127)$$

$$c = \frac{id^2 \cdot 10^3}{Q - \int_0^t Q_{cek} dt} \quad (1.128)$$

式中, Q_{cek} ——燃料的每秒消耗量,式(1.126)经整理后,可得变质量飞行器的阻力公式:

$$X_a = \frac{id^2}{g} \times 10^3 H(y)F(V) \quad (1.129)$$

有时函数 $F(V)$ 可用下面两函数代替:

$$G(V) = F(V)/V = 4.74 \times 10^{-4} V c_{x_{aST}}(V/a) \quad (1.130)$$

或者

$$K(V/a) = F(V)/V^2 = 4.74 \times 10^{-4} c_{x_{aST}}(V/a) \quad (1.131)$$

对于形状不同的火箭(弹丸),函数 $F(V)$ 和 $G(V)$ 也不同。在进行弹道计算时弹形系数 i 应当根据所使用的函数 $F(V)$ 或 $G(V)$ 相应。对于身管武器系统发射的炮弹,根据经验可将 $F(V)$ 确定为已知标准函数,有时不完全准确地称之为空气阻力定律。

在求解弹丸飞行问题时,Л. 欧拉(Эйлер)利用了由牛顿确定的函数 $F(V) = BV^2$ 。该函数主要适用于亚声速范围。

对于高速(达 1000m/s)运动的弹丸,俄罗斯火炮专家 Н. В. 马也夫斯基(Маиевский)和 Н. А. 扎布茨基(Забудский)确立了形为

$F(V) = BV^n$ 的定律。其中 $n = f(V)$ ，并且根据所采用的速度间隔来确定 B 和 n 的值。同样，还有著名的意大利炮兵专家西亚切(Сiachчи)确定的定律，法国炮兵专家加尔涅(Гарнье)和德尤伯尤伊(Дюбуа)(1921 - 1923) 确定的定律，苏联学者确定的 1930 年定律和以捷尔任斯基命名的炮兵学院定律(1943 年定律)。

标准函数 $F(V)$ 和 $G(V)$ 的经验关系通常是以专门的表格形式给出的。

在计算中利用已有的 $F(V)$ 和 $G(V)$ 表格函数时，或当需重新计算标准表格函数时，应当注意到声速 a 与空气温度的关系。因为 $a = \sqrt{kgR\tau}$ ，其中 k ——绝热指数，所以表格函数是随高度而变化的。

如果研究的弹道相对较短($X_c \leq 50\text{km}$)，可取 $g = \text{常数}$ ，而且 k 与温度无关时，则认为声速与 $\sqrt{\tau}$ 成正比。为了使函数 $F(V)$ 或 $G(V)$ 只依赖于一个输入量，可以把声速先固定为某个值来计算它们。此时应使下面等式成立：

$$C_{x_a}(V/a) = C_{x_a}(V_\tau/a_{0N}),$$

$$\text{或} \quad V/a = V_\tau/a_{0N} \quad (1.132)$$

式中， a_{0N} ——标准条件下的声速，在计算表格函数时取常数； V_τ ——虚拟表格速度(即虚速——译者)。

显然

$$V_\tau = V \frac{a_{0N}}{a} = V \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}} \quad (1.133)$$

因此，利用式(1.125)可得

$$F(V) = 4.74 \times 10^{-4} V_\tau^2 \frac{\tau}{\tau_{0N}} C_{x_a} \left[\frac{V_\tau}{a_{0N}} \right] \quad (1.134)$$

记

$$F(V_\tau) = 4.74 \times 10^{-4} V_\tau^2 C_{x_a} \left[\frac{V_\tau}{a_{0N}} \right] \quad (1.135)$$

于是

$$F(V) = \frac{\tau}{\tau_{0N}} F(V_\tau) \quad (1.136)$$

相应地有

$$G(V) = \sqrt{\tau/\tau_{0N}} G(V_\tau) \quad (1.137)$$

比较式(1.135)和(1.137)后可得

$$G(V_\tau) = \frac{F(V_\tau)}{V_\tau} \quad (1.138)$$

当采用虚温的方法来计算空气湿度时,其比重按式(1.79)计算。此时随高度变化的空气比重函数为

$$H(y) = \frac{P}{P_{0N}} = \frac{h}{h_{0N}} \cdot \frac{\tau_{0N}}{\tau}$$

即它取决于压力和虚温的比值。如果现在返回到式(1.126),并把 $F(V)$ 和 $H(y)$ 的表达式代入,那么可得

$$X_a = mc \frac{h}{h_{0N}} F(V_\tau) \quad (1.139)$$

$$\text{或} \quad X_a = mc \pi(y) F(V_\tau) \quad (1.140)$$

如果借助式(1.137)在式(1.126)中引进函数 $G(V_\tau)$,则可得到

$$X_a = mc H_\tau(y) V G(V_\tau) \quad (1.141)$$

其中 $H_\tau(y) = H(y) \sqrt{\frac{\tau}{\tau_{0N}}}$, 该函数也同样可编成参量 y 的表格函数。

在研究炮弹的旋转运动特性时,通常可认为:这些弹丸在弹道上运动稳定的,并且弹丸纵轴与速度矢量线之间的夹角(章动角 δ , 见图 1.10) 较小;章动角 δ 平面将旋转;迎面阻力(总空气动力矢量的切向分量 R_τ) 与 δ 无关,并按 $\delta = 0$ 的情况来确定;而法向分量 R_N 和翻转力矩 M 与 δ 角成正比(见图 1.21)。考虑到如上所述的空气动力学特征,可以方便地引入弹径 d , 函数 $H(y)$ 及相应的空气动力特征数 $K_i(V/a)$ 来计算空气动力。于是可得

$$\begin{aligned} X_a = R_\tau = R_A &= \frac{id^2}{g} \times 10^3 H(y) V^2 K\left(\frac{V}{a}\right); \\ Y_a = Z_a = R_N &= \frac{dl}{g} \times 10^3 H(y) V^2 K_N\left(\frac{V}{a}\right) \delta; \\ M_y = M_z = M &= \frac{d^2 h}{g} \times 10^3 H(y) V^2 K_M\left(\frac{V}{a}\right) \delta \end{aligned} \quad (1.142)$$

空气动力特征数 $K(\frac{V}{a})$, $K_N(\frac{V}{a})$ 和 $K_M(\frac{V}{a})$ 可根据射击实验来确定。量 $h \approx \Delta l$ 对应于压力中心和弹丸质心之间的相对距离。通常

可按经验公式计算。作为例子,可以引用著名的高巴尔(Гобар)公式

$$h = h_1 + 0.57h_r - 0.16d$$

式中 h_1 和 h_r (参见图 1.21) 分别表示弹丸质心位置特征参数和其头部(圆锥形部分)的长度。对于高速旋转弹丸,还具有特有的空气动力,即马格努斯力 R_{M_u} 、马格努斯力矩 M_{M_u} 和表面摩擦力矩 Γ 。马格努斯力属于空气动力主矢量的分量。它与乘积 $\omega_x \delta$ 成正比。这个力

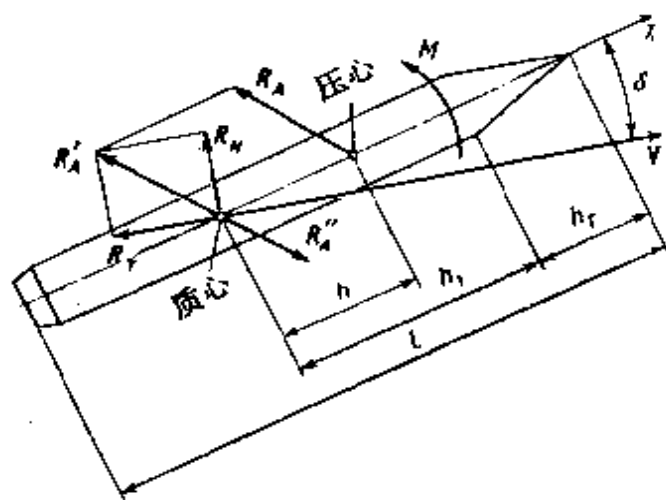


图 1.21 旋转弹丸空气动力合力对其质心的分解

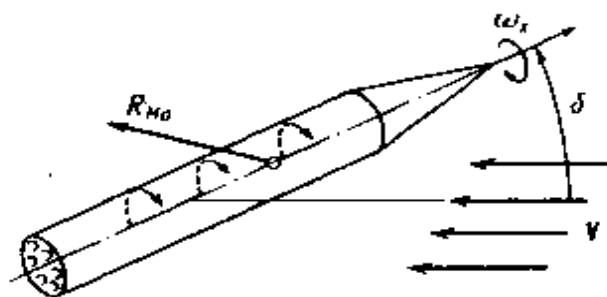


图 1.22 马格努斯力形成的示意图

产生的机理见图 1.22。当以速度 V 流向弹丸的气流微粒与随弹丸一起旋转的附面层内的空气微粒相遇时,将产生弹壁上的压力差,由于弹丸表面的压力分布改变,便形成了附加力,该力垂直于 δ 角平面并且指向使迎面气流速度增加一侧的方向。马格努斯力和力矩可以利

用以下公式来确定:

$$\begin{aligned} R_{M_a} &= \frac{d^2 l}{g} \times 10^3 H(y) V K_{M_a} \left(\frac{V}{a} \right) \omega_x \delta; \\ M_{M_a} &= \frac{d^3 l}{g} \times 10^3 H(y) V K_{I'} \left(\frac{V}{a} \right) \omega_x \delta \end{aligned} \quad (1.143)$$

式中, K_{M_a} 、 $K_{I'}$ ——由实验确定的空气动力特征数。

因为一般情况下马格努斯力矢量不通过质心,故出现马格努斯力矩。 R_{M_a} 及其力矩对弹丸质心运动的影响是比较小的。

表面摩擦力矩使弹丸相对于自身纵轴原有的旋转角速度减小,而阻尼力矩力图阻止弹丸纵轴的摆动,即减小与弹丸纵轴垂直的角速度分量。表面摩擦力矩和阻尼力矩可按下式确定

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{dl^2}{g} \times 10^3 H(y) V K_r \left(\frac{V}{a} \right) \omega_x; \\ M_n &= \frac{dl^3}{g} \times 10^3 H(y) V K_D \left(\frac{V}{a} \right) \Omega \end{aligned} \quad (1.144)$$

式中, $K_r \left(\frac{V}{a} \right)$ 、 $K_D \left(\frac{V}{a} \right)$ ——空气动力特征数; Ω ——垂直于纵轴的弹丸角速度分量。正如计算和实验所表明的那样,表面摩擦力矩 Γ 使飞行过程中的弹丸的旋转角速度减小。

在作用于炮弹的空气动力及其力矩的表达式 (1.142) ~ (1.144) 中,引入了空气动力特征函数 $K \left(\frac{V}{a} \right)$ 、 $K_N \left(\frac{V}{a} \right)$ 、 $K_{M_a} \left(\frac{V}{a} \right)$ 、 $K_M \left(\frac{V}{a} \right)$ 、 $K_{I'} \left(\frac{V}{a} \right)$ 、 $K_r \left(\frac{V}{a} \right)$ 、 $K_D \left(\frac{V}{a} \right)$ 。这些函数是在大量实际射击试验 (见 [21, 118]) 结果的基础上确定出来的。在确定这些函数的试验值时,认为章动角为小量,且认为力 R_N 、 R_{M_a} 及力矩 M 、 M_{M_a} 与 δ 角成线性关系。在章动角不可能取小量时,可以建立形如 $K_i \left(\frac{V}{a}, \delta \right) \sin \delta$ 的空气动力特征数关系。用风洞实验测定空气动力特征数时,通常用弹丸长度 l 和中部横剖面面积 $S = \pi d^2 / 4$ 作为特征长度和特征面积。此时记

$$\begin{aligned} \frac{\pi \Pi_{0N}}{8} \cdot \frac{d^2}{g} H(y) V^2 l^2 &= 47.4 \cdot 10^{-2} \frac{d^2}{g} H(y) V^2 l^2 \\ &= \varphi_1(V, y) \end{aligned}$$

$$\frac{V}{a} = M$$

力和力矩的表达式可表示为

$$\begin{aligned} R_r &= \varphi_1(V, y) l^{-2} c_T(M, \delta); \\ R_N &= \varphi_1(V, y) l^{-2} \sin \delta c_N(M, \delta); \\ R_{M_a} &= \varphi_1(V, y) (lV)^{-1} \omega_r \sin \delta c_{M_a}(M, \delta); \\ M &= \varphi_1(V, y) l^{-1} \sin \delta m_M(M, \delta); \\ M_{M_a} &= \varphi_1(V, y) \omega_r \sin \delta m_{M_a}(M, \delta); \\ \Gamma &= \varphi_1(V, y) V^{-1} \omega_r m_r(M, \delta); \\ D &= \varphi_1(V, y) V^{-1} \Omega m_D(M, \delta) \end{aligned} \quad (1.145)$$

当章动角很小 ($\sin \delta \approx \delta$; $c_i(M, \delta) \approx c_i(M)$; $m_i(M, \delta) \approx m_i(M)$), 并考虑到 $\frac{d}{l} \cdot \frac{8 \times 10^3}{\pi \Pi_{0N}} \approx 2.11 \times 10^3 dl^{-1} = \varphi_2(d, l)$ 时, 各空气动力和力矩分量的空气动力函数可以用以下各式表示:

$$\begin{aligned} c_T(M) &= \varphi_2(d, l) l d^{-1} K(M); \\ c_N(M) &= \varphi_2(d, l) d^{-2} l^2 K_N(M); \\ c_{M_a}(M) &= 2.11 \times 10^3 K_{M_a}(M); \\ m_M(M) &= \varphi_2(d, l) d^{-1} h K_M(M); \\ m_{M_a}(M) &= \varphi_2(d, l) K_l(M); \\ m_r(M) &= \varphi_2(d, l) K_r(M); \\ m_D(M) &= \varphi_2(d, l) d^{-2} l^2 K_D(M) \end{aligned} \quad (1.146)$$

§ 1.5 火箭发动机的推力

除外部空气阻力之外, 火箭发动机的反作用力和周围介质作用于其外部表面上的压力之和称为火箭发动机的推力。当物质从发动机内流出时, 作用在其内表面上的气体或液体动力之和称反作用力(火箭力)。火箭飞行过程中的推力只可能通过实验-计算的间接方法来确定。在专门的推力试验台上可以测定出静态条件下的火箭推力。在风洞中, 可以测定出考虑了包括火箭摆动引起的科氏力在内的

空气动力和燃料燃尽后火箭质心位移影响后的火箭推力。在风洞中,带发动机的火箭是用铰链固定的,以便使火箭的纵轴能实现摆动。铰链固定给火箭的外部绕流带来很大偏差,使测试结果的精度降低。若使火箭的纵轴沿着气流方向,这样空气动力中只有迎面阻力。在此情况下测出的支座上火箭的总的作用力,称其为发动机有效推力

$$P_{sp} = P - X - \frac{\delta q_{EaP}}{dt} \quad (1.147)$$

式中, P ——试验台的推力。

如果使外部来流速度等于零,那么在火箭的支座上将测定出发动机的试验台推力。

单独地测量反作用力是不可能的,因为它总是同作用于火箭纵轴方向的静压力一起被测定出来。

被固定在试验台上的火箭承受了轴向力 P' 的作用。该力等于推力,但方向与 P 相反,即 $P' = -P$ 。由火箭位置所在的相应高度上的大气压 p 所决定的作用在火箭外表面上的力,在量值上等于压强与面积的乘积,其方向垂直于作用面积。作用于火箭侧表面上所有的力互相抵消,但当发动机工作时,因为有速度为 W_{OTH} 的气体平行于火箭纵轴 OX 从喷嘴流出,所以大气压力不直接作用在喷管出口截面上,于是产生了作用于壳体上的不平衡力 pS_a ,其方向与气体流出方向一致(S_a 为喷嘴出口横截面积)。在喷嘴出口截面上作用的是相反方向的力 $p_a S_a$,其中 p_a ——该截面上从喷嘴流出气体的压强(燃气流受到的阻力)。

这样,我们可以得到适用于试验台的试验推力计算公式

$$P = \left| \frac{dm}{dt} \right| W_{OTH} + S_a(p_a - p) \quad (1.148)$$

在方程(1.148)中,记 $\left| \frac{dm}{dt} \right| = \frac{Q_{cek}}{g}$ 。可得推力表达式的另一形式

$$P = \frac{Q_{cek}}{g} W_{OTH} + S_a(p_a - p) \quad (1.149)$$

若取 $p \approx 0$,可得

$$P = \frac{Q_{cek}}{g} W_{OTH} + S_a p_a \quad (1.150)$$

如果火箭位于地球水平面上,那么对于标准地理条件, $y = 0, p = p_{0N}$ 。其推力等于

$$P_{0N} = \frac{Q_{cek}}{g} W_{OTH} + S_a(p_a - p_{0N}) \quad (1.151)$$

如果条件不同于标准条件,在 $y = 0, p = p_0$ 时。比较式(1.149)和(1.151)可得

$$P = P_{0N} + S_a p_{0N}(1 - p/p_{0N}) \quad (1.152)$$

因为 $\pi(y) = p/p_{0N}$, 最终得

$$P = P_{0N} + S_a p_{0N}[1 - \pi(y)] \quad (1.153)$$

在式(1.149)右边将 Q_{cek}/g 提到括号外,得到简化了的推力公式

$$P = \frac{Q_{cek}}{g} W_e = m_{cek} W_e \quad (1.154)$$

$$\text{式中 } W_e = W_{OTH} + \frac{S_a g}{Q_{cek}}(p_a - p) \quad (1.155)$$

该量是以法国学者 П. 郎日文(Ланжевен)的名字命名的等效排气速度。

计算表明,在式(1.155)中,第二项与第一项相比是小量,通常不超过 10% ~ 15%。因此,等效排气速度主要决定于喷嘴出口截面处的气体速度 W_{OTH} 。

如果把推力除以秒流量,那么得到确定推力比冲的公式

$$P_y = J_y = \frac{P}{Q_{cek}} \quad (1.156)$$

由式(1.149)得

$$P_y = \frac{W_{OTH}}{g} + \frac{S_a}{Q_{cek}}(p_a - p) \quad (1.157)$$

由此可见,随着火箭周围空气压力减小,推力的比冲将增大。推

当 $Q_{cek} = \text{const}$ 时得 $\int_0^{t_k} Q_{cek} dt = Q_{cek} t_k = Q_T$ 。因此

$$J_y = W_c / g \quad (1.159)$$

比较式(1.155)和(1.157),同样也能得到

$$P_y = J_y = \frac{W_c}{g} \quad (1.160)$$

§ 1.6 附加力和力矩以及控制力和控制力矩

1.6.1 附加力和力矩

附加的力和力矩可以分为两大类:外部的(空气动力的)和内部的。它们都是在飞行器作空间曲线运动和各种摆动时产生的。

对于外部附加力和力矩,通常是指各种阻尼空气动力及力矩,由于洗流和洗流的滞后所引起的空气动力和力矩是交叉的附加空气动力及力矩;对于内部附加力和力矩,通常是指决定于科氏加速度的内部阻尼力矩、由火箭壳体内部燃料和气体的位移引起的其它的力和力矩。大部分附加力和力矩决定于飞行器相对于其质心的角速度。

阻尼的和交叉的空气动力和力矩已在上面分析过了。在这里我们只列举出内部的附加力和它相对于质心的附加力矩: $P_{\text{гв}}, M_{\text{гв}}$ ——决定于火箭壳体内部气体运动的力和力矩; $P_{\text{гв, кор}}, M_{\text{гв, кор}}$ ——由于火箭摆动引起的壳体内部气体运动的科氏力及其力矩。

具有液体燃料发动机的火箭,能测试出决定于火箭壳体内部燃料运动的附加力和力矩的影响, $P_{\text{ж, т}}, M_{\text{ж, т}}$ ——决定于液体燃料沿管道流动的力和力矩; $P_{\text{ж, в}}, M_{\text{ж, в}}$ ——决定于液体燃料在贮油箱内流动的力和力矩, $P_{\text{ж, т, кор}}, P_{\text{ж, в, кор}}, M_{\text{ж, т, кор}}, M_{\text{ж, в, кор}}$ ——由于火箭摆动和液体燃料在管道和油箱内运动而产生的科氏力及力矩。此外,还有由于火箭壳体弹性变形和壳体内部各种部件(如涡轮式喷气发动机转子)的运动等而产生的力和力矩。它们可以被单独地确定出来。上面所得到的由于不稳定过程而引起的力和力矩部分可以列入变分力中,通常该分量影响较小,可不予考虑。

内部附加力和力矩对在稀薄大气层中带有喷气式发动机的飞行

器的运动有明显的影晌。在计算稳定性和进行控制时应该考虑它们。在稠密大气层中运动时,内部附加力和力矩与基本的外部附加空气动力及力矩的作用相比是不明显的,在计算时可不考虑它们。在进行飞行器质心运动特征设计计算时,附加力矩的影响通常可以忽略掉。

1.6.2 控制力和力矩

火箭和弹丸在飞行中的控制是由控制系统实现的。执行机构或控制机构是控制系统必不可少的部件,执行机构或如常说的舵面产生了控制力和力矩。按产生控制力和力矩的原理,控制装置通常分三类:空气动力学的、气体动力学的和复合式的。空气动力学的(空气的)或有时称之为飞航式控制装置只是在稠密的大气层中,当空气气流围绕飞行器运动并产生相互作用时才能工作。气体动力学的控制装置在低的或高的(宇宙空间)空气层内都能工作。因为它工作时只是依靠燃料燃烧时释放出的能量。许多被控制的对象,如火箭、飞机、弹丸、有控的鱼雷和航空炸弹,都只具有空气动力学控制机构。有些火箭具有复合式的控制机构,这类机构是由不同性能的空气动力学的和气体动力学的装置组成。空气动力学控制装置通常分为操纵面(舵面)式的,转翼式的,气流断流器(阻流片)式的。

舵面和转翼式的作用原理是:它们首先相对自己的中间位置绕飞行器的固连轴旋转,于是改变了自己在飞行过程中的攻角,从而最终改变了整个飞行器的攻角(或侧滑角)。

在建立飞行器的运动方程时,为了单独计算各控制力和力矩,必须将取决于控制装置旋转角的空气动力系数的各分量分开。例如:对俯仰舵面(高度)、偏航舵面(方向),纵向的、法向的、侧向的控制力分别等于

$$\begin{aligned} X_P &= S_P q (c_{x_p} + c_{x_p^B}^B \delta_B + c_{x_p^H}^H \delta_H); \\ Y_P &= S_P q c_{y_p^B}^B \delta_B \quad Z_P = S_P q c_{z_p^H}^H \delta_H \end{aligned} \quad (1.161)$$

式中, S_P ——舵面特征面积; q ——速度头; $c_{x_p^H}^H, c_{x_p^B}^B, c_{y_p^B}^B, c_{z_p^H}^H$ ——相应的偏导数; δ_H 和 δ_B ——控制装置(舵面)相应的偏转角。

力矩的特征量还取决于所考虑的控制装置的旋转角速度,

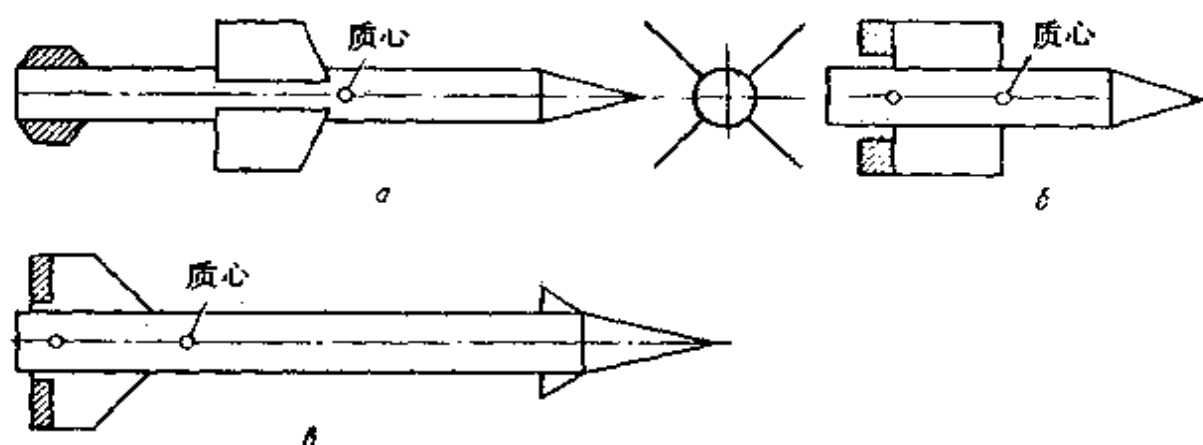


图 1.23 控制舵在火箭壳体上的位置示意图

a—正常式； b—飞机式； B—鸭式。

$$\begin{aligned} m_{py} &= m_{py}^{\delta_H} \delta_H + m_{py}^{\delta_B} \delta_B; \\ m_{pz} &= m_{pz}^{\delta_B} \delta_B + m_{pz}^{\delta_H} \delta_H \end{aligned} \quad (1.162)$$

控制力矩为：

$$M_{py} = S q l m_{py} \quad M_{pz} = S q l m_{pz} \quad (1.163)$$

根据火箭或弹丸的特点和它们的空气动力布局，空气舵面可以被放在壳体的不同位置上。为了直观，在图上将舵面画上了阴影线。

控制装置的效率取决于当控制装置与其中间位置的偏差量最大时所产生的力矩（或力矩系数）增加量。因此，控制装置的俯仰效率可由 Δm_{zB} 确定， Δm_{zB} ——当角 δ_B 的改变量为最大值时俯仰力矩系数的增加量；控制装置的侧倾效率可用 $\Delta m_{x\delta}$ 确定， $\Delta m_{x\delta}$ 取决于 δ_{δ} 的最大改变角；对于偏航效率则用 Δm_{yH} 确定， Δm_{yH} 取决于 δ_H 的最大改变量，决定控制装置效率的相应参数取决于偏导数：

$$m_{x\delta}^{\delta_B} = \frac{\partial m_x}{\partial \delta_B} \quad m_{x\delta}^{\delta_{\delta}} = \frac{\partial m_x}{\partial \delta_{\delta}} \quad m_{yH}^{\delta_H} = \frac{\partial m_y}{\partial \delta_H}$$

它们均属于静态导数。

第二章 飞行器运动数学 模型建立的理论基础

动力系统或动力过程,特别是飞行器运动过程的简化数学描述就称为数学模型。根据所提任务和所取的假设条件,利用这些模型可以进行各种各样的理论研究。描述飞行器状态特性的模型是建立在经典理论力学和火箭动力学的基础上的。模型的特点与所具有的飞行器运动外部条件的信息有关,与反映实际物理过程的精确程度有关。

§ 2.1 数学模型的分类和表示形式

2.1.1 作为动力系统的飞行器

建立描述飞行器运动状态的数学模型的目的是为了确定一些运动参数,如质心运动分速度、飞行器相对其质心的角速度、描述飞行器运动方向的角度、描述飞行器运动轨迹的质心坐标。飞行器的轨迹是在给定基准系(坐标系)上的连续曲线。在飞行器运动数学模型中,运动时间是自变量。

描述飞行器运动状态的基本数学模型是运动微分方程组。为了最终求解该微分方程组,需要预先给出起始条件和确定出出现在微分方程组右端的外力。为此,重要的是要确定出作用力(确定的或者是随机的过程)的某种形式,以便使该作用力的模型能在所感兴趣的时间范围内确切地描述力学特性。表示外界作用形式的合力,描述了在给定的和随后的时间内飞行器的运动状态。

在一般情况下,如果已知系统的起始状态和在所研究时间段内的外力,则该系统的现行状态也是唯一确定的,即

$$X(t) = \varphi[t, t_0, X(t_0), \eta(t_0, t)] \quad (2.1)$$

称这样的系统为动力系统。

在函数式(2.1)中,状态矢量 $X(t)$ 值的集合表示了系统的可能状态域,因而也就表示了它在状态空间中的轨迹。称矢量 $X(t)$ 为状态变量,称函数 φ 为系统状态过渡函数, $\eta(t)$ 确定外界作用力的特性。在每个具体情况下对 $\eta(t_0, t)$ 的限制决定于所解任务的条件,也决定于外部介质的特点和其它一些因素。

以运动微分方程的形式表示的系统,其状态的过渡函数正是此方程在全部 $t < T$ 范围内的解,这里时间 T 瞬时的集合是实数集合,我们把具有这种状态过渡函数的动力系统称为常动力系统。

火箭和炮弹的无控飞行可以看作是飞行器动态系统的代表,它是有控动态系统的特例。后者用基于状态空间的方法来研究,这种方法主要用在有控动力系统中。将无控火箭和炮弹作为常动力系统来分析,保证了对这种方法一定的继承性,特别是当任务要求对无控运动和有控运动的动力学研究结果进行“衔接”时,更需要确定这种关系。分离式弹药和弹道修正弹药就需要按这种关系进行“衔接”。

在飞行器飞行过程中,飞行器的动态特性、质量以及其它特性常会发生本质的变化。这些特性的变化决定于燃料消耗的质量秒流量;决定于飞行器在大气中以变速度运动的位移(因大气的密度是随高度而变化的);还决定于地表面的非标准地理环境等等。正由于这些原因,可把飞行器看作非定常的动力系统。此外,对于绝大多数情况,还可看作是非线性、非定常的动力系统。运动方程的非线性是由位于其中的一系列非线性关系式所确定的。例如,取决于运动参数的空气动力和空气动力矩的关系式,质量和惯量特性随时间的变化关系式,由于火箭的级间分离、部件的抛出产生的跳跃变化等。

以上列举的事例可以得出结论:飞行器的数学模型是一个高阶的非线性非定常的常动力学系统。它描述具有有限个自由度的物质系统的运动,微分方程组的个数等于其自由度个数的二倍。在简单的情况下,若飞行器可看作刚体,则它的运动微分方程组的个数为 12 个。

所以,求解任何一个飞行器动力学问题时,要从合理地论证数学模型入手。只有这样,才能按要求进行微分方程组模型的建立和简

化。

2.1.2 数学模型的可能形式

按照模型自身的结构分,可以将其分成确定的、不确定的和混合型三种结构。

描述了所研究飞行器有关的全部信息(非随机的或随机的)的模型属于具有确定结构的模型,在利用这种模型时必须给定确定实际运动特性的全部资料,包括存在或不存在已知量值的扰动条件。当扰动具有偶然性时,就利用随机确定模型概念,而模型中的随机扰动概率分布参数是预先给定的。假定不存在偶然扰动,就称为非随机的确定模型。如果缺乏关于系统可能状态的足够资料,分析将是不调和的,也就是说要单值地给出计算结果将是不可能的。这种相应于不确定资料水平的情况就是非随机或者随机的不确定模型。最后,混合模型是处于确定的和不确定的模型之间。这种模型的特点是:尽管在扰动作用下飞行器的运动严重地偏离了计算值,但是,它仍在由所引进的模型和允许的给定扰动的集合所确定的计算方案的作用域内。在此情况下,关于扰动作用的特征及其可能值的任何其它资料通常是没有的。不确定的和混合型的模型在对策论中用来解决某些研究问题^[34]。

确定的和混合的模型,通常是以运动微分方程的形式给出的(非随机的或者随机的),或者是以最终的分析关系式给出的。不确定的模型在大多数情况下是用一组系统状态矢量以公式形式给出的。除了公式以外,还采用因素因子的模型^[17]。描述过程发展的,以微分方程组形式表示的模型可以分成线性的和非线性的。最后,按过程发展的自变量(通常是时间)变化的特性(连续的或离散的)分,可以将模型分成连续的和离散的两种。作为例子,现讨论像有控弹丸那样的非定常非线性一般动力系统的确定模型,设其作用的扰动为 $\eta_i(t)$,则模型有如下形式:

$$\frac{d}{dt}X(t) = \varphi[t, X(t), u(t), \eta(t)];$$

$$Y(t) = \phi(t, X(t), u(t)) \quad (2.2)$$

式中, $u(t)$ ——控制矢量或者(更广的含义)输入参数矢量;
 $Y(t)$ ——系统输出变量矢量。以连续时间为自变量的线性非定常系统的数学模型有如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X(t) &= A(t)X(t) + B(t)u(t) + F(t)\eta(t); \\ X(t_0) &= X_0; \\ Y(t) &= C(t)X(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

式中, A, B, F, C, D ——相应维数的矩阵, 是时间的函数。

对于定常系统的特殊情况(具有常变量的客体), 上面所给的矩阵元素是与时间无关的常数。

对于时间是离散情况下的线性客体的运动可以写成差分方程的形式:

$$\begin{aligned} \Delta X(t) &= A(t)X(t) + B(t)u(t) + F(t)\eta(t) \\ X(0) &= X_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

上式中的记号, 其名称和矢量含义与连续时间情况下的动力系统一样, 矩阵的内含也类似。因为离散时间情况下的客体中, t 可用周期性数字来表示 $t = 0, 1, 2, \dots, n$, 故这里的导数可以用一阶差分来表示:

$$\Delta X = X(t+1) - X(t) \quad (2.5)$$

为避免误解, 今后在差分方程中常将时间 t 用 k 来表示。

非线性模型向线性模型的转化是依靠对非线性模型线性化来实现的。线化过程必须满足一系列条件的要求, 最基本的要求是运动扰动量关于它的名义值的偏差是小量。一般地, 如果系统输入参量的偏差和由它引起的偏差量 $\delta x(t)$ 不超出名义值的 $3\% \sim 5\%$, 便认为满足要求。这样, 就可将基本的扰动运动表达成如下线性和的形式:

$$u(t) = u_*(t) + \delta u(t) \quad t_0 \leq t \leq t_1;$$

$$X(t) = X_*(t) + \delta X(t) \quad \text{当 } X(t_0) = X_*(t_0) + \delta X(t_0) \quad (2.6)$$

式中, 带记号 $*$ 的参量表示无扰运动的名义值。将方程组(2.6)代入方程组(2.2), 并在 $\eta(t) = 0$ 的情况下, 依次展开成泰勒级数可得表达式

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \dot{X}_*(t) + \delta\dot{X}(t) = \varphi[X_*(t), u_*(t); t] + \\ &\Phi_X[X_*(t), u_*(t); t]\delta X(t) + \\ &\Phi_u[X_*(t), u_*(t); t]\delta u(t) + \delta\Phi(t) \quad t_0 \leq t \leq t_1\end{aligned}\quad (2.7)$$

式中, $\delta\Phi(t)$ —— 仅计及一次项时展开式的余项; Φ_X 和 Φ_u —— 函数 φ 相对 X 和 u 的相应的雅可比式[偏导数方阵(权系数)]。考虑到 $\delta\Phi(t)$ 相对展开式的线性项来说是不可比小量, 则状态的线性化微分方程取如下形式:

$$\frac{d}{dt}[\delta X(t)] = A(t)\delta X(t) + B(t)\delta u(t) \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (2.8)$$

若在名义弹道附近研究系统的运动, 名义运动本身特性通常是不重要的, 故在(2.6)中可设 $X_*(t) = 0$, 此时 $X(t) = \delta X(t)$ 。这样, 线性非定常系统状态的最终数学模型可变为:

$$\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t) + B(t)u(t) \quad X(t_0) = X_0 \quad (2.9)$$

为了写出无控动力系统(无控飞行器)的方程, 只要令在上述关系式中的 $u(t) = 0$, 则方程(2.2)变成如下形式:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X(t) &= F[t, X(t), \eta(t)]; \\ Y(t) &= \psi[t, X(t)]\end{aligned}\quad (2.10)$$

而方程(2.9)有如下形式

$$\frac{d}{dt}X(t) = A(t)X(t) \quad X(t_0) = X_0 \quad (2.11)$$

从方程(2.11)的结构可看出, 对于无控运动, 引起偏离名义运动过程的因素是参数偏差量 X_0 (飞行器状态变量偏差量的初值), 该偏差量 X_0 以初始条件综合量的形式出现。

为了得到随机系统的运动模型, 乍一看似乎只需在非随机系统方程的右端简单地补充随机分量就够了。但是, 事实上并非如此。为了比较, 让我们研究一下系统状态的确定型模型:

$$\frac{d}{dt}X(t) = \varphi[t, X(t), \eta(t)] \quad (2.12)$$

式中, $\eta(t)$ —— 确定的输入作用矢量。同时研究系统状态的“随机”模型:

$$\frac{d}{dt}X(t) = \varphi[t, X(t), \eta(t)] + \eta^*(x, t) \quad (2.13)$$

式中, $\eta^*(x, t)$ ——具有已知特性的随机过程。这些特性包含连续性、 $t \neq \tau$ 时 $\eta^*(t)$ 和 $\eta^*(\tau)$ 的不相关性和散布量(偏差量)方差的有限性。有限方差的条件与作用于弹丸的实际扰动的性质有关。连续性——与模型的微分方程组的类型选择有关。关于 $\eta^*(t)$ 和 $\eta^*(\tau)$ 不相关的条件可以解释为: 如果它们相关的话, 则 $\frac{dx}{dt}$ 不仅与(对给定模型是必然的)现在的状态有关, 还与该状态以前的历程有关。

在以上叙述的条件下, $\eta^*(\tau)$ 的积分是存在的, 而它的数学期望等于零。即 $M \int \eta^*(\tau) d\tau = 0$ 。 $\eta^*(\tau)$ 的导数的均方值也是存在的, 而由于方差的有限性和 $\eta^*(t)$ 与 $\eta^*(\tau)$ 的不相关性, 根据什瓦尔兹(Шварц)不等式, 该均方值的数学期望同样为零 $M[\eta^{*2}(t)] = 0$ 。在这种情况下, 公式(2.13)表示的系统模型将不是具有所希望统计性质的随机状态模型。为了得到修正后的、具有连续时间的随机系统状态模型, 需要利用随机微分方程组。这时, 对扰动作用方差有限性的要求降低了。自然, 它将降低所给模型对实际过程的符合程度, 但是可以使研究得到简化。由于在随机模型中没有方差的限制, $D\eta^*(t) \rightarrow \infty$ 。所以, 它将没有导数 $\frac{dx}{dt}$, 因而我们不可能得到 $\frac{dx}{dt}$ 。在这种情况下随机的微分方程组有如下形式:

$$dX = \varphi(X, t)dt + \sigma(X, t)d\eta^* \quad (2.14)$$

如果函数 φ 关于 X 是线性的, 且 σ 与 X 无关, 则该随机微分方程组是线性的。

§ 2.2 建立飞行器运动方程的原理

2.2.1 密歇尔斯基(Мещерский)方程

通常, 我们假设, 物体运动时同时发生一部分质点与物体结合而一部分质点从物体离开。带有空气火箭发动机的飞行器就是这种模型的例子。发动机工作时, 迎面气流通过发动机带栅栏的进气道进入

发动机。与此同时,燃料与空气燃烧产物以很高的速度从发动机的喷管中向后喷出,产生了推力。

在质点的结合和分离过程中,物体的质量是不断改变的。假设,质点结合和分离的速度与物体运动的速度无关,又设在瞬时 t , 物体有质量 $m + dm_2$ 并且以绝对速度 V_a 运动。在时间间隔 dt 内,由于粒子的结合,物体质量变化了 dm_1 ; 由于粒子分离,物体质量变化了 dm_2 。根据 И. Б. 密歇尔斯基采用的假设,粒子的结合和分离过程,类似于碰撞一样,是在无穷小的时间间隔内发生的。粒子结合以后以物体的速度而运动,而分离的粒子在得到速度后将立即与基本物质失去联系。这就是所谓的接触式相互作用假设。

作用在所研究的三个物质系统上的外力的合力为 ΣF_i 。由于 m 、 dm_1 和 dm_2 各个物质之间的相互作用以及外力 ΣF_i 的作用,结合质量 $m + dm_1$ 将具有速度 $V_a + dV_a$, 在结合以前 dm_1 的运动绝对速度为 U_a , 而分离后的物质 dm_2 的绝对速度为 W_a 。

物质系统 m 、 dm_1 和 dm_2 在时间间隔 dt 内的动量变化应等于外力冲量:

$$\begin{aligned} m(V_a + dV_a) - mV_a + dm_1[(V_a + dV_a) - U_a] \\ + dm_2(W_a - V_a) = \Sigma F dt \end{aligned} \quad (2.15)$$

忽略较小的二阶小量 $dm_1 dV_a$, 将等式两边同除以 dt , 经过变换后上式可以得到变质量物体的运动方程:

$$m \frac{dV_a}{dt} + \frac{dm_1}{dt}(V_a - U_a) + \frac{dm_2}{dt}(W_a - V_a) = \Sigma F = 0 \quad (2.16)$$

$$\text{或} \quad m \frac{dV_a}{dt} = \Sigma F + \frac{dm_1}{dt}(U_a - V_a) - \frac{dm_2}{dt}(W_a - V_a) \quad (2.17)$$

如果像 И. Б. 密歇尔斯基那样,记 \dot{x} 、 \dot{y} 、 \dot{z} ——基本物质 m 的速度在直角坐标系上的投影; X 、 Y 、 Z ——全部外力在同一坐标系上的投影; α_1 、 β_1 、 γ_1 ——结合部分质量的速度投影; α_2 、 β_2 、 γ_2 ——排出部分质量的速度投影,则可得方程(2.16)在该坐标系上的分量方程:

$$m\ddot{x} + \frac{dm_1}{dt}(\dot{x} - \alpha_1) - \frac{dm_2}{dt}(\dot{x} - \alpha_2) - X = 0;$$

$$m\ddot{y} + \frac{dm_1}{dt}(\dot{y} - \beta_1) - \frac{dm_2}{dt}(\dot{y} - \beta_2) - Y = 0;$$

$$m\ddot{z} + \frac{dm_1}{dt}(\dot{z} - \gamma_1) - \frac{dm_2}{dt}(\dot{z} - \gamma_2) - Z = 0 \quad (2.18)$$

这个方程是由密歇尔斯基于 1904 年发表的,并按照 A. A. 科斯莫杰米扬斯基(Космодемьянский) 教授的建议以他的名字命名^[53]。在方程(2.18)中,量 $\frac{dm_1}{dt}(\dot{z} - \alpha_1)$ 、 $\frac{dm_2}{dt}(\dot{z} - \alpha_2)$ 被密歇尔斯基称为“附加力”在坐标系上的投影。

因此,И. В. 密歇尔斯基指出,将附加力作为外力后,变质量物体的运动方程组可以写成常质量物体的运动方程形式。

在方程(2.17)中,如果将加入质点的相对速度记为 $U_{\text{отн}} = U_a - V_a$,排出质点的相对速度表示为 $W_{\text{отн}} = W_a - V_a$,则该方程变为

$$m \frac{dV_a}{dt} = \Sigma F + \frac{dm_1}{dt} U_{\text{отн}} - \frac{dm_2}{dt} W_{\text{отн}} \quad (2.19)$$

运动物体的质量等于 $m = m_0 + \int_0^t \frac{dm_1}{dt} dt - \int_0^t \left| \frac{dm_2}{dt} \right| dt$ 。如果没有加入部分质量,则 $\int_0^t \frac{dm_1}{dt} dt = 0$ 。从式(2.19)中可得到带火箭发动机的飞行器运动方程的一般形式:

$$m \frac{dV_a}{dt} = \Sigma F - \left| \frac{dm}{dt} \right| W_{\text{отн}} \quad (2.20)$$

式中, $\left| \frac{dm}{dt} \right| = |\dot{m}| = \frac{dm_2}{dt}$ ——工质的质量秒流量。

应注意,质量排出时,导数 $\frac{dm}{dt}$ 为负。

为了确定垂直向上的火箭运动,И. В. 密歇尔斯基曾采用方程

$$m\ddot{x} = -mg + P_r - \frac{dm}{dt} W_{\text{отн}} - R(\ddot{x}) \quad (2.21)$$

式中, g ——自由落体加速度, $R(\ddot{x})$ ——空气阻力。在方程(2.21)中,И. В. 密歇尔斯基对称之为燃气压力的附加项 P_r 没有进一步展开。

2.2.2 变质量物体和常质量物体运动的动力学基本定理、固化原理

在建立弹丸运动方程时用到的基本理论有动量定理、动量矩定理和动能定理。

这些经典理论在变质量物体的火箭动力学上的推广建立在所谓固化原理的基础上。这个原理可以叙述如下^[25, 35, 64]：变质量物体的运动方程可以表示成具有瞬时固化质量的常质量物体运动方程，只要在该瞬时作用在物体上的力中加入外力、科氏反作用力（Кориолис）和变分力。

注意到对于变质量物体，相对固定不动坐标系的动量矢和动量矩矢由下式确定：

$$\mathbf{Q} = \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{V}_v \quad \mathbf{K} = \sum_{v=1}^n (\boldsymbol{\rho}_v \times m_v \mathbf{V}_v)$$

则变质量物体的动量和动量矩的变化可以表示成：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{Q} &= \mathbf{F} + \mathbf{F}_* + (-\mathbf{q}_r) + \left[-\frac{\delta \mathbf{Q}_r}{dt} \right] + \mathbf{F}_\kappa; \\ \frac{d}{dt} \mathbf{K} &= \mathbf{M} + \mathbf{M}_\kappa + (-\mathbf{K}_r) + \left[-\frac{\delta \mathbf{K}_r}{dt} \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

在上式中， \mathbf{F}, \mathbf{M} ——在瞬时 t 作用在物体上的外力主矢和外力矩主矢； $\mathbf{F}_\kappa = -\sum_{v=1}^n m_v \mathbf{a}_\kappa$ ——物体内部运动部分（燃气或液体）具有的科氏惯性力矢量； \mathbf{M}_κ ——这些科氏力的主矩矢； $\mathbf{F}_* = S_a(p_a - p_0)$ ——由在喷管截面处作用的大气压力和燃气压力确定的主矢； $\frac{\delta \mathbf{Q}}{dt} + \mathbf{q}_r = \frac{\delta \mathbf{Q}^*}{dt}$ ——相对于固连坐标系的动量变化，是一个局部（相对）导数 $\frac{\delta}{dt} \sum_{v=1}^n m_v \mathbf{V}_v$ ，式中 \mathbf{V}_v ——具有质量 m_v 的质点相对壳体的速度矢； \mathbf{q}_r ——燃气反作用力主矢， $\frac{\delta \mathbf{Q}_r}{dt}$ ——由于发动机内部质点运动不稳定而造成的变分力主矢。 \mathbf{K}_r 和 $\frac{d\mathbf{K}_r}{dt}$ ——相应的反作用力矩和变分力矩的主矢， $\boldsymbol{\rho}_v$ ——具有质量 m_v 的质点相对不动坐标系原点的矢径。

我们单独研究一下在方程 (2.22) 第一式中的部分和项 $\mathbf{F}_* - \mathbf{q}_r - \frac{\delta \mathbf{Q}_r}{dt}$ 。其中 \mathbf{q}_r ——由排出微元的几何和确定： $\mathbf{q}_r = \iint_S \rho \mathbf{V}_* \mathbf{V}_r dS$ ，将它投影在火箭的纵轴（与火箭发动机纵轴重合）上，得

$$q_r = \iint_S \rho V_* V_r dS = -\rho_a W_a^2 S_a$$

式中, ρ_a ——气流密度; W_a ——从喷管出口截面 S_a 处流出的燃气的速度。

因为 $g\rho_a W_a S_a = Q_{\text{окс}}$, 故 $-q_r = \frac{Q_{\text{окс}}}{g} W_a$ 。因而,

$$F_s - q_r - \frac{\delta Q_r}{dt} = \frac{Q_{\text{окс}}}{g} W_a + S_a(p_a - p) - \frac{\delta Q_r}{dt}$$

对于所研究的火箭弹类型, $\frac{\delta Q_r}{dt}$ 可以忽略。故得

$$\frac{dQ}{dt} = F + P + F_k \quad (2.23)$$

类似地, 对方程(2.22)的第二式, 可以得到关于火箭动量矩主矢的方程:

$$\frac{dK}{dt} = M + M_{\text{пр}} + M_k \quad (2.24)$$

式中, M ——除作用在喷管截面上的大气压和燃气压相对火箭质心的力矩外的全部外力矩主矢; $M_{\text{пр}}$ ——发动机推力矩主矢, 除纯推力外还包括作用在喷管截面上大气压和燃气压引起的附加力矩, 以及(在必要考虑时)火箭内部气体和液体运动不稳定而引起的附加力矩主矢。

方程(2.23)和(2.24)给出了作为变质量物体的火箭固化原理的相应公式。

作为变质量系统的火箭的动能是变质量系各质点动能之和, 即

$T_{\text{II}} = \sum_{v=1}^n \frac{m_v V_{av}^2}{2}$ 。利用公式 $V_{av} = V_a + V_{rv}$, 经相应变化后可得

$$T_{\text{II}} = T + \frac{m V_a^2}{2} - m V_a V_r \quad (2.25)$$

式中, m ——在瞬时 t 固化火箭的质量; $T = \sum_{v=1}^n \frac{m_v V_{rv}^2}{2}$ ——在火箭相对质心的运动中, 火箭质点系的动能。

因为火箭的质心相对壳体移动, 所以, 在许多情况下用牵连和相对运动中的速度来确定火箭的动能是方便的。因为 $V_a = V_c + V_r$, 则

$$T_{\text{II}} = T + \frac{m V_c^2}{2} - \frac{m V_r^2}{2} \quad (2.26)$$

因此, 在绝对运动中火箭的动能除了 T 外, 还包括瞬时固化火箭

质心在牵连和相对运动中的动能差。

变质量物体的动能微分可由动能等式直接微分求得：

$$dT_{\Sigma} = d\left[\sum_{\nu=1}^n \frac{m_{\nu} V_{a\nu}^2}{2}\right] = \sum_{\nu=1}^n \frac{dm_{\nu} V_{a\nu}^2}{2} + \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} V_{a\nu} dV_{a\nu} \quad (2.27)$$

将等式左右两边同除以 dt ，得到右边的第二项为

$$\sum_{\nu=1}^n m_{\nu} V_{a\nu} \frac{dV_{a\nu}}{dt}$$

变质量质点 ν 的运动方程可以表示为

$$m_{\nu} \frac{dV_{a\nu}}{dt} = F_{\nu} + R_{\nu} + F_{P\nu} \quad (2.28)$$

式中， F_{ν} ——作用在质点 ν 上的外主动力合力； R_{ν} ——作用在质点 ν 上的所有内主动力的合力； $F_{P\nu}$ ——作用在点 ν 上的反作用力。

忽略内部作用力，将式(2.28)代入式(2.27)后得

$$\frac{dT_{\Sigma}}{dt} = \sum_{\nu=1}^n F_{\nu} V_{a\nu} + \sum_{\nu=1}^n F_{P\nu} V_{a\nu} + \sum_{\nu=1}^n \frac{dm_{\nu}}{dt} \cdot \frac{V_{a\nu}^2}{2} \quad (2.29)$$

记 $V_{a\nu} = \frac{dS_{\nu}}{dt}$ ，式中 dS_{ν} ——质点 m_{ν} 经过的微元路程，代入微分等式，则有

$$dT_{\Sigma} = \delta A_F + \delta A_P + \sum_{\nu=1}^n \frac{dm_{\nu} V_{a\nu}^2}{2} \quad (2.30)$$

式中， δA_F 和 δA_P ——作用在火箭上的外力和反作用力的相应元功。右边最后一项——由质点质量 m_{ν} 变化强度和绝对速度所决定的动能。

当要在广义坐标系上建立火箭运动的方程时，同样需要研究火箭的动能。如果变质量物体的位置由独立的广义坐标 q_1, q_2, \dots, q_s 确定，并且

$$r_{\nu} = r_{\nu}(q_1, q_2, \dots, q_s, t)$$

则运动方程可以写成第二类拉格朗日方程的形式^[53]：

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial \dot{q}_1} \right] - \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial q_1} &= Q_1 + P_1; \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial \dot{q}_2} \right] - \frac{\partial T_{\Sigma}}{\partial q_2} &= Q_2 + P_2; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_s} = Q_s + P_s \quad (2.31)$$

式中, $Q_s = \sum F_v \frac{\partial r_v}{\partial q_s}$ ——外界因素确定的广义力; $P_s = \sum_{v=1}^n \frac{dm_v}{dt} W_v \cdot \frac{\partial V_{av}}{\partial \dot{q}_s}$ ——由在物质排出过程中变质量物体固化体的机械能流所确定的广义力; $\sigma = 1, 2, \dots, s$ 。

从后者容易看出, 当记 $W_v = \lambda(t) V_{av}$ 时, 则表征机械能流的函数为

$$\Pi = \sum_{v=1}^n \lambda(t) \frac{dm_v}{dt} \cdot \frac{V_{av}^2}{2} \quad \text{和} \quad P_s = \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_s}$$

在相对质心旋转运动中, 弹丸的动能可以用弹丸的转动惯量和瞬时转动角速度在相应坐标上的投影来表示:

$$T = \frac{1}{2} [A p^2 + B q^2 + C r^2] \quad (2.32)$$

式中, $A = I_z, B = I_y, C = I_x$ ——弹丸相对于惯性主轴 z, y, x 的转动惯量; p, q, r ——弹丸瞬时角速度在该相应轴上的投影。

因为弹丸相对于各赤道轴的转动惯量相等 ($A = B$), 故式 (2.32) 可变为如下形式

$$T = \frac{1}{2} [A(p^2 + q^2) + C r^2] \quad (2.33)$$

在建立弹丸旋转运动微分方程时, 经常利用广义坐标下的拉格朗日方程 (第二类拉格朗日方程), 其形式为

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.34)$$

为了计算弹丸动能的变化, 同样需要简化关系式 (2.30)。

2.2.3 将火箭作为变质量物体时的直线运动矢量方程

我们将系统 (火箭壳体 — 燃料 — 气体) 在绝对运动中的速度和加速度记为 V_a 和 a_a , 壳体以及与其固连的部分 (即在给定瞬时与质心作相同平移的物体上的那些点) 相对于不动坐标系的运动是牵连运动。在不动的坐标系中, 壳体的质心速度和加速度用 V_c 和 $a_c = \frac{dV_c}{dt}$

来表示。壳体—燃料—气体系统质心相对火箭壳体的速度和加速度用 V_r 和 a_r 表示。变质量系统物体动力学指出,物体质量与质心牵连加速度的乘积等于作用在其上的全部外力和推力之和。即

$$ma_r = \Sigma F + \Sigma F_P \quad (2.35)$$

火箭质心的绝对速度和加速度为

$$V_a = V_c + V_r; \quad a_a = a_c + a_r + 2(\omega \times V_r) \quad (2.36)$$

从后一个公式中可求得 a_c , 并把它代入(2.35)。这时,壳体—燃料—气体系统质心运动方程可以写成以下的矢量形式;

$$ma_a = m \frac{dV_a}{dt} = \Sigma F + \Sigma F_P + ma_r + 2m(\omega \times V_r) \quad (2.37)$$

在建立方程(2.17)和(2.18)时,已作过假设,即基本物体与被吸入的粒子或被排出的粒子的相互作用时是瞬时发生的。实际上,飞行器与运动着的被吸入或被排出气流的相互作用过程是很复杂的。对于带固体燃料和液体燃料发动机的火箭弹来说,被排出的气体是在发动机的燃烧室内直至从喷管外端截面处排出的过程中(即与火箭基本质量失去联系前)就已获得了相对速度。对于带液体燃料发动机的火箭弹,燃烧剂和氧化剂在火箭壳体内部发动机工作的过程中在流动,运动着的燃气流与在横方向作摆动运动的壳体相互作用的结果将产生科氏力 F_{kop} 。考虑了这个力后,火箭质心运动方程可写成

$$m \frac{dV_a}{dt} = \Sigma F + \Sigma F_P + \Sigma F_{kop} + ma_r + 2m(\omega \times V_r) \quad (2.38)$$

在上式中还应补充考虑火箭内部物质运动不稳定性而引起的小量项。设在壳体内部不断流动着的燃料和气体在瞬时 t 时的动量等于 $q_{всп}$, 而在瞬时 $t + dt$ 时等于 $q_{всп} + \delta q_{всп}$ 。显然,在时间间隔 dt 内流动着的物质的动量变化等于 $\delta q_{всп}$ 。这样,火箭运动方程可以写成更完整的形式:

$$m \frac{dV_a}{dt} = \Sigma F + \Sigma F_P + \Sigma F_{kop} + ma_r + 2m(\omega \times V_r) + \frac{\delta q_{всп}}{dt} \quad (2.39)$$

将 $(\delta q_{\text{всп}})/dt$ 称作变分力。

方程(2.39)符合于以上提到的固化原理。

变分力和变分力矩反映了火箭壳体内部物质运动的不稳定性。但在大多数情况下,火箭内部工质移动的过程可以看作准稳定的,因而变分力很小,可予以忽略。

应当指出,壳体内部物质的运动和壳体摆动而引起的科氏力对于质心运动来说影响不大。而火箭在地球坐标系内的相对运动而引起的科氏力,只有在火箭的运动速度超过 $600 \sim 700 \text{ m/s}$ 时才对质心运动产生明显的影响。所以,在以后的讨论中,只有当速度超过该范围时才考虑它。

在惯性坐标系下,飞行器质心运动方程有如下形式:

$$m \frac{dV_a}{dt} = \Sigma F + \Sigma F_p \quad (2.40)$$

式中, $\Sigma F, \Delta F_p$ ——外力矢量和推力矢量。飞行器质心相对与地球固连的动坐标系的运动方程将有如下形式:

$$ma = \Sigma F + \Sigma F_p + (-ma_{\text{неп}}) + (-ma_{\text{кор}})$$

式中, $ma_{\text{неп}}, ma_{\text{кор}}$ ——与地球自转有关的牵连惯性力和科氏惯性力。

对于原点与地球假定中心重合的直角坐标系,在地球角速度矢量方向沿着 OY_0 轴的条件下,得

$$a_{\text{неп}} = \frac{d\Omega}{dt} \times r + \Omega \times (\Omega \times r) \quad (2.41)$$

如果取 $\Omega = \text{const}$,则牵连加速度为

$$a_{\text{неп}} = \Omega \times (\Omega \times r) \quad (2.42)$$

而与地球旋转有关的科氏加速度为

$$a_{\text{кор}} = 2(\Omega \times V) \quad (2.43)$$

式中, V ——飞行器的相对速度。

常常将质心运动方程建立在与火箭固连的动坐标系 $OX_i Y_i Z_i$ 上^①。利用不同坐标系向动坐标系的转换规则得:

① 以后,下标 i 将表示所选的相应坐标系的标号

$$m \frac{dV_a}{dt} = m \frac{dV_{ai}}{dt} + m(\omega \times V_{ai}) = \Sigma F + \Sigma F_p \quad (2.44)$$

式中, $\frac{dV_{ai}}{dt}$ ——在动坐标系下火箭质心速度矢量的导数。

对于地球坐标系,有如下方程:

$$m \frac{dV}{dt} = \Sigma F + \Sigma F_p - ma_{\text{неп}} - ma_{\text{коп}} \quad (2.45)$$

如果令 ω 表示动坐标系相对地球坐标系的角速度,则,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d^*V}{dt} + \omega \times V \quad (2.46)$$

式中, $\frac{d^*V}{dt}$ ——局部导数。

这样,考虑了地球旋转影响的飞行器质心运动的矢量方程有如下形式:

$$m \left[\frac{d^*V}{dt} + \omega \times V \right] = \Sigma F + \Sigma F_p - ma_{\text{неп}} - ma_{\text{коп}} \quad (2.47)$$

对于原点位于飞行器质心的任意直角坐标系 $OX_iY_iZ_i$, 根据式 (2.44) 可以建立火箭质心运动的三个标量方程:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{xi} + \omega_{yi}V_{zi} - \omega_{zi}V_{yi} &= \frac{\Sigma F_{xi}}{m} + \frac{\Sigma F_{pxi}}{m}; \\ \dot{V}_{yi} + \omega_{zi}V_{xi} - \omega_{xi}V_{zi} &= \frac{\Sigma F_{yi}}{m} + \frac{\Sigma F_{pyi}}{m}; \\ \dot{V}_{zi} + \omega_{xi}V_{yi} - \omega_{yi}V_{xi} &= \frac{\Sigma F_{zi}}{m} + \frac{\Sigma F_{pzi}}{m} \end{aligned} \quad (2.48)$$

式中, V_{xi}, V_{yi}, V_{zi} ——火箭质心速度矢量在与质心固连的坐标系轴上的投影; $\omega_{xi}, \omega_{yi}, \omega_{zi}$ ——固连坐标系(以 i 表示)的角速度矢量在随同火箭一起运动,但轴的方向在空间不变化,且与基准坐标系的轴方向一致的坐标系轴上的投影^①; $\Sigma F_{xi}, \Sigma F_{yi}, \Sigma F_{zi}, \Sigma F_{pxi}, \Sigma F_{pyi}, \Sigma F_{pzi}$ ——作用在火箭上的外力和推力在坐标系 $OX_iY_iZ_i$ 轴上的投影。

2.2.4 飞行器旋转运动方程

若选择的坐标系通过火箭质心且以角速度 ω^* 相对火箭旋转,而

① 实际上 $\omega_{xi}, \omega_{yi}, \omega_{zi}$ 仍应是 ω 在固连坐标系 $OX_iY_iZ_i$ 上的投影。——译者

火箭本身以角速度 ω 旋转,在这样的坐标系下可以利用如下已知的方程来建立火箭旋转运动方程

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{K}}{dt} + [(\omega + \omega^*) \times \mathbf{K}] \quad (2.49)$$

式中, $d\mathbf{K}/dt$ ——在不动坐标系下,火箭动量矩的导数; $\frac{d^*\mathbf{K}}{dt} = \frac{\delta\mathbf{K}}{dt}$ ——在以 i 为记号的动坐标系 $OX_iY_iZ_i$ 下,动量矩的导数(局部导数)。

如果坐标系 $OX_iY_iZ_i$ 相对火箭弹不旋转,则 $\omega^* = 0$,有

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{K}}{dt} + \omega \times \mathbf{K} = \mathbf{M}_R \quad (2.50)$$

式中, \mathbf{M}_R ——外力矩矢。

矢量方程(2.50)在固连于飞行器的坐标系的轴上投影,可以用动量矩矢 \mathbf{K} 在这些轴上的投影来表达。动量矩矢 \mathbf{K} 为

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} = \mathbf{A}_I \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

式中, \mathbf{A}_I ——火箭的惯性张量,可用惯量矩阵来表示

$$\mathbf{A}_I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

于是,动量矩 \mathbf{K} 在 $X_iY_iZ_i$ 坐标系轴上的投影有如下形式:

$$\begin{aligned} K_{x_i} &= I_{x_i} \omega_{x_i} - I_{x_i y_i} \omega_{y_i} - I_{x_i z_i} \omega_{z_i}; \\ K_{y_i} &= I_{y_i} \omega_{y_i} - I_{y_i x_i} \omega_{x_i} - I_{y_i z_i} \omega_{z_i}; \\ K_{z_i} &= I_{z_i} \omega_{z_i} - I_{z_i x_i} \omega_{x_i} - I_{z_i y_i} \omega_{y_i} \end{aligned} \quad (2.53)$$

式中, $I_{x_i}, I_{y_i}, I_{z_i}$ ——火箭相对于 $X_iY_iZ_i$ 轴的转动惯量; $I_{x_i y_i}, I_{x_i z_i}, I_{y_i z_i}$ ——对于坐标平面确定的惯性积。

在确定轴向转动惯量和惯性积时应计及质心(坐标原点)的位移和坐标系轴相对壳体的旋转^[51]:

$$\begin{aligned}
I_{x_i} &= \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} (y_{i\nu}^2 + z_{i\nu}^2); & I_{y_i} &= \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} (z_{i\nu}^2 + x_{i\nu}^2); \\
I_{z_i} &= \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} (x_{i\nu}^2 + y_{i\nu}^2); & I_{x_i y_i} &= I_{y_i x_i} = \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} y_{i\nu} x_{i\nu}; \\
I_{x_i z_i} &= I_{z_i x_i} = \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} x_{i\nu} z_{i\nu}; & I_{y_i z_i} &= I_{z_i y_i} = \sum_{\nu=1}^n m_{\nu} y_{i\nu} z_{i\nu}
\end{aligned} \quad (2.54)$$

显然,在火箭运动和发动机工作过程中,轴向和离心的转动惯量将随时间而变化。

利用公式(2.50)和(2.53)可以写出相对于质心的旋转运动方程:

$$\begin{aligned}
I_{x_i} \dot{\omega}_{x_i} + (I_{z_i} - I_{y_i}) \omega_{y_i} \omega_{z_i} - I_{x_i y_i} (\dot{\omega}_{y_i} - \omega_{x_i} \omega_{z_i}) - I_{x_i z_i} (\dot{\omega}_{z_i} + \omega_{x_i} \omega_{y_i}) \\
+ I_{y_i z_i} (\omega_{x_i}^2 - \omega_{y_i}^2) &= M_{x_i} + M_{px_i}; \\
I_{y_i} \dot{\omega}_{y_i} + (I_{x_i} - I_{z_i}) \omega_{x_i} \omega_{z_i} - I_{x_i y_i} (\dot{\omega}_{x_i} + \omega_{y_i} \omega_{z_i}) + I_{x_i z_i} (\dot{\omega}_{x_i}^2 - \dot{\omega}_{z_i}^2) \\
- I_{y_i z_i} (\dot{\omega}_{z_i} - \omega_{x_i} \omega_{y_i}) &= M_{y_i} + M_{py_i}; \\
I_{z_i} \dot{\omega}_{z_i} + (I_{y_i} - I_{x_i}) \omega_{x_i} \omega_{y_i} - I_{x_i y_i} (\dot{\omega}_{x_i} - \omega_{y_i} \omega_{z_i}) - I_{y_i z_i} (\dot{\omega}_{y_i} \\
+ \omega_{x_i} \omega_{z_i}) + I_{x_i z_i} (\omega_{y_i}^2 - \omega_{x_i}^2) &= M_{z_i} + M_{pz_i}
\end{aligned} \quad (2.55)$$

方程的右边包含了作用于火箭的全部外力相对于质心的力矩总和在相应坐标轴上的投影。由于火箭质心相对壳体移动而引起的科氏力矩和附加力矩在求解许多弹道问题时为小量,可予以忽略。

如果动坐标系与中心惯性主轴 OXYZ 重合,则矩阵(2.52)变为主对角线阵:

$$A_I = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

而元素 I_x, I_y, I_z 为中心惯性主矩。在这种情况下,方程(2.50)在固连坐标系轴上的投影有如下形式:

$$A_I \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} + A_{\omega} A_I \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

式中,

$$A_w = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_y \\ -\omega_y & \omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$\Sigma M_x, \Sigma M_y, \Sigma M_z$ ——全部外力矩和推力矩在固连坐标系轴上投影之和； $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$ ——相应的角加速度矢量。

在公式(2.55)中解出角加速度后，可以写出投影在固连坐标系上的火箭相对于质心旋转运动的动力学方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = A_I^{-1} \begin{bmatrix} \Sigma M_x \\ \Sigma M_y \\ \Sigma M_z \end{bmatrix} - A_I^{-1} A_w A_I \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

式中， A_I^{-1} —— A_I 的逆矩阵。转化成标量形式的方程后，可以得到以欧拉动力学方程表示的旋转运动方程组：

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \frac{M_x + M_{px}}{I_x} - \frac{I_z - I_y}{I_x} \omega_y \omega_z; \\ \dot{\omega}_y &= \frac{M_y + M_{py}}{I_y} - \frac{I_x - I_z}{I_y} \omega_x \omega_z; \\ \dot{\omega}_z &= \frac{M_z + M_{pz}}{I_z} - \frac{I_y - I_x}{I_z} \omega_y \omega_x \end{aligned} \quad (2.60)$$

2.2.5 矢量方程在弹道法线和切线上的投影

火箭在作平面曲线运动时，其加速度可以表示成切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n 之和，这些加速度的方向沿着坐标系 oxn 的自然轴。切向加速度 \dot{V} 沿着弹道的切线方向，法向加速度 V^2/ρ 沿着弹道的法线指向瞬时曲率中心。弹道曲率 $\frac{1}{\rho}$ 可写成 $\frac{1}{\rho} = |d\theta/ds|$ ，式中， $d\theta$ ——弹道切线倾角的微小变化； ds ——曲线弧长的微小变化。

经过替代和变换，可以得到法向加速度模的公式

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = V^2 \left| \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} \right| = V \left| \frac{d\theta}{dt} \right| \quad (2.61)$$

导数 $d\theta/dt$ 的符号决定于弹道的形状，当 θ 随弧长的增加而减小时 $d\theta/dt < 0$ ，反之则 $d\theta/dt > 0$ 。对于火箭和炮弹的弹道，由于它们属于“地面—地面”类型，则总有 $\dot{\theta} < 0$ ，因而在今后的研究中，法向加速

度将写成如下形式:

$$a_n = V \left| \frac{d\theta}{dt} \right| = -V \frac{d\theta}{dt} \quad (2.62)$$

换句话说,负号表示了当考虑弹丸在右手坐标系 OX_cY_c 内运动时, n 轴的正方向相应于角度 θ 示性线的负方向。

图 2.1 给出了作用在有翼式火箭弹质心上的全部基本力的情况,这些力在切线和法线方向上的投影列于表 2.1 中。从表 2.1 可以看出力和角度的意义,投影量前的符号表示了该力分量的方向。如果分量的方向与坐标轴的方向相同,则取正;如果不相同,则取负。控制力作用在质心,在图中控制力偶没有示出。

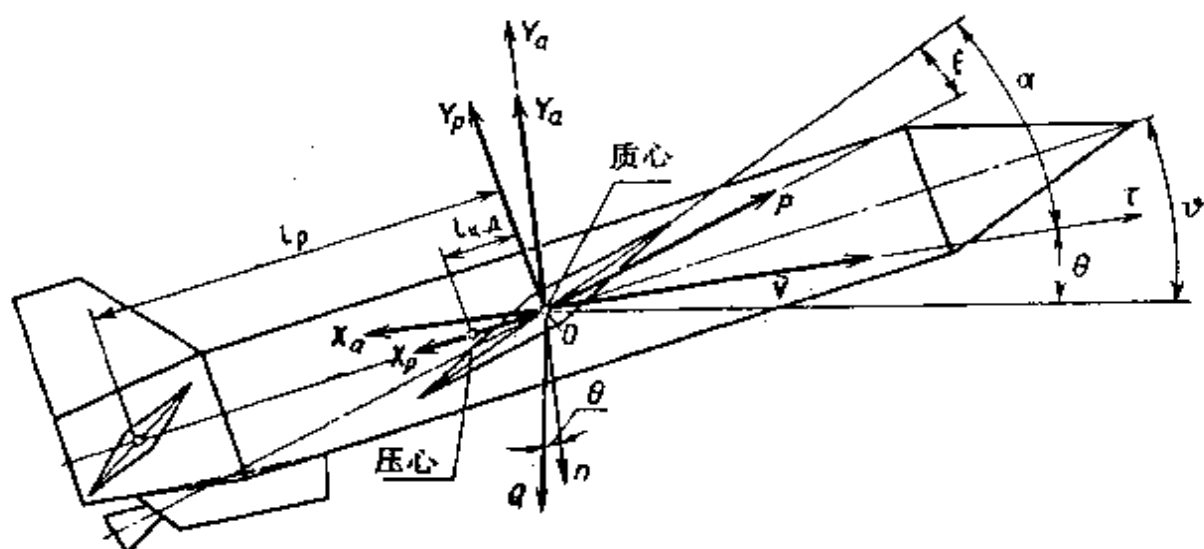


图 2.1 助推发动机工作时,作用在飞行器上外力的示意图

τ —弹道切线方向; n —弹道法线方向。

在表 2.1 中, X_P, Y_P, \dots 表示同一类型舵产生的合力; P ——全部发动机的合推力; $mg = Q$ ——重量或重力。

在切线和法线方向上的标量形式的运动方程可表示成:

$$\begin{aligned} m\dot{V} &= P\cos(\alpha - \xi) - X_a - mg\sin\theta - X_P\cos(\vartheta - \theta) \\ &\quad - Y_P\sin(\vartheta - \theta); \\ -mV\dot{\theta} &= -P\sin(\alpha - \xi) - Y_a + mg\cos\theta + X_P\sin(\vartheta - \theta) \\ &\quad - Y_P\cos(\vartheta - \theta) \end{aligned} \quad (2.63)$$

表 2.1 作用在飞行器上诸力在 τ 和 n 轴上的分量

力	切向分量 (在 τ 轴上的投影)	法向分量 (在 n 轴上的投影)
推力	$P \cos(\alpha - \xi)$	$-P \sin(\alpha - \xi)$
迎面阻力	X_a	0
升力	0	Y_a
重力	$-mg \sin \theta$	$mg \cos \theta$
在舵上的推力损失	$-X_p \cos(\vartheta - \theta)$	$X_p \sin(\vartheta - \theta)$
控制力	$-Y_p \cos(\vartheta - \theta)$	$-Y_p \sin(\vartheta - \theta)$

在旋转运动方程中将计及如下力矩：

空气动力矩 M_z ，它近似等于乘积 $Y_a l_{ay}$ 。这里， l_{ay} ——质心(ЦМ)与压力中心(ЦП)之间的距离；

控制力矩 M_{pz} ，它近似等于 $Y_p l_p$ 。这里， l_p ——控制机构的压心到有翼式火箭质心之间的距离。

在这种情况下，旋转运动方程有如下形式：

$$I_z \ddot{\vartheta} = M_z + M_{pz} \quad (2.64)$$

式中， I_z ——火箭相对于 OZ 轴的赤道转动惯量。在现在的情况下，即为相应于 OZ_c 轴。

为了研究有控飞行、运动稳定性和飞行器相应方程组的稳定性，必需补充描写控制系统工作的控制方程。在按照火箭的某些飞行参数进行控制的情况下应该有控制机构，借助控制机构可以改变相应的火箭运动参量。例如，在按照角度参数 ϑ 、 ψ 和 γ 来进行控制时，分别对应一个控制机构——俯仰舵(高度)、偏航舵(方向)和倾斜舵。在按照火箭速度大小来进行控制时，必需有一个可以通过改变推力或者迎面阻力来控制火箭的速度的控制机构(例如，带有中心发动机体的喷管或者各种各样的空气动力减速制动栅和襟翼)。在一般情况下，执行机构在飞行过程中的位置取决于许多参数，其中有上面提到的角度、角速度、质心坐标等等。为了保证被控参数按程序改变，执行机构应该确定在与飞行参量和程序给定参量之差的位置上。例如，在进行铅直平面内的控制时，必须确定控制舵转角 δ_R 和飞行器纵轴转

角之间的关系。在我们现在的例子中，必须确定关系式， $\delta_B = f(\Delta\vartheta)$ ，这里， $\Delta\vartheta$ ——俯仰角改变量。

在所写方程中没有给出那些附加的复杂关系式，例如第一章中以复杂关系式给出的那些描述了与运动参量之间相互影响的力和力矩。

2.2.6 火箭和炮弹运动方程的线性化

线性化的数学含义是将运动诸元关于标准运动诸元计算值的偏差量用相应函数的泰勒级数展开式求得，此泰勒级数按诸元偏差的幂展开。我们关心的是关于火箭弹道诸元多变量函数的泰勒级数展开公式。在泰勒级数展开时要用到多变量函数的全微分关系式，按约定的记号有

$$d^m A = \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial \xi_n} d\xi_n \right]^m f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (2.65)$$

展开公式有如下形式：

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) &= f(\xi_{1*} + \delta\xi_1, \xi_{2*} + \delta\xi_2, \dots, \xi_{n*} + \delta\xi_n) \\ &= f(\xi_{1*}, \xi_{2*}, \dots, \xi_{n*}) + \\ &\frac{1}{1!} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_{1*}} \delta\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_{2*}} \delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial \xi_{n*}} \delta\xi_n \right] f(\xi_{1*}, \xi_{2*}, \dots, \xi_{n*}) + \\ &\frac{1}{2!} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_{1*}} \delta\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_{2*}} \delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial \xi_{n*}} \delta\xi_n \right]^2 f(\xi_{1*}, \xi_{2*}, \dots, \xi_{n*}) + \\ &\frac{1}{3!} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_{1*}} \delta\xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_{2*}} \delta\xi_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial \xi_{n*}} \delta\xi_n \right]^3 f(\xi_{1*}, \xi_{2*}, \dots, \xi_{n*}) + R \end{aligned} \quad (2.66)$$

式中， ξ_{i*} ——各参量的计算(标准)值。

相对计算值的诸元偏差量 $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \dots, \delta\xi_n$ 引起的函数 $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 的偏差量等于

$$\delta f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f(\xi_{1*} + \delta\xi_1, \xi_{2*} + \delta\xi_2, \dots, \xi_{n*} + \delta\xi_n) - f(\xi_{1*}, \xi_{2*}, \dots, \xi_{n*}) \quad (2.67)$$

式(2.66)的第一项与式(2.67)的第二项相等，但符号相反，可

以消掉,故函数 $f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 偏差量的一般公式有以下形式:

$$\begin{aligned} \delta f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = & \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_{1*}} \delta \xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_{2*}} \delta \xi_2 + \dots + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \xi_{n*}} \delta \xi_n \right] f(\xi_{1*}, \xi_{2*}, \dots, \xi_{n*}) + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_{1*}} \delta \xi_1 + \frac{\partial}{\partial \xi_{2*}} \delta \xi_2 + \right. \\ & \left. \dots + \frac{\partial}{\partial \xi_{n*}} \delta \xi_n \right]^2 f(\xi_{1*}, \xi_{2*}, \dots, \xi_{n*}) + \frac{1}{3!} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_{1*}} \delta \xi_1 + \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial \xi_{2*}} \delta \xi_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial \xi_{n*}} \delta \xi_n \right]^3 f(\xi_{1*}, \xi_{2*}, \dots, \xi_{n*}) + R \quad (2.68) \end{aligned}$$

在计算中所保留的展开式的项数取决于确定偏差量的精度要求。在进行模型的线性化时只保留展开式的线性项,此时,式(2.68)变成

$$\begin{aligned} \delta f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ = \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_1} \right]_* \delta \xi_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_2} \right]_* \delta \xi_2 + \dots + \left[\frac{\partial f}{\partial \xi_n} \right]_* \delta \xi_n \quad (2.69) \end{aligned}$$

现在来求形如 $\delta \frac{d\xi}{dt}$ 导数偏差量。因为 $\delta \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi}{dt} - \left[\frac{d\xi}{dt} \right]_*$, 而 $\xi = \xi_* + \delta \xi$, 则可得

$$\delta \left[\frac{d\xi}{dt} \right] = \frac{d}{dt} (\xi_* + \delta \xi) - \left[\frac{d\xi}{dt} \right]_* = \frac{d}{dt} \delta \xi \quad (2.70)$$

因此,如果我们有由 n 个如下形式方程组成的非线性运动微分方程组

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n); \\ \frac{d\xi_2}{dt} &= f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2.71)$$

则根据式(2.69)和(2.70),由式(2.71)容易导出偏差量形式的线性方程组

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta \xi_1 &= \left[\frac{df_1}{d\xi_1} \right]_* \delta \xi_1 + \left[\frac{df_1}{d\xi_2} \right]_* \delta \xi_2 + \left[\frac{df_1}{d\xi_3} \right]_* \delta \xi_3 + \dots; \\ \frac{d}{dt} \delta \xi_2 &= \left[\frac{df_2}{d\xi_1} \right]_* \delta \xi_1 + \left[\frac{df_2}{d\xi_2} \right]_* \delta \xi_2 + \left[\frac{df_2}{d\xi_3} \right]_* \delta \xi_3 + \dots; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2.72)$$

如果基准运动已知,则诸元 $\xi_{1*}(t), \xi_{2*}(t), \xi_{3*}(t)$ 及其它的量已知,当存在诸元偏差 $\delta\xi_i$ 时,则位于方程组(2.72)的诸元偏差 $\delta\xi_i$ 中偏导数项 $\left[\frac{\partial f_i}{\partial \xi_i}\right]$ 作为时间的函数也已知。

借助上面介绍的方法,可以对尾翼式无控火箭弹的纵向运动简化形式的微分方程组进行线性化。就拿我们熟悉的微分方程组(2.63)来说,考虑到推力沿着火箭的纵轴(即令角度 $\xi = 0$),取 $X_p = Y_p = 0$,对式(2.63)和(2.64)变换后可得:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha - X_a - Q \sin \theta; \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= P \sin \alpha + Y_a - Q \cos \theta; \\ I_z \frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= M \end{aligned} \quad (2.73)$$

在线性化时,认为非扰动运动和扰动运动时的质量和惯性矩关于时间的变化是相同的: $m(t) = m_*(t), I_z(t) = I_{z*}(t)$ 。

此外,还忽略飞行高度的变化对气动特性和推力的影响。对于小量 δy ,这个影响无关紧要。这是因为在计算中函数 $H(y), \rho(y), \pi(y), a(y)$ 变化缓慢。

考虑到以上这些情况,可以得到

$$\begin{aligned} m \left[\frac{dV}{dt} - \frac{dV_*}{dt} \right] &= \delta(P \cos \alpha) - \delta X_a - \delta(Q \sin \theta) \\ m \left[V \frac{d\theta}{dt} - V_* \frac{d\theta_*}{dt} \right] &= \delta(P \sin \alpha) + \delta Y_a - \delta(Q \cos \theta) \\ I_z \left[\frac{d^2\vartheta}{dt^2} - \frac{d^2\vartheta_*}{dt^2} \right] &= \delta M_z \end{aligned}$$

在简化时,气动力和力矩的偏差量仅与两个量有关:飞行速度偏差量 δV 和攻角偏差量 $\delta \alpha$ 。如记

$$\begin{aligned} X_{a*} &= f_1(V_*, \alpha_*) & X_a &= f_1(V, \alpha); \\ Y_{a*} &= f_2(V_*, \alpha_*) & Y_a &= f_2(V, \alpha); \\ M_{z*} &= f_3(V_*, \alpha_*) & M_z &= f_3(V, \alpha) \end{aligned}$$

则,按照公式(2.66),在级数展开关系式中,当只考虑线性项时有

$$\begin{aligned}\delta X_a &= X_a - X_{a*} = \left[\frac{\partial X_a}{\partial V} \right]_* \delta V + \left[\frac{\partial X_a}{\partial \alpha} \right]_* \delta \alpha; \\ \delta Y_a &= Y_a - Y_{a*} = \left[\frac{\partial Y_a}{\partial V} \right]_* \delta V + \left[\frac{\partial Y_a}{\partial \alpha} \right]_* \delta \alpha; \\ \delta M_z &= M_z - M_{z*} = \left[\frac{\partial M_z}{\partial V} \right]_* \delta V + \left[\frac{\partial M_z}{\partial \alpha} \right]_* \delta \alpha\end{aligned}\quad (2.74)$$

记号 * 表示标准的非扰动运动的参数, 由非线性模型确定。引入简化的偏导数记号

$$\left[\frac{\partial A}{\partial x_i} \right]_* = A^i;$$

则式(2.74)转化成如下形式:

$$\begin{aligned}\delta X_a &= X_a^V \delta V + X_a^\alpha \delta \alpha; \\ \delta Y_a &= Y_a^V \delta V + Y_a^\alpha \delta \alpha; \\ \delta M_z &= M_z^V \delta V + M_z^\alpha \delta \alpha\end{aligned}$$

类似地可求得包含推力 P 的项的偏差量

$$\delta(P \sin \alpha) = P \cos \alpha_* \delta \alpha \quad \delta(P \cos \alpha) = -P \sin \alpha_* \delta \alpha$$

假设火箭的质量 Q 为常数, 可得 $\delta(Q \sin \theta) = Q \cos \theta_* \delta \theta$;
 $\delta(Q \cos \theta) = -Q \sin \theta_* \delta \theta$ 。注意到

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} - \frac{dV_*}{dt} &= \frac{d}{dt} \delta V \\ V \frac{d\theta}{dt} - V_* \frac{d\theta_*}{dt} &= V_* \frac{d}{dt} \delta \theta + \delta V \frac{d\theta_*}{dt} + dV \frac{d}{dt} \delta \theta \\ &\approx V_* \frac{d}{dt} \delta \theta\end{aligned}$$

不计二阶小量得:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} - \frac{d^2 \vartheta_*}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \delta \vartheta \quad \text{和} \quad \delta \theta = \delta \vartheta - \delta \alpha$$

同样认为攻角也是小量, 则 $\sin \alpha_* \approx \alpha_*$, $\cos \alpha_* \approx 1$, 最后可得以下的线性化方程组

$$m \frac{d\delta V}{dt} = -X_a^V \delta V - (P \alpha_* + X_a^\alpha - Q \cos \theta_*) \delta \alpha - Q \cos \theta_* \delta \vartheta;$$

$$m V_* \left(\frac{d\delta \vartheta}{dt} - \frac{d\delta \alpha}{dt} \right) = Y_a^V \delta V + (P + Y_a^\alpha - Q \sin \theta_*) \delta \alpha +$$

$$Q \sin \alpha_* \delta \vartheta;$$

$$I_z \frac{d^2 \delta \vartheta}{dt^2} = M_z^V \delta V + M_z^a \delta \alpha \quad (2.75)$$

这个方程组是齐次线性微分方程组,而微分方程组的系数是时间的已知函数。

在利用运动方程线性化方法时,其中就包括了扰动足够小的条件,为使该偏差量方程计算的误差不超过允许值,必须知道所得计算结果的准确性怎样,或必须知道对扰动量的限制应有多大。对这个问题,可以从比较近似解和准确解的结果得到最终结论。但是,由于求准确解的困难性,它没有得到广泛的应用。因而常常应用不太严格的但又较简单的间接方法或近似方法来估计误差,其中之一就是对方程线性化时展开式中舍弃的余项 R 进行估计。利用它可以初步确定出整个计算中扰动量的允许范围。对原始方程的全部项进行同样方法的分析,可以确定出扰动量的综合极限值。在该极限值的范围内,线性化方程的计算准确性是可以得到保证的。

第三章 火箭和炮弹运动 微分方程组的建立

描写飞行器运动过程的数学模型的具体形式取决于在建立数学模型过程中所作的假设,所选择的坐标系和作用的力系。

物体在空气中运动时,基本运动形式(直线的、旋转的、纵向的和横向的)之间的联系是通过推力和空气动力及其它们的力矩表现出来的。在建立飞行器的空间运动方程组时,根据所要解决的问题来确定是否考虑惯性力、空气动力和推力之间的交叉影响。而在建立更广泛空间运动方程时应该考虑控制系统在俯仰、偏航、倾斜控制通道上的交叉影响以及由控制力的出现而引起的交叉影响。

正如理论与实验研究所指出的那样,对于弹道式火箭可以把运动区分为质心的平动和相对质心的旋转运动。并且把平动分为纵向平面上和侧平面上的运动,这样可满足实际允许的计算精度要求,使计算结果与射击试验结果吻合得很好。当然,上述对运动的分解研究只有在作了本质的简化后才能实现。

§ 3.1 火箭在主动段上的空间运动方程

3.1.1 火箭空间运动的基本方程组

我们将在标准的地球坐标系内研究火箭的运动。在该坐标系内,为了简化问题,可以忽略科氏加速度和地球曲率的影响,同时忽略地球旋转加纬度的影响,而设自由落体加速度的大小和方向不变。在这些假设条件下,运动方程组可以在式(2.48)和(2.60)的基础上写出。不计风的影响,空速等于地速 $V = V_*$ 。

为了确定火箭质心相对地球的运动速度 V ,最简单的方法是把方程建立在弹道坐标系上。因为在该坐标系内有

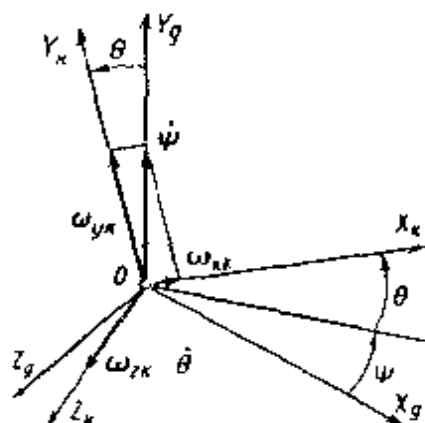


图 3.1 弹道坐标系与标准地面坐标系的角度关系

$$V_{x_k} = V, \quad V_{y_k} = V_{z_k} = 0$$

这时方程(2.48)可以简化成如下形式

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \Sigma F_x / m \\ V \omega_{x_k} &= \Sigma F_{y_k} / m \\ V \omega_{y_k} &= -\Sigma F_{z_k} / m \end{aligned} \quad (3.1)$$

为了在弹道坐标系上确定弹道坐标系 $OX_k Y_k Z_k$ 相对不动的坐标系 $O_0 X_g Y_g Z_g$ 的运动角速度的投影, 参看图 3.1 可得

$$\omega_{x_k} = \dot{\Psi} \sin \theta \quad \omega_{y_k} = \dot{\Psi} \cos \theta \quad \omega_{z_k} = \dot{\theta} \quad (3.2)$$

将 ω_{y_k} 和 ω_{z_k} 代入(3.1)中得

$$\dot{V} = \Sigma F_x / m \quad V \dot{\theta} = \Sigma F_{y_k} / m \quad V \dot{\Psi} \cos \theta = -\Sigma F_{z_k} / m \quad (3.3)$$

方程组(3.3)的右端将计及推力、重力、空气动力和控制力的分量。

空气动力 R_A 在速度坐标系内的分量是 X_a, Y_a, Z_a , 借助方向余弦表(参看表 1.2)和转换公式可以得到空气动力在弹道坐标系内的投影

$$\begin{aligned} R_{Ax_k} &= -X_k = -X_a; \\ R_{Ay_k} &= Y_k = Y_a \cos \gamma_a - Z_a \sin \gamma_a; \\ R_{Az_k} &= Z_k = Y_a \sin \gamma_a + Z_a \cos \gamma_a \end{aligned} \quad (3.4)$$

设将推力以它在固连坐标系上的投影 P_x, P_y, P_z 给出。这种表示方法在今后考虑推力矢量偏离火箭纵轴出现燃气控制力时的火箭运动特征是方便的。由单个燃气动力控制机构产生的控制力可包含在沿固连轴分解的推力分量内。此外, 这还可以考虑推力偏心对火箭运动特性的影响。

由同类空气动力控制机构产生的控制气动力在固连坐标轴上的投影记为 $\Sigma X_P, \Sigma Y_P, \Sigma Z_P$ 。

利用方向余弦表(参看表 1.3) 和转换公式,可以求得计算推力和控制力在弹道坐标系上的投影方程

$$\begin{aligned} P_{x_k} - \Sigma X_{p_k} &= (P_x - \Sigma X_p) \cos \alpha \cos \beta - (P_y + \Sigma Y_p) \sin \alpha \cos \beta + \\ &\quad (P_z - \Sigma Z_p) \sin \beta; \\ P_{y_k} + \Sigma Y_{p_k} &= (P_x - \Sigma X_p) (\sin \alpha \cos \gamma_a + \sin \gamma_a \cos \alpha \sin \beta) + \\ &\quad (P_y + \Sigma Y_p) (\cos \gamma_a \cos \alpha - \sin \gamma_a \sin \alpha \sin \beta) - \\ &\quad (P_z + \Sigma Z_p) \sin \gamma_a \cos \beta; \\ P_{z_k} + \Sigma Z_{p_k} &= (P_x - \Sigma X_p) (\sin \gamma_a \sin \alpha - \cos \gamma_a \cos \alpha \sin \beta) + \\ &\quad (P_y + \Sigma Y_p) (\sin \gamma_a \cos \alpha + \cos \gamma_a \sin \alpha \sin \beta) + \\ &\quad (P_z + \Sigma Z_p) \cos \gamma_a \cos \beta \end{aligned} \quad (3.5)$$

因为不计重力的可变性和地球表面的曲率,故重力在弹道坐标系上的投影为

$$Q_{x_k} = -Q \sin \theta \quad Q_{y_k} = -Q \cos \theta \quad Q_{z_k} = 0 \quad (3.6)$$

将全部力的分量(3.5)、(3.6) 式和角速度分量(3.2) 式代入基本方程(3.1) 中,得到在弹道坐标系上的火箭质心运动方程组

$$\dot{V} = \frac{1}{m} (P_{x_k} - \Sigma X_{p_k} - X_k + Q_{x_k}) \quad (3.7)$$

$$V \dot{\theta} = \frac{1}{m} (P_{y_k} + \Sigma Y_{p_k} + Y_k + Q_{y_k}) \quad (3.8)$$

$$V \dot{\psi} \cos \theta = -\frac{1}{m} (P_{z_k} + \Sigma Z_{p_k} + Z_k) \quad (3.9)$$

火箭旋转运动方程通常是以固连坐标系上的分量写出。因为任何一个不固连于火箭的坐标系相对火箭来说都是运动的,这就导致在研究火箭运动时,即便认为质量是常数 $m = \text{const}$ 情况下都必须考虑惯性矩的变化,使研究问题复杂化。当固连坐标系与弹丸的中心惯性主轴重合时,可以将火箭旋转运动方程写成如下形式:

$$I_x \dot{\omega}_x + (I_x - I_y) \omega_y \omega_z = \Sigma M_x + \Sigma M_{px} \quad (3.10)$$

$$I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = \Sigma M_y + \Sigma M_{py} \quad (3.11)$$

$$I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = \Sigma M_z + \Sigma M_{pz} \quad (3.12)$$

式中, $\Sigma M_x, \Sigma M_y, \Sigma M_z$ —— 外力矩和推力矩在固连坐标系三个轴上

的投影之和(不计控制力); $\Sigma M_{px}, \Sigma M_{py}, \Sigma M_{pz}$ ——控制力矩在固连坐标系轴上的投影。

对于轴对称的火箭弹,旋转运动动力学方程可采用简化形式:

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x &= \Sigma M_x + \Sigma M_{px}; \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= \Sigma M_y + \Sigma M_{py}; \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= \Sigma M_z + \Sigma M_{pz} \end{aligned} \quad (3.13)$$

在发动机工作时,由于燃料消耗使火箭质量变化,且火箭的惯性矩也会发生很大改变。当火箭在飞行而其质量按已知规律变化时,可以根据详细的图纸,像所有复杂的物体那样来计算 I_x, I_y, I_z 的值。计算惯性矩并确定它的变化是一件需要耐心且十分繁杂的工作。所以,在火箭弹道近似计算时把它当作常数来处理。当研究稳定性和操纵性等较准确的计算时,火箭惯性矩的改变是必须要考虑的。复杂物体的惯性矩可以用实验的方法来确定,其精度比计算值更高些。这在力学中有较详细的叙述,本文不再赘述。

为了确定 $\dot{\vartheta}, \dot{\psi}, \dot{\gamma}$ 和角速度 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 之间的关系,需利用变换公式(图 1.5):

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\gamma}; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma + \dot{\vartheta} \sin \gamma; \\ \omega_z &= -\dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma + \dot{\vartheta} \cos \gamma \end{aligned} \quad (3.14)$$

由此可得

$$\dot{\vartheta} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma \quad (3.15)$$

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \quad (3.16)$$

$$\dot{\gamma} = \omega_x - \tan \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \quad (3.17)$$

在求解火箭空间运动问题时需要确定其气动力,因而也需要知道角度 α, β, γ_a 的值。

依次确定出由牵连坐标系向速度系,由速度系向弹道系,由弹道系向地面坐标系转换的方向余弦矩阵,并使它的斜对角线元素与由牵连坐标系直接向地面系转换的方向余弦矩阵的斜对角线元素相等,可得如下角度之间的关系式:

$$\sin\vartheta = \sin\theta\cos\alpha\cos\beta + \cos\theta(\sin\alpha\cos\gamma_a + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma_a) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \sin\psi\cos\gamma &= \sin\Psi\cos\beta\cos\gamma_a + \cos\Psi(\sin\beta\cos\theta + \sin\gamma_a\sin\theta\cos\beta) \\ &\quad - \cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\cos\vartheta\sin\gamma = \sin\gamma_a\cos\beta\cos\theta - \sin\beta\sin\theta \quad (3.20)$$

利用火箭质心速度矢量在 $O_0X_gY_gZ_g$ 坐标系(图 1.7) 上的投影式可得

$$dx_g/dt = V\cos\theta\cos\Psi \quad (3.21)$$

$$dy_g/dt = V\sin\theta \quad (3.22)$$

$$dz_g/dt = -V\cos\theta\sin\Psi \quad (3.23)$$

坐标原点到火箭质心的距离(斜射程) 为

$$r = \sqrt{x_g^2 + y_g^2 + z_g^2} \quad (3.24)$$

方程(3.7) ~ (3.12), (3.15) ~ (3.24) 及确定质量变化的方程

$$m = m_0 - \int_0^t |\dot{m}| dt \quad (3.25)$$

联立在一起即是由 17 个方程组成的描写火箭空间运动的方程组。该方程组可以用来解决各种目的的问题。它的最简单的应用是求解外弹道直接问题。在这种情况下, 如果已知火箭的几何特性、质量特性、惯性特性和气动特性、发动机的工作特性, 控制力和力矩的变化规律 $\Sigma X_{P_k}(t)$ 、 $\Sigma Y_{P_k}(t)$ 、 ΣM_{P_kx} 、 ΣM_{P_ky} 、 ΣM_{P_kz} 和飞行起始条件, 则方程组可以用这样那样的方法积分。

积分结果可得到火箭运动的全部特征量:

$$\begin{aligned} &V(t); \theta(t); \Psi(t); x_g(t); y_g(t); z_g(t); r(t); \vartheta(t); \psi(t); \\ &\gamma(t); \alpha(t); \beta(t); \gamma_a(t); \omega_x(t); \omega_y(t); \omega_z(t); m(t) \end{aligned}$$

有控火箭弹空间运动的完整方程组的求解过程是复杂的和繁重的, 在解实际弹道问题时常常需对该完整的方程组进行简化。

3.1.2 在稠密大气层中火箭相对基准地球坐标系的空间运动方程组的简化

在控制系统理想工作且忽略过渡过程的情况下, 可以不考虑角速度 ω_x 、 ω_y 、 ω_z 和关于时间的导数 $\dot{\alpha}$ 、 $\dot{\beta}$ 、 $\dot{\gamma}$ 、 $\dot{\delta}_B$ 、 $\dot{\delta}_H$ 、 $\dot{\delta}_s$ 的影响, 于是从以

前的公式中可以得到函数关系式 $M_x(V, y, \gamma, \delta_s) = 0$; $M_y(V, y, \beta, \delta_H) = 0$; $M_z(V, y, \alpha, \delta_B) = 0$, 这些关系式被称之为平衡关系式。它反映了控制力矩与作用于火箭的其它力矩之间的平衡关系。由平衡关系确定的攻角、侧滑角和倾斜角称为平衡角 α_s 、 β_s 和 γ_s 。火箭按这些平衡角所确定的轨迹而运动, 称为在平衡状态下的运动。在平衡状态下, 设火箭对控制机构方向舵和高低舵偏转角 (δ_H 、 δ_B) 相应地作瞬时响应。其中, 攻角、侧滑角和倾斜角取本身平衡值。飞行器平衡状态的角度与控制舵平衡状态的角度之间的关系可以由两种途径来确定。

如果分别已知飞行器和它的控制舵的空气动力特性, 则在纵向平面内的运动有关系式

$$qSlm_z + q_p S_p l_p m_{pz} = 0 \quad (3.26)$$

在各种计算中仅仅保留气动力矩的静态项, 记

$$\delta_{u,0} = - \frac{qSl(m_{z0} + m_z^* \alpha_s)}{q_p S_p l_p m_{pz}^* g} \quad (3.27)$$

类似地可以得到关系式 $\delta_{u,0} = f(\beta_s)$

如果作用在飞行器上的诸力矩是由攻角和控制舵偏角同时改变的情况下确定的, 则在仅考虑静态项时可得

$$\delta_{u,0} = - \frac{1}{m_{pz}^* g} (m_{z0} + m_z^* \alpha_s) \quad (3.28)$$

气动升力系数可表示为

$$c_{y\sigma} = c_{y0} + c_y^* \alpha + c_y^{\delta_B} \delta_B \quad (3.29)$$

在设计初始阶段, 可方便地利用公式

$$c_{y\sigma} = \left[c_y^* + c_y^{\delta_B} \left[\frac{\delta_{B,0}}{\alpha_s} \right] \right] \alpha_s \quad (3.30)$$

角度 α_s 、 β_s 和 γ_s 相对弹道来说变化缓慢。它们的瞬时值取决于舵的位置、火箭运动速度和飞行高度。由于这些角度的值, 及 γ_s 的值不大, 在方程中允许将那些包含它们乘积的项忽略掉。在这种情况下, 方程组有如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{V} = \frac{1}{m} [& (P_x - X_f) \cos \alpha_s \cos \beta_s - (P_y + Y_f) \sin \alpha_s \cos \beta_s + \\ & (P_z + Z_f) \sin \beta_s - X_i - Q \sin \theta]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= \frac{1}{mV} [(P_x - X_p) \sin \alpha_o \cos \gamma_o + (P_y + Y_p) \cos \gamma_o \cos \alpha_o - \\
&\quad (P_z + Z_p) \sin \gamma_o \cos \beta_o + Y_k - Q \cos \theta]; \\
\dot{\Psi} &= - \frac{1}{mV \cos \theta} [- (P_x - X_p) \cos \gamma_o \cos \alpha_o \sin \beta_o + \\
&\quad (P_y + Y_p) \sin \gamma_o \cos \alpha_o + (P_z + Z_p) \cos \gamma_o \cos \beta_o + Z_k]; \\
M_x + M_{px} &\approx 0 \quad M_y + M_{py} \approx 0 \quad M_z + M_{pz} \approx 0; \\
\sin \vartheta &= \sin \theta \cos \alpha_o \cos \beta_o + \cos \theta \sin \alpha_o \cos \gamma_o; \\
\sin \phi \cos \gamma_o &= \sin \Psi \cos \beta_o \cos \gamma_o + \cos \Psi (\sin \beta_o \cos \beta_o + \\
&\quad \sin \gamma_o \sin \theta \cos \beta_o) - \cos \phi \sin \vartheta \sin \gamma_o; \\
\cos \vartheta \sin \gamma_o &= \sin \gamma_o \cos \beta_o \cos \theta - \sin \beta_o \sin \theta; \\
\dot{x}_g &= V \cos \theta \cos \Psi \quad \dot{y}_g = V \sin \theta \quad \dot{z}_g = -V \cos \theta \sin \Psi; \\
r &= \sqrt{x_g^2 + y_g^2 + z_g^2} \quad m = m_0 - \int_0^t |\dot{m}| dt \quad (3.31)
\end{aligned}$$

所得到的方程组是由包含有 14 个未知数的 14 个方程组成。如果假设在飞行过程中角 α_o 、 β_o 、 γ_o 和 γ_o 不超过某量小值,在该量值下允许取 $\sin \alpha_o \approx \alpha_o$; $\sin \gamma_o \approx \gamma_o$; $\cos \alpha_o \approx 1$; $\cos \gamma_o \approx 1$; $\sin \beta_o \approx \beta_o$; $\sin \gamma_o \approx \gamma_o$; $\cos \beta_o \approx 1$; $\cos \gamma_o \approx 1$, 则方程组 (3.31) 可以简化为

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{1}{m} [P_x - X_p - (P_y + Y_p) \alpha_o + (P_z + Z_p) \beta_o \\
&\quad - X_k - Q \sin \theta]; \\
\dot{\theta} &= \frac{1}{mV} [(P_x - X_p) \alpha_o + (P_y + Y_p) - (P_z + Z_p) \gamma_o \\
&\quad + Y_k - Q \cos \theta]; \\
\dot{\Psi} &= - \frac{1}{mV \cos \theta} [- (P_x - X_p) \beta_o + (P_y + Y_p) \gamma_o \\
&\quad + (P_z + Z_p) + Z_k]; \\
M_x + M_{px} &= 0 \quad M_y + M_{py} = 0 \quad M_z + M_{pz} = 0; \\
\sin \vartheta &= \sin \theta + \alpha_o \cos \theta; \\
\sin \phi &= \sin \Psi + \cos \Psi (\beta_o \cos \theta + \gamma_o \sin \theta) - \gamma_o \cos \phi \sin \vartheta; \\
\gamma_o \cos \vartheta &= \gamma_o \cos \theta - \beta_o \sin \theta; \\
\dot{x}_g &= V \cos \theta \cos \Psi \quad \dot{y}_g = V \sin \theta \quad \dot{z}_g = -V \cos \theta \sin \Psi;
\end{aligned}$$

$$r = \sqrt{x_g^2 + y_g^2 + z_g^2} \quad m = m_0 - \int_0^t |\dot{m}| dt \quad (3.32)$$

对于作滚转运动的火箭弹, 则 $\omega_x \neq 0$, 可假设 $\omega_y \approx \omega_z \approx 0$, 并在补充的研究中进行修正。

对于轴对称的火箭和弹丸, 它的推力不产生相对质心的力矩, 而是沿着火箭纵轴的方向, 即 $P = P_x; P_y = P_z = 0$ 。所以描写其空间运动的方程组可以简化。考虑到控制力 $\Sigma X_p, \Sigma Y_p, \Sigma Z_p$ 可隐含在迎面阻力、升力和侧向力之中, 则得方程

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{m} (P \cos \alpha \cos \beta - X_a - Q \sin \theta); \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{mV} [P (\sin \alpha \cos \gamma_a + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_a) + Y_a \cos \gamma_a - \\ &\quad Z_a \sin \gamma_a - Q \cos \theta]; \\ \dot{\Psi} &= \frac{1}{mV \cos \theta} [P (\sin \alpha \sin \gamma_a - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_a) + Y_a \sin \gamma_a + \\ &\quad Z_a \cos \gamma_a] \end{aligned} \quad (3.33)$$

从方程(3.10) ~ (3.12) 可得

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x &= \Sigma M_x + \Sigma M_{px} - (I_z - I_y) \omega_y \omega_z; \\ I_y \dot{\omega}_y &= \Sigma M_y + \Sigma M_{py} - (I_x - I_z) \omega_x \omega_z; \\ I_z \dot{\omega}_z &= \Sigma M_z + \Sigma M_{pz} - (I_y - I_x) \omega_x \omega_y \end{aligned} \quad (3.34)$$

如果在旋转运动时火箭(弹丸)的角速度 ω_y, ω_z 很小, 且 $\omega_x = 0$, 则从方程组(3.34)中可以确定出平衡关系式。从这些平衡关系式中可得到平衡角 α_0, β_0 , 并代入式(3.33)中。像前面作的假设, 取 $\sin \alpha_0 \approx \alpha_0, \sin \beta_0 \approx \beta_0, \sin \gamma_a \approx \gamma_a$, 而这些角的余弦等于1。对于升力和侧向力取线性关系

$$Y_a = Y_a^\alpha \alpha_0 \quad Z_a = -Z_a^\beta \beta_0 \quad (3.35)$$

式中,

$$Y_a^\alpha = q S c_{y_a}^\alpha \quad Z_a^\beta = q S |c_{z_a}^\beta| \quad (3.36)$$

方程组(3.33)经简化后可得

$$\dot{V} \approx \frac{P - X_a}{m} - g \sin \theta \quad (3.37)$$

$$\dot{\theta} \approx \frac{(P + Y_a^a)\alpha_a + (P + Z_a^b)\beta_a\gamma_a}{mV} - \frac{g\cos\theta}{V} \quad (3.38)$$

$$\dot{\Psi} \approx \frac{(P + Y_a^a)\alpha_a\gamma_a - (P + Z_a^b)\beta_a}{mV\cos\theta} \quad (3.39)$$

从方程(3.18), (3.19) 和(3.20) 得

$$\begin{aligned} \sin\vartheta &\approx \sin\theta + \cos\theta(\alpha_a + \beta_a\gamma_a) \\ \sin\phi &\approx \sin\Psi + \cos\Psi(\beta_a\cos\theta + \gamma_a\sin\theta) \\ \gamma_a &\approx \beta_a\tan\theta \end{aligned} \quad (3.40)$$

方程(3.21) ~ (3.25) 不变。

因此, 简化以后可以得到由 11 个方程组成的方程组, 其中的未知变量有 13 个:

$$\begin{aligned} &V(t); \theta(t); \Psi(t); x_k(t); y_k(t); z_k(t); r(t); \vartheta(t); \\ &\phi(t); \alpha_a(t); \beta_a(t); \gamma_a(t); m(t) \end{aligned}$$

如果补充由控制方法决定的动力学方程, 例如当在这些未知量中有两个量给出它们随时间(程序) 的变化规律, 如给出 $\vartheta(t)$ 和 $\phi(t)$, 则该方程组可以求解。

在方程(3.38) 和(3.39) 中, 包含小角度乘积的项 $\beta_a\gamma_a$ 和 $\alpha_a\gamma_a$ 相对于其它项来讲很小, 在近似计算中可以忽略。这时方程(3.38) 和(3.39) 变为

$$\dot{\theta} \approx \frac{(P + Y_a^a)\alpha_a}{mV} - \frac{g\cos\theta}{V} \quad (3.41)$$

$$\dot{\Psi} \approx - \frac{(P + Z_a^b)\beta_a}{mV\cos\theta} \quad (3.42)$$

在以前得到的微分方程中, 如果去掉包含控制力和控制力矩的项, 则可以应用于无控火箭的运动。例如, 对于小的角度 α, β, γ 和 γ_a , 以及角速度 ω_x, ω_y 和 ω_z 也不大的情况, 可以忽略二阶小量项, 得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{m}(P_x\cos\alpha\cos\beta - P_y\sin\alpha\cos\beta + P_z\sin\beta \\ &\quad - X_k - Q\sin\theta); \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{mV}(-P_x\sin\alpha\cos\gamma_a + P_y\cos\gamma_a\cos\alpha - P_z\sin\gamma_a\cos\beta \\ &\quad + Y_k - Q\cos\theta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} = & -\frac{1}{mV\cos\theta}(P_x\cos\gamma_a\sin\beta + P_y\sin\gamma_a\cos\alpha \\ & + P_z\cos\gamma_a\cos\beta + Z_k); \\ I_x\dot{\omega}_x = & M_x \quad I_y\dot{\omega}_y = M_y \quad I_z\dot{\omega}_z = M_z\end{aligned}\quad (3.43)$$

其余的 11 个方程有如下形式:

$$\begin{aligned}\dot{\vartheta} = & \omega_y\sin\gamma + \omega_z\cos\gamma; \\ \dot{\psi} = & \frac{1}{\cos\vartheta}(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma); \\ \dot{\gamma} = & \omega_x - \tan\vartheta(\omega_y\cos\gamma - \omega_z\sin\gamma); \\ \sin\vartheta = & \sin\theta\cos\alpha\cos\beta + \cos\theta\sin\alpha\cos\gamma_a; \\ \sin\psi\cos\gamma = & \sin\Psi\cos\beta\cos\gamma_a + \cos\Psi(\sin\beta\cos\theta \\ & + \sin\gamma_a\sin\theta\cos\beta) - \cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma; \\ \cos\vartheta\sin\gamma = & \sin\gamma_a\cos\beta\cos\theta - \sin\beta\sin\theta; \\ \dot{x}_g = & V\cos\theta\cos\Psi; \\ \dot{y}_g = & V\sin\theta; \\ \dot{z}_g = & -V\cos\theta\sin\Psi; \\ r = & \sqrt{x_g^2 + y_g^2 + z_g^2}; \\ m = & m_0 - \int_0^t |\dot{m}| dt\end{aligned}\quad (3.44)$$

3.1.3 考虑地球旋转时火箭质心运动方程组

下面研究设矢量 V, R_A, P 沿同一方向, 把火箭当作质点时其在静止大气中的运动情况。我们将在地心坐标系 $O_0X_0Y_0Z_0$ 中建立运动方程组, 因为此时计及地球形状和它旋转的影响较为方便。火箭的位置可以用坐标 x, y, z ^① 和地心纬度 φ_m 、经度 λ (图 1.9) 来确定, 在惯性坐标系下的质心运动微分方程有形式 $m(\mathbf{a} + \mathbf{a}_{\text{rep}} + \mathbf{a}_{\text{kop}}) = \Sigma \mathbf{F}$ 在相对运动中 $m\mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{\text{rep}} - m\mathbf{a}_{\text{kop}}$ 。为了建立标量运动方程, 需要将这些关系式在给定坐标系各轴上投影。

① 这里和以后的坐标将下标“0”省略。

推力在坐标轴上的投影等于推力与力的矢量方向与相应坐标轴之夹角余弦的乘积。夹角的余弦分别等于 V_x/V ; V_y/V ; V_z/V 。这里, V_x, V_y, V_z 为火箭质心运动相对速度在各坐标轴上的投影。而

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

推力的投影可由下式确定:

$$P_x = PV_x/V \quad P_y = PV_y/V \quad P_z = PV_z/V$$

空气阻力在坐标轴上的投影等于力 R_A 乘以各夹角的余弦。即

$$R_{Ax} = \frac{\rho V}{2} S c_R V_x \quad R_{Ay} = \frac{\rho V}{2} S c_R V_y \quad R_{Az} = \frac{\rho V}{2} S c_R V_z \quad (3.45)$$

利用地球为球体假说的引力加速度公式 $g_r = g_{r0} \cdot \frac{R_s^2}{r^2}$, 可以得到地球引力在相应坐标上的分量:

$$\begin{aligned} F_{rx} &= mg_{r0} \frac{R_s^2}{r^2} \frac{x}{r} & F_{ry} &= mg_{r0} \frac{R_s^2}{r^2} \frac{y}{r}; \\ F_{rz} &= mg_{r0} \frac{R_s^2}{r^2} \frac{z}{r} \end{aligned} \quad (3.46)$$

这里, $x/r, y/r, z/r$ 为引力 F_r 的方向与坐标基轴之夹角的余弦。

根据这些公式, 可以确定出火箭质心相对旋转着的地球运动的微分方程组:

$$\begin{aligned} \dot{V}_x &= P \frac{V_x}{V} \cdot \frac{1}{m} - \frac{\rho V}{2} S c_R V_x \frac{1}{m} - g_{r0} \frac{R_s^2}{r^3} x + \Omega_x^2 - 2\Omega V_z; \\ \dot{V}_y &= P \frac{V_y}{V} \cdot \frac{1}{m} - \frac{\rho V}{2} S c_R V_y \frac{1}{m} - g_{r0} \frac{R_s^2}{r^3} y; \\ \dot{V}_z &= P \frac{V_z}{V} \cdot \frac{1}{m} - \frac{\rho V}{2} S c_R V_z \frac{1}{m} - g_{r0} \frac{R_s^2}{r^3} z + \Omega_z^2 + 2\Omega V_x \end{aligned} \quad (3.47)$$

下面来确定火箭在所选直角坐标系中的位置与其地球中心纬度和经度之间的关系。由图 1.9 可得:

$$x = r \cos \varphi_{ru} \sin \lambda \quad y = r \sin \varphi_{ru} \quad z = r \cos \varphi_{ru} \cos \lambda \quad (3.48)$$

将(3.48)式对时间微分二次, 再将所得到的微分方程按照关系式(3.47)进行变换, 并注意到

$$\begin{aligned} V_x &= \dot{x} & V_y &= \dot{y} & V_z &= \dot{z}; \\ \dot{V}_x &= \ddot{x} & \dot{V}_y &= \ddot{y} & \dot{V}_z &= \ddot{z} \end{aligned}$$

得到描写火箭在固连地心球坐标系上相对运动轨迹的微分方程组。考虑到该方程组很复杂,将它写成隐式关系:

$$\begin{aligned} r &= f_1(r, \varphi_m, \lambda, \dot{r}, \dot{\varphi}_m, \dot{\lambda}, t); \\ \varphi_m &= f_2(r, \varphi_m, \lambda, \dot{r}, \dot{\varphi}_m, \dot{\lambda}, t); \\ \lambda &= f_3(r, \varphi_m, \lambda, \dot{r}, \dot{\varphi}_m, \dot{\lambda}, t) \end{aligned} \quad (3.49)$$

显然,该方程求解很困难。但是,利用电子计算机是可以实现的。

现在转回到建立考虑地球旋转时飞行器质心相对弹道坐标系的质心运动动力学方程的问题。

注意到, OY_k 轴与通过飞行器质心的铅垂线一起在空中相对与地球固连的坐标系旋转。取基准地球坐标系 $O_g X_g Y_g Z_g$ 为地球固连坐标系,根据式(2.46)

$$\frac{dV_k}{dt} = \frac{d^* V_k}{dt} + \omega \times V_k.$$

在现在的情况下, ω ——弹道坐标系相对地球的角速度矢量;

$\frac{d^* V_k}{dt}$ ——在弹道坐标系下矢量 V_k 的相对导数。

将该式代入式(2.45)得

$$m \left[\frac{d^* V_k}{dt} + \omega \times V_k \right] = \Sigma F + \Sigma F_r = ma_{\text{неп}} + ma_{\text{коп}} \quad (3.50)$$

弹道坐标系相对地球的角速度矢量等于以下角速度矢量之和:

$$\omega = \dot{\Psi} + \dot{\theta} + \dot{\lambda} + \dot{\varphi}_m \quad (3.51)$$

式中, $\dot{\lambda}$ 和 $\dot{\varphi}_m$ ——决定飞行器质心在地球中心坐标系下相对位置的经度和纬度变化量的角速度矢量; $\dot{\Psi}$ 和 $\dot{\theta}$ ——方向角和弹道倾角关于时间的导数矢量。

图 3.2 给出了当标准坐标系平面系 $OX_k Y_k$ 通过地球的旋转轴时角坐标 φ_m 与 OY_g 轴的关系。弹道系和基准地球坐标系之间的位置关系由图 1.7 和图 1.12 给出。

利用文献[65]中的矩阵方法可以确定出角速度矢在弹道坐标系上的投影。因为角速度矢量可用沿标准坐标系的分量表示,即有如下形式(图 3.2):

$$\dot{\lambda} = \dot{\lambda} (x_g^0 \cos \varphi_{ru} + y_g^0 \sin \varphi_{ru}) \quad (3.52)$$

再注意到矢量 $\dot{\varphi}_{ru}$ 垂直于 φ_{ru} 角的平面，于是

$$\dot{\varphi}_g = -z_g^0 \dot{\varphi}_{ru} \quad (3.53)$$

利用从基准地球坐标系向弹道坐标系的矩阵转换(参看图 1.4) 可得矢量 $\dot{\varphi}_{ru}$ 和 $\dot{\lambda}$ 在弹道坐标系下的分量表示形式^[85]：

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \dot{\lambda} [x_k^0 (\cos \varphi_{ru} \cos \Psi \cos \theta + \sin \varphi_{ru} \sin \theta) + \\ &\quad y_k^0 (-\cos \varphi_{ru} \cos \Psi \sin \theta + \sin \varphi_{ru} \cos \theta) + z_k^0 (\cos \varphi_{ru} \sin \Psi)]; \\ \dot{\varphi}_{ru} &= -\dot{\varphi}_{ru} [x_k^0 (-\sin \Psi \cos \theta) + y_k^0 (\sin \Psi \sin \theta) + z_k^0 \cos \Psi] \end{aligned} \quad (3.54)$$

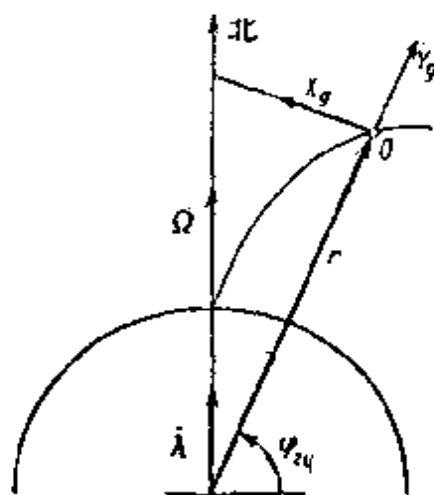


图3.2 矢量 Ω, λ 与 OX_g, OY_g 轴之间的位置关系

矢量 $\dot{\Psi}$ 和 $\dot{\theta}$ 可以表示成弹道坐标系上的投影：

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= \dot{\Psi} (x_k^0 \sin \theta + y_k^0 \cos \theta); \\ \dot{\theta} &= \dot{\theta} z_k^0 \end{aligned} \quad (3.55)$$

将得到的关系式代入式(3.51)中，可以得到矢量 ω 在弹道坐标系上的投影：

$$\begin{aligned} \omega_{x_k} &= \dot{\lambda} (\cos \varphi_{ru} \cos \Psi \cos \theta + \sin \varphi_{ru} \sin \theta) + \dot{\varphi}_{ru} \sin \Psi \cos \theta + \dot{\Psi} \sin \theta; \\ \omega_{y_k} &= \dot{\lambda} (-\cos \varphi_{ru} \cos \Psi \sin \theta + \sin \varphi_{ru} \cos \theta) - \dot{\varphi}_{ru} \sin \Psi \sin \theta \\ &\quad + \dot{\Psi} \cos \theta; \\ \omega_{z_k} &= \dot{\lambda} (\cos \varphi_{ru} \sin \Psi - \dot{\varphi}_{ru} \cos \Psi + \dot{\theta}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

矢量等式(2.45) 左边部分的乘积由相对加速度确定，可以表示成沿相应弹道坐标系下的矢量积的形式：

$$a_k = \frac{d^* V_k}{dt} + \omega \times V_k = \frac{d^* V_k}{dt} + \begin{bmatrix} x_k^0 & y_k^0 & z_k^0 \\ \omega_{x_k} & \omega_{y_k} & \omega_{z_k} \\ V_{kx_k} & V_{ky_k} & V_{kz_k} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

对于弹道坐标系,有

$$\frac{d^* \mathbf{V}_k}{dt} = \dot{V}_k \mathbf{x}_k^0 \quad V_{kx_k} = V_k \quad V_{ky_k} = V_{kz_k} = 0$$

相对加速度的投影分别为

$$a_{kx_k} = \dot{V}_k \quad a_{ky_k} = V_k \omega_{z_k} \quad a_{kz_k} = -V_k \omega_{y_k}$$

将角速度分量式(3.56)代入上式可得

$$\begin{aligned} a_{kx_k} &= \dot{V}_k; \\ a_{ky_k} &= V_k (\dot{\lambda} \cos \varphi_{ru} \sin \Psi - \dot{\varphi}_{ru} \cos \Psi + \dot{\theta}); \\ a_{kz_k} &= -V_k [-\dot{\lambda} (\cos \varphi_{ru} \cos \Psi \sin \theta + \sin \varphi_{ru} \cos \theta) \\ &\quad - \dot{\varphi}_{ru} \sin \Psi \sin \theta + \dot{\Psi} \cos \theta] \end{aligned} \quad (3.58)$$

现在将角速度 $\dot{\varphi}_{ru}$ 和 $\dot{\lambda}$ 用相对速度 V_k 在基准地球坐标系上的投影来表示:

$$\dot{\varphi}_{ru} = \frac{V_k}{r} \cos \theta \cos \Psi \quad \dot{\lambda} = -\frac{V_k}{r} \frac{\cos \theta \sin \Psi}{\cos \varphi_{ru}} \quad (3.59)$$

将它们代入式(3.58),得到方程(2.45)的左边部分的加速度在弹道坐标系轴上的投影:

$$\begin{aligned} \frac{dV_{kx_k}}{dt} &= \dot{V}_k \quad \frac{dV_{ky_k}}{dt} = V_k \dot{\theta} - \frac{V_k^2}{r} \cos \theta; \\ \frac{dV_{kz_k}}{dt} &= -V_k \dot{\Psi} \cos \theta + \frac{V_k^2}{r} \tan \varphi_{ru} \sin \Psi \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (3.60)$$

将方程(2.45)的右边各项投影到同样的轴系上。推力和控制力的投影已由式(3.5)给出。空气动力的投影分量已由式(3.4)给出。

当考虑到地球为椭球形的,在阻力 R_A 分量中出现的空气密度,需要由当地高度 H 来确定:

$$H = r - a \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos \varphi_{ru}}} \quad (3.61)$$

式中, a 和 e —— 椭球形地球相应的长半轴和偏心距。

牵连加速度和科氏加速度在地球中心坐标系上的投影由式(1.64)和(1.66)给出,该坐标系的 $O_0 Y_0$ 轴与地球旋转轴重合。要确定上述加速度在弹道坐标系上的投影是十分复杂的。

在公式(1.44)和(1.47)中,已将地球引力加速度和牵连加速度

合成为自由落体加速度,并在由径矢 r 和矢量 Ω 组成的斜角坐标系上表示出来。若用 g_r 和 g_{Ω} 表示相应的地球引力加速度分量,由公式 (1.47) 可得

$$g_r = g_{rr} + \Omega^2 r \quad g_{\Omega} = g_{\Omega\Omega} - \Omega^2 r \sin \varphi_{\Omega} \quad (3.62)$$

为了转换到弹道坐标系,要利用确定 $\dot{\Psi}$ 和 $\dot{\lambda}$ 在该坐标系投影的方向余弦公式(参看公式(3.54)和(3.56))。考虑到负号的意义表示矢量 g_r, g_{Ω} 与 r, Ω 反向,得

$$\begin{aligned} g_{x_k} &= -g_r \sin \theta - g_{\Omega} (\cos \varphi_{\Omega} \cos \Psi \cos \theta + \sin \varphi_{\Omega} \sin \theta); \\ g_{y_k} &= -g_r \cos \theta - g_{\Omega} (-\cos \varphi_{\Omega} \cos \Psi \sin \theta + \sin \varphi_{\Omega} \cos \theta); \\ g_{z_k} &= -g_{\Omega} \cos \varphi_{\Omega} \sin \Psi \end{aligned} \quad (3.63)$$

科氏力在弹道坐标系上的投影由下式确定:

$$ma_{\text{kop}} = 2m(\Omega \times V_k) = 2m \begin{vmatrix} x_k^0 & y_k^0 & z_k^0 \\ \Omega_{x_k} & \Omega_{y_k} & \Omega_{z_k} \\ V_k & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.64)$$

因为矢量 Ω 的方向与 $\dot{\lambda}$ 重合(参看图 3.2),则利用以前得到的公式 (3.54) 可以求得矢量 Ω 的投影:

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega [x_k^0 (\cos \varphi_{\Omega} \cos \Psi \cos \theta + \sin \varphi_{\Omega} \sin \theta) + \\ &\quad y_k^0 (-\cos \varphi_{\Omega} \cos \Psi \sin \theta + \sin \varphi_{\Omega} \cos \theta) + \\ &\quad z_k^0 (\cos \varphi_{\Omega} \sin \Psi)] \end{aligned} \quad (3.65)$$

分量 $V_{ky_k} = V_{kz_k} = 0$ 。所以,科氏力在弹道坐标系上的投影式为:

$$\begin{aligned} ma_{\text{kop}x_k} &= 0; \\ ma_{\text{kop}y_k} &= 2V_k \Omega_{x_k} = 2V_k \Omega \cos \varphi_{\Omega} \sin \Psi; \\ ma_{\text{kop}z_k} &= -2V_k \Omega_{y_k} = 2V_k \Omega (\cos \varphi_{\Omega} \cos \Psi \sin \theta + \sin \varphi_{\Omega} \cos \theta) \end{aligned} \quad (3.66)$$

为了使公式的形式简化,利用公式(3.4)和(3.63),将各作用力在弹道坐标系轴上的分量统一表示成:

$$\begin{aligned} F_{x_k} &= P_{x_k} + \Sigma X_{p_k} + R_{Ax_k} + mg_{x_k}; \\ F_{y_k} &= P_{y_k} + \Sigma Y_{p_k} + R_{Ay_k} + mg_{y_k}; \\ F_{z_k} &= P_{z_k} + \Sigma Z_{p_k} + R_{Az_k} + mg_{z_k} \end{aligned}$$

利用公式(2.46)和各相加项的公式,可以在弹道坐标系上写出计及地球旋转和形状影响的飞行器质心运动方程组。

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{F_{zs}}{m} + g_r \sin\theta - g_n (\cos\varphi_{ru} \cos\Psi \cos\theta + \sin\varphi_{ru} \sin\theta); \\ \dot{\theta} &= \frac{F_{ys}}{m} - \frac{g_r}{V} \cos\theta - \frac{g_n}{V} (-\cos\varphi_{ru} \cos\Psi \sin\theta + \sin\varphi_{ru} \cos\theta) + \\ &\quad \frac{V}{r} \cos\theta - 2\Omega \cos\varphi_{ru} \sin\Psi; \\ \dot{\Psi} &= -\frac{F_{zs}}{mV \cos\theta} + \frac{g_n}{V} \cdot \frac{\cos\varphi_{ru} \sin\psi}{\cos\theta} + \frac{V}{r} \operatorname{tg}\varphi_{ru} \sin\Psi \cos\theta + \\ &\quad 2\Omega (\cos\varphi_{ru} \cos\Psi \tan\theta - \sin\varphi_{ru})\end{aligned}\quad (3.67)$$

对上述三个方程还需补充方程(3.59)和显式方程 $r = V \sin\theta$; $m = m_0 - |m|t$ 。

§ 3.2 在弹道主动段上飞行器纵向和侧向运动方程组的简化

3.2.1 将运动分解成在纵向平面和侧向平面中的运动

为了将火箭复杂的运动分解在纵向平面和侧向平面上,首先需要假设纵向运动不依赖于侧向运动。根据这个假设,为了确定纵向运动的特性,在方程中只计及那些作用在射击面内的力和力矩。在确定火箭的侧向运动特性时,认为侧向运动与纵向运动无关是不可能的,因为在方程中包含了全部力和力矩,在某种程度上它们将使火箭偏离射击平面。采用以前的假设,即忽略二阶小量项,利用已推导出的模型,可以得到描述有控火箭弹在纵向平面上运动的方程组。

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{m} [(P_x - X_p) \cos\alpha - (P_y + Y_p) \sin\alpha - X_k - Q \sin\theta]; \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{mV} [(P_x - X_p) \sin\alpha + (P_y + Y_p) \cos\alpha + Y_k - Q \cos\theta]; \\ I_x \dot{\omega}_x &= M_x + M_{px};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\vartheta} &= \omega_z; \\
\sin \vartheta &= \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha = \sin(\theta + \alpha); \\
x_E &= V \cos \theta; \\
y_E &= V \sin \theta; \\
r &= \sqrt{x_E^2 + y_E^2}; \\
m &= m_0 - \int_0^t |\dot{m}| dt
\end{aligned} \tag{3.68}$$

在方程组(3.68)中的三角函数方程,给出了角度 ϑ, θ 和 α 之间的关系。在许多情况下它可以用下式来代替:

$$\vartheta = \theta + \alpha \tag{3.69}$$

在头两个方程中,如果控制力未知,则需要补充控制方程。这样得到的方程组是封闭的,就可以求解。

为了确定火箭侧向运动特性,需要写出侧向运动方程组。设飞行时无倾斜角($\gamma = 0$),则

$$\begin{aligned}
\dot{\Psi} &= -\frac{1}{mV \cos \theta} [-(P_x - X_p) \cos \gamma_a \sin \beta + (P_y + Y_p) \sin \gamma_a \\
&\quad + (P_z + Z_p) \cos \beta + Z_a]; \\
I_y \dot{\omega}_y &= M_y + M_{py}; \\
\dot{\psi} &= \frac{1}{\cos \vartheta} \omega_y; \\
\sin \psi &= \sin \Psi \cos \beta \cos \gamma_a + \cos \Psi (\sin \beta \cos \theta + \sin \gamma_a \sin \theta \cos \beta); \\
\sin \gamma_a &= \tan \beta \tan \theta; \\
\dot{z}_E &= -V \cos \theta \sin \Psi
\end{aligned} \tag{3.70}$$

方程组(3.70)仅仅描写了火箭的侧向运动,当未计算出纵向运动基本诸元时该方程组本身不可能求解。例如,方程组(3.70)的第一个方程是确定侧向运动参数的基本方程,但它的求解只是在已知 $m(t)$ 、 $V(t)$ 和 $\theta(t)$ 后才有可能。如果速度和飞行高度未知,作用在侧向平面内的空气动力和力矩也无法确定。

得到的方程组(3.70)是复杂的,此外,在大 θ 角情况下必须对 γ_a

公式的应用范围进行检查。如果采用人工的方法并在确定火箭运动角变量的方程中取 $\vartheta = \theta = 0$, 则可以对方程组进行简化。这样就允许作更进一步的假设, 即假设火箭在水平面内飞行, 它的纵轴与质心速度矢量构成了 β 角, 而角 $\gamma_s = 0$ 。

为了使求解结果更接近实际, 在确定火箭质心在假想水平面上的运动轨迹的方程中, 火箭的速度应当取 $V \cos \theta$, 而它须在求解火箭质心纵向运动方程组后才能知道。在所作假设的情况下, 由 (3.70) 式可得

$$\begin{aligned}\dot{\Psi} &= -\frac{1}{mV \cos \theta} [-(P_x - X_p) \sin \beta + (P_z + Z_p) \cos \beta + Z_s]; \\ I_y \dot{\omega}_y &= M_y + M_{py}; \\ \dot{\psi} &= \omega_y; \\ \sin \psi &= \sin \Psi \cos \beta + \cos \Psi \sin \beta = \sin(\Psi + \beta); \\ \dot{z}_g &= -V \cos \theta \sin \Psi\end{aligned}\quad (3.71)$$

方程组中的倒数第二式可以用角度和的形式来代替, 即

$$\psi = \Psi + \beta \quad (3.72)$$

如果在第一个方程中控制力未知, 则应补充一个控制方程。

通常, 火箭飞行的控制可以在三个不同的通道上实现, 即俯仰、侧滑和倾斜通道。尽管每个控制通道上可以单独完成一项独立的任务, 但它们的工作是相互有联系的。这种联系具体体现在火箭的动力学特性上, 还体现在运动的动力学和运动学特性上以及它们的交叉影响上。

所以, 在求解有控火箭的运动特性问题时, 只有在预先分析火箭的结构特性、控制系统特性和运动条件的基础上, 研究了它的运动分解的合理性后才能把运动分解成纵向平面运动和侧向平面的运动。

3.2.2 在地球中心引力场中有控火箭弹的纵向运动方程

现在来推导当把地球看作球体时有控弹道式火箭弹在主动段上的质心运动平面弹道方程组。在一级近似的情况下, 可以用自由落体

加速度来部分地计及地球旋转的影响。此时,加速度的方向指向地球中心,其大小类似于以前在地球中心引力场内 g_r 的变化规律一样,取 $g = g_0(\frac{R_s}{r})^2$ 。控制力 X_p 和 Y_p 不准备单独考虑,而将它们纳入迎面阻力和升力的项内。推力的方向沿着火箭的纵轴。在静止的直角坐标系 $OXY(OX_c, Y_c)$ 内来建立运动方程组(参看图 3.3)。速度矢量在 OX 轴上的投影用 u 来表示,在 OY 轴上的投影用 w 来表示。重力在该两轴上的投影相应地表示成 g_x 和 g_y ,且 $g_x = g\sin\gamma$; $g_y = g\cos\gamma$ 。将运动方程投影到给定的坐标系上,再加上一般的运动学关系式和三角函数关系式,显然,由图 3.3 得方程组

$$\frac{du}{dt} = \frac{P\cos(\theta + \alpha) - X_a\cos\theta - Y_a\sin\theta}{m} - g\sin\gamma;$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{P\sin(\theta + \alpha) - X_a\sin\theta + Y_a\cos\theta}{m} - g\cos\gamma;$$

$$\frac{dx}{dt} = u;$$

$$\frac{dy}{dt} = w;$$

$$\tan\theta = \frac{w}{u};$$

$$\tan\gamma = \frac{x}{R_s + y};$$

$$V = \sqrt{u^2 + w^2};$$

$$r = \sqrt{(R_s + y)^2 + x^2};$$

$$g = g_0(R_s/r)^2 \quad (3.73)$$

如果再在上式中补充按程序控制的俯仰角公式 $(\alpha + \theta) = \vartheta = \vartheta_{np}$ 、确定升力的关系式和火箭质量变化方程 $m(t)$,则上面的方程组便可以进行数值积分。

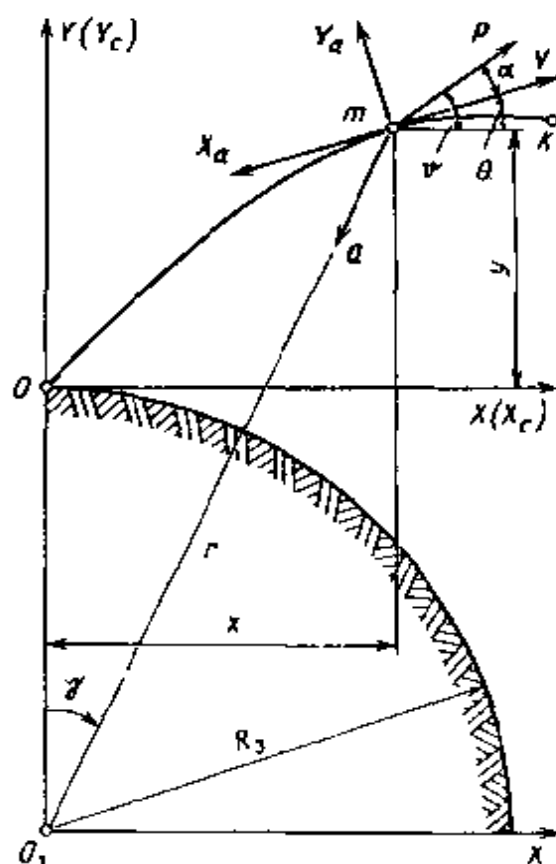


图 3.3 在地球中心引力场内,洲际弹道式火箭弹的受力情况

3.2.3 在地球平面平行引力场里火箭的纵向运动方程

在计算射程不大的弹道时,许多情况下可不计地球的曲率,而地球的旋转可以通过自由落体加速度来近似考虑进去。假设自由落体加速度的大小和方向一定,即认为地球引力场为平面平行引力场。这时,方程组(3.73)中应取 $\gamma = 0$ 。此时弹道主动段的方程组为①:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{P\cos(\theta + \alpha) - X_a\cos\theta - Y_a\sin\theta}{m}; \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{P\cos(\theta + \alpha) - X_a\sin\theta + Y_a\cos\theta}{m} - g; \\ \frac{dy}{dt} &= w; \\ \frac{dx}{dt} &= u; \\ V &= \sqrt{u^2 + w^2}; \\ \theta &= \arctan \frac{w}{u}\end{aligned}\quad (3.74)$$

只要对攻角 α 作相应的限制,可以选择与升力 Y_a 有关的函数作为控制函数。

在没有控制或在因某种原因控制系统关闭的情况下,火箭的飞行就变成无控运动。在这种情况下,可以从方程组(2.63)中去掉与控制作用有关的项后得到质心运动方程组。在大多数情况下,无控火箭的推力矢量与火箭纵轴重合,即 $\xi = 0$ 。如果考虑到攻角较小, $\cos\alpha \approx 1$, $\sin\alpha \approx 0$, $Y_a \approx 0$,并补充一般的运动学关系式,便可以得到无控火箭弹质心运动的方程组:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{P - X_a}{m} - g\sin\theta; \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{g\cos\theta}{V};\end{aligned}$$

① 原文第一、二方程右边分子中的第一项误为 $(P - X)\cos\theta$ 和 $(P - X_a)\sin\theta$ 。

——译者

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= V \sin \theta; \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta\end{aligned}\quad (3.75)$$

在所作假设的情况下,认为无控火箭的质量集中在质心,推力矢量和迎面阻力矢量也可认为作用在质量为 m 的质点上。它们与质心速度矢量位于同一直线上(图 3.4)。从图 3.4 可得

$$\frac{du}{dt} = \frac{P - X_a}{m} \cos \theta$$

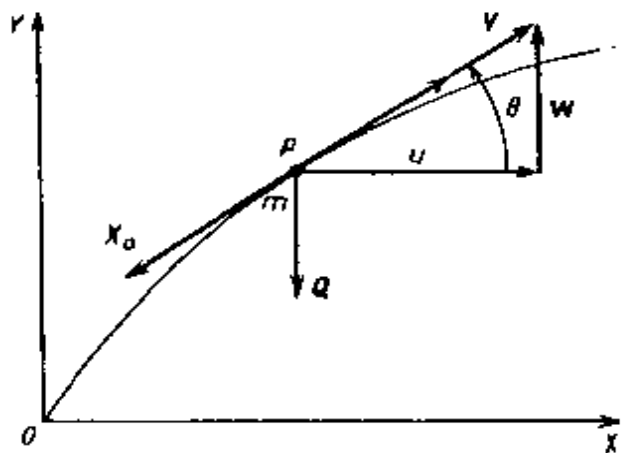


图 3.4 作用在无控火箭弹质心上的力

将方程的右边部分乘以和除以 $m_0 V$, 得 $\frac{du}{dt} = \frac{1}{\mu} (D -$

$E)u$ 。通常记 $\operatorname{tg} \theta = p$, 则 $\frac{dp}{dt} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$ 。利用方程组 (3.75) 的第二个方程, 可得 $\frac{dp}{dt} = -\frac{g}{u}$, 而从第三个方程得 $\frac{dy}{dt} = V \sin \theta \frac{\cos \theta}{\cos \theta} = up$ 。方程组 (3.75) 的第四个方程保留不变, 最后可以得到在形式上比较方便的用于实际计算无控火箭弹主动段弹道的运动方程组:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{1}{\mu} (D - E)u; \\ \frac{dP}{dt} &= -\frac{g}{u}; \\ \frac{dy}{dt} &= up; \\ \frac{dx}{dt} &= u\end{aligned}\quad (3.76)$$

由图 3.4 或者令方程组 (3.74) 中的 $Y_a = 0$, 都同样可得到

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{(P - X_a) \cos \theta}{m} \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{(P - X_a) \sin \theta}{m} - g\end{aligned}$$

表示成 $\sum_{j=1}^m Y_j = Y^\delta \delta$ 。

现在来讨论角度 ϑ 、 θ 和 α 值较小时的稳定的水平飞行情况。取

$$\begin{aligned}\sin \vartheta &= \vartheta & \sin \theta &\approx \theta & \sin \alpha &\approx \alpha; \\ \cos \vartheta &\approx \cos \theta & \approx \cos \alpha &= 1\end{aligned}$$

认为转动运动方程右边部分的力矩和是 α 、 δ 和角速度 $\dot{\vartheta}$ 、 $\dot{\alpha}$ 的函数。在以下的研究任务中只涉及飞行速度为常数时的飞行高度稳定问题。在方程组(3.78)中去掉第二个方程,并将第一和第三个方程进行变换,最后可得

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta}{dt} &= \dot{\vartheta} & \frac{dy}{dt} &= \dot{y}; \\ \frac{d\dot{\vartheta}}{dt} &= \frac{M_z^\alpha \alpha}{I_z} + \frac{M_z^{\dot{\vartheta}} \dot{\vartheta}}{I_z} + \frac{M_z^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha}}{I_z} + \frac{M_z^\delta \delta}{I_z}; \\ \frac{d\dot{y}}{dt} &= \frac{P}{m} \vartheta - \frac{Y^\alpha}{m} \alpha + \frac{Y^\delta}{m} \delta - \frac{X_\alpha}{m} \theta - g\end{aligned}\quad (3.79)$$

利用运动学参数关系式

$$\alpha = \vartheta - \theta \quad \dot{\alpha} = \dot{\vartheta} - \dot{\theta} \quad \dot{y} \approx V \dot{\theta}$$

进行下面的变换。先将(3.79)的最后一式变换成如下形式:

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{y}}{dt} &= \frac{P}{m} \alpha + \frac{P}{m} \theta + \frac{Y^\alpha}{m} \alpha + \frac{Y^\delta}{m} \delta - \frac{X_\alpha}{m} \theta - g \\ &= \frac{P + Y^\alpha}{m} \alpha + \frac{P - X_\alpha}{mV} \dot{y} + \frac{Y^\delta}{m} \delta - g\end{aligned}\quad (3.80)$$

然后作变换

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\vartheta} - \dot{\theta} = \omega_z - \frac{P + Y^\alpha}{mV} \alpha - \frac{P - X_\alpha}{mV^2} \dot{y} - \frac{Y^\delta}{mV} \delta + \frac{g}{V} \quad (3.81)$$

$(P - X_\alpha)/(mV^2)$ 项为小量可以略去,最后可得

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_z - \frac{P + Y^\alpha}{mV} \alpha + \frac{g}{V} - \frac{Y^\delta}{mV} \delta \quad (3.82)$$

方程组(3.79)的第二个方程经变换后得如下形式:

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{\vartheta}}{dt} &= \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{M_z^{\omega_z} + M_z^{\dot{\omega}_z}}{I_z} \omega_z + \left[\frac{M_z^\alpha}{I_z} - \frac{M_z^\alpha (P + Y^\alpha)}{I_z mV} \right] \alpha + \\ &\quad \left[\frac{M_z^\delta}{I_z} - \frac{M_z^\delta Y^\delta}{I_z mV} \right] \delta + \frac{M_z^{\dot{\vartheta}}}{I_z V} g\end{aligned}\quad (3.83)$$

故方程组(3.79)变为如下形式:

$$\begin{aligned} dy/dt &= \dot{y}; \\ \frac{d\dot{y}}{dt} &= \frac{P + Y^a}{m}\alpha + \frac{P - X_a}{mV}\dot{y} + \frac{Y^\delta}{m} - g; \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= \left[\frac{M_z^{\alpha_z} + M_z^a}{I_z}\right]\omega_z + \left[\frac{M_z^a}{I_z} - \frac{M_z^a(P + Y^a)}{I_z mV}\right]\alpha + \\ &\quad \left[\frac{M_z^\delta}{I_z} - \frac{M_z^a Y^\delta}{I_z mV}\right]\delta + \frac{M_z^a}{I_z V}g; \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \omega_z - \frac{P + Y^a}{mV}\alpha + \frac{g}{V} - \frac{Y^\delta}{mV}\delta \end{aligned} \quad (3.84)$$

引入如下记号:

$$\begin{aligned} y &= x_1 & \dot{y} &= x_2 & \vartheta &= x_3 & \dot{\vartheta} = \omega_z &= x_4 \\ \alpha &= x_5 & \dot{\alpha} &= x_6 & \delta &= u \end{aligned}$$

则,经代换后得到形如一阶导数方程组(2.71)类型那样的标准形式的方程如下:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= m^{-1}[(P + Y^a)x_5 + V^{-1}(P - X_a)x_2 + Y^\delta u - mg]; \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4; \\ \frac{dx_4}{dt} &= I_z^{-1}\{[M_z^a + M_z^{\alpha_z}]x_4 - [M_z^a - (mV)^{-1}M_z^a(P + Y^a)]x_5 + [M_z^\delta - (mV)^{-1}M_z^a Y^\delta]u + V^{-1}M_z^a g\}; \\ \frac{dx_5}{dt} &= x_6 = x_4 - (mV)^{-1}(P - Y^a)x_5 - (mV)^{-1}Y^\delta u + V^{-1}g \end{aligned} \quad (3.85)$$

下面,让我们来看一下当角度 ϕ 、 β 和 Ψ 较小(图3.6)时侧向运动的情况。记 $\sin\phi \approx \phi$; $\sin\beta \approx \beta$; $\sin\Psi \approx \Psi$,而这些角度的余弦等于1。

这时,

$$\dot{z} = -V\sin\Psi = -V\Psi \quad (3.86)$$

于是

$$\Psi = -\dot{z}/V \quad (3.87)$$

侧向的侧向运动方程变为如下形式

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{P\psi}{m} + \frac{Z^\beta\beta}{m} + \frac{X_a}{m}\Psi + \frac{Z^\delta\delta}{m} \quad (3.88)$$

$$I_y \frac{d^2\psi}{dt^2} = M_y^\beta\beta + M_y^{\omega_y}\dot{\psi} + \dot{M}_y^\beta\beta + M_y^\delta\delta \quad (3.89)$$

利用角度关系式 $\psi = \beta + \Psi$, 得

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{P - Z^\beta}{m}\psi - \frac{X_a - Z^\beta}{mV}\dot{z} + \frac{Z^\delta}{m}\delta \quad (3.90)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} = & \left[\frac{M_y^{\omega_y} + \dot{M}_y^\beta}{I_y} \right] \psi + \\ & \left[\frac{M_y^\beta}{I_y} + \frac{\dot{M}_y^\beta(-P + Z^\beta)}{I_y m V} \right] \psi + \\ & \left[\frac{M_y^\beta}{I_y V} - \frac{\dot{M}_y^\beta(-X_a + Z^\beta)}{I_y m V^2} \right] \dot{z} + \\ & \left[\frac{M_y^\delta}{I_y} + \frac{\dot{M}_y^\beta Z^\delta}{I_y m V} \right] \delta \end{aligned} \quad (3.91)$$

将式(3.86)表示的 \dot{z} 代入上式(3.91)得

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\omega_y}{dt} = & \left[\frac{M_y^{\omega_y} + \dot{M}_y^\beta}{I_y} \right] \psi + \left[\frac{M_y^\beta}{I_y} + \frac{\dot{M}_y^\beta(-P + Z^\beta)}{I_y m V} \right] \psi + \\ & \left[\frac{M_y^\beta}{I_y V} + \frac{\dot{M}_y^\beta(-X_a + Z^\beta)}{I_y m V^2} \right] (-V\Psi) + \left[\frac{M_y^\delta}{I_y} + \frac{\dot{M}_y^\beta Z^\delta}{I_y m V} \right] \delta = \\ & \left[\frac{M_y^{\omega_y} + \dot{M}_y^\beta}{I_y} \right] \psi + \left[\frac{M_y^\beta}{I_y} + \frac{\dot{M}_y^\beta(-P + Z^\beta)}{I_y m V} \right] \beta + \\ & \left[\frac{M_y^\delta}{I_y} + \frac{\dot{M}_y^\beta Z^\delta}{I_y m V} \right] \delta \end{aligned} \quad (3.92)$$

而在式(3.90)中, ψ 用 $\beta + \Psi$ 代替得

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{P - Z^\beta}{m}\beta - \frac{P - Z^\beta}{m}\Psi - \frac{X_a - Z^\beta}{mV}\dot{z} + \frac{Z^\delta}{m}\delta =$$

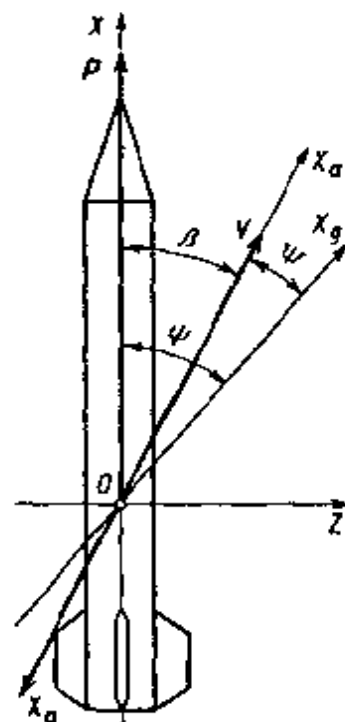


图 3.6 在侧向平面内作用在飞行器上的力和角度示意图

$$\frac{-P + Z^\beta}{m}\beta + \frac{P - X_a}{mV}\dot{z} + \frac{Z^\delta}{m}\delta \quad (3.93)$$

因为

$$\dot{\beta} = \dot{\phi} - \dot{\psi} \quad (3.94)$$

得

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} &= \omega_y + \frac{1}{V} \cdot \frac{dz}{dt} = \omega_y + \frac{1}{V} \left[\frac{-P + Z^\beta}{m}\beta + \frac{P - X_a}{mV}\dot{z} + \frac{Z^\delta}{m}\delta \right] \\ &= \omega_y + \frac{-P + Z^\beta}{mV}\beta + \frac{P - X_a}{mV^2}\dot{z} + \frac{Z^\delta}{mV}\delta \end{aligned} \quad (3.95)$$

舍去小量 $\dot{z}(P - X_a)/(mV^2)$, 最后得

$$\frac{d\beta}{dt} = \omega_y + \frac{-P + Z^\beta}{mV}\beta + \frac{Z^\delta}{mV}\delta \quad (3.96)$$

因此, 侧向运动线性方程组有如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \dot{z}; \\ \frac{d\dot{z}}{dt} &= \frac{P - X_a}{mV}\dot{z} - \frac{P - Z^\beta}{m}\beta + \frac{Z^\delta}{m}\delta; \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= \left[\frac{M_y^\omega + \dot{M}_y^\beta}{I_y} \right] \omega_y + \left[\frac{M_y^\beta}{I_y} + \frac{\dot{M}_y^\beta(-P + Z^\beta)}{I_y m V} \right] \beta + \\ &\quad \left[\frac{M_y^\delta}{I_y} + \frac{M_y^\beta + Z^\delta}{I_y m V} \right] \delta; \\ \frac{d\beta}{dt} &= \omega_y + \frac{-P + Z^\beta}{mV}\beta + \frac{Z^\delta}{mV}\delta \end{aligned} \quad (3.97)$$

记 $z = x_1$; $\dot{z} = x_2$; $\phi = x_3$; $\dot{\phi} = x_4$; $\beta = x_5$; $\dot{\beta} = x_6$; $\delta = u$, 代入得

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{P - X_a}{mV}x_2 - \frac{P - Z^\beta}{m}x_5 + \frac{Z^\delta}{m}u; \\ dx_3/dt &= x_4; \\ \frac{dx_4}{dt} &= \left[\frac{M_y^\omega + \dot{M}_y^\beta}{I_y} \right] x_4 + \left[\frac{M_y^\beta}{I_y} + \frac{\dot{M}_y^\beta(-P + Z^\beta)}{I_y m V} \right] x_5 + \\ &\quad \left[\frac{M_y^\delta}{I_y} + \frac{\dot{M}_y^\beta Z^\delta}{I_y m V} \right] u; \end{aligned}$$

$$\frac{dx_5}{dt} = x_6 = x_4 + \frac{-P + Z^\beta}{mV} \beta + \frac{Z^\beta}{mV} u \quad (3.98)$$

3.2.5 无量纲化自变量的运动方程组

为了更大程度地简化求解外弹道问题的过程,应用各种各样的计算表格缩短解算的时间,需要对方程组进行改造,使里面的变量采用无量纲的形式。

对于无控火箭质心运动方程组,利用 λ 作为自变量

$$\lambda = \frac{\int_0^t Q_{\text{cek}} dt}{Q_0} \quad (3.99)$$

它是已燃烧的燃料重量与火箭初始重量之比。取方程组(3.75)的第一个方程,将 P 和 X_a 的表达式代入,并考虑到式(3.99)的代换

$$dt = \frac{Q_0}{Q_{\text{cek}}} d\lambda \quad (3.100)$$

替代后得

$$\frac{Q_{\text{cek}}}{Q_0} \cdot \frac{dV}{d\lambda} = \frac{Q_{\text{cek}} W_e}{Q} - cH(y)F(V) - g\sin\theta \quad (3.101)$$

火箭的瞬时重量为 $Q = Q_0 - \int_0^t Q_{\text{cek}} dt$, 相对重量为

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\int_0^t Q_{\text{cek}} dt}{Q_0} = 1 - \lambda = \frac{m}{m_0} = \mu \quad (3.102)$$

火箭的弹道系数可以用相对重量来表示

$$c = \frac{id^2}{Q} \times 10^3 = \frac{id^2 \times 10^3}{Q_0(1-\lambda)} = \frac{c_0}{1-\lambda} = \frac{c_0}{\mu} \quad (3.103)$$

式中 $c_0 = \frac{id^2}{Q_0} \times 10^3$ 。

将式(3.101)的左边和右边同除以 Q_{cek}/Q_0 , 将方程组(3.75)的后三个方程中的 dt 用公式(3.100)代换,得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\lambda} &= \frac{W_e}{1-\lambda} - \left[\frac{c_0 H(y) F(V)}{1-\lambda} + g\sin\theta \right] \frac{Q_0}{Q_{\text{cek}}}; \\ \frac{d\theta}{d\lambda} &= - \frac{Q_0}{Q_{\text{cek}}} \cdot \frac{g\cos\theta}{V}; \\ \frac{dx}{d\lambda} &= \frac{Q_0}{Q_{\text{cek}}} V \cos\theta; \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{Q_0}{Q_{\text{дек}}} V \sin \theta \quad (3.104)$$

该方程组将应用在弹道设计中。将它积分之, 可以看到, 第一个方程的第一项就是 К. Э. 齐奥尔科夫斯基确定的当不考虑空气阻力和重力时火箭运动的速度公式, 第二项考虑了空气阻力的影响, 第三项为重力的影响。

对于有控火箭的运动方程组, 将有几种不同的表示形式。当质量秒流量为常数时 $|\dot{m}| = \text{const}$, 由公式(3.25) 得 $m = m_0 - |\dot{m}|t$ 。在这种情况下, 常常选择火箭的相对质量 $\mu = \frac{m}{m_0} = 1 - \frac{|\dot{m}|}{m_0}t$ 作为自变量。

记 $\tau_\varphi = m_0/|\dot{m}|$, 则 $t = \tau_\varphi(1 - \mu)$, 量 τ_φ 有时间的量纲(s), 称之为虚拟时间。由上一式可得 $dt = -\tau_\varphi d\mu$, 并代入方程组(3.75) 中进行替代后, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\mu} &= - \frac{P - X_a}{\mu m_0} \tau_\varphi + g \tau_\varphi \sin \theta; \\ \frac{dy}{d\mu} &= - V \tau_\varphi \sin \theta; \\ \frac{dx}{d\mu} &= - V \tau_\varphi \cos \theta \end{aligned} \quad (3.105)$$

显然, 这里将方程组(3.75) 中的第二个方程舍去了, 并用按程序变化的俯仰角来代替它, 即 $\theta = \theta_{np}(\mu)$ 。

3.2.6 以过载形式表示的运动方程

在火箭按程序飞行过程中或者在火箭的导引飞行过程中(即在完成机动的过程中) 需要改变火箭质心运动速度的大小和方向。因而, 所谓火箭的机动性可理解为飞行速度在大小和方向上改变的快慢程度。所有类型的飞行器、火箭和弹丸, 对其机动性的估计可借助过载来表示。过载就像速度一样, 是一个矢量。过载是作用在飞行器上的主动力(除引力和惯性力以外的其它力的合力) 与飞行器质量和自由落体加速度的乘积之比。

$$n = \frac{R}{mg} = \frac{R_A + P}{mg} \quad (3.106)$$

过载矢量的模 n 是一个无量纲数,用它来评定机动性是较方便的。过载大体上由火箭的能量储备、空气动力性能、控制机构和控制系统的效率所确定。总的过载矢量可以用它在给定坐标系各轴上的分量来确定。在固连坐标系上有

$$n_x = \frac{R_x}{mg} \quad n_y = \frac{R_y}{mg} \quad n_z = \frac{R_z}{mg} \quad (3.107)$$

它们相应地分别表示纵向过载、法向过载和横向过载。在速度坐标系上有

$$n_{x_a} = \frac{R_{x_a}}{mg} \quad n_{y_a} = \frac{R_{y_a}}{mg} \quad n_{z_a} = \frac{R_{z_a}}{mg} \quad (3.108)$$

它们相应地表示切向过载、法向过载和侧向过载。

切向过载表征了速度的大小改变,与速度矢量垂直的过载表征了飞行器速度矢量的方向变化。后者即表征了机动特性。在分析飞行器机动特性的保证条件时通常只用过载 n_{z_a} 和 n_{y_a} 。

下面让我们来建立火箭机动飞行的形式与实现机动所必须的过载之间的关系。在进行控制系统的设计时,首先要进行详细的分析,其目的是确定所要求的弹道(即机动)形式,使得它能允许被设计的火箭完成给定的战术技术要求。

图 3.7 给出了在垂直平面内火箭接近机动目标时的弹道,该弹道可按事先给定的目标轨道和火箭速度按选择的制导方法作出。尽管没有给出决定弹道形状的全部力,但可以确定出弹道的特性,由这些特性可以反过来求出作用在火箭上的力。火箭机动飞行的这种运动学特性的体现是弹道曲率半径 r 。

从图 3.7 可以看出,图中所示的火箭向目标逼近的弹道具有曲率逐渐增加的特性,或者说具有曲率半径逐渐减小的特性,即从弹道初始点处曲率半径 r_0 减小至火箭与目标相遇点处的曲率半径 r_B 。应用弹道坐标系的方程可以写出如下曲率半径的表达式:

$$r_{y_k} = \frac{dS}{d\theta} = V_k \left[\frac{d\theta}{dt} \right]^{-1} \quad (3.109)$$

$$r_{z_k} = - \frac{dS}{d\Psi} = V_k \left[- \frac{d\Psi}{dt} \right]^{-1} \quad (3.110)$$

在这种情况下,曲率半径的方向是从弹道上的点指向曲率中心。

当该方向与相应的坐标轴的正向一致时取 $r > 0$ 。

在表达式(3.109)和(3.110)中出现的角速度 $d\theta/dt$ 和 $d\Psi/dt$ ，可根据火箭质心运动微分方程组通过相应过载来表示。

设攻角 α 的平面为铅垂面，而侧滑角 β 的平面为与之垂直的侧向平面。于是由图 3.8 可以写出在弹道坐标系中无控火箭弹质心的

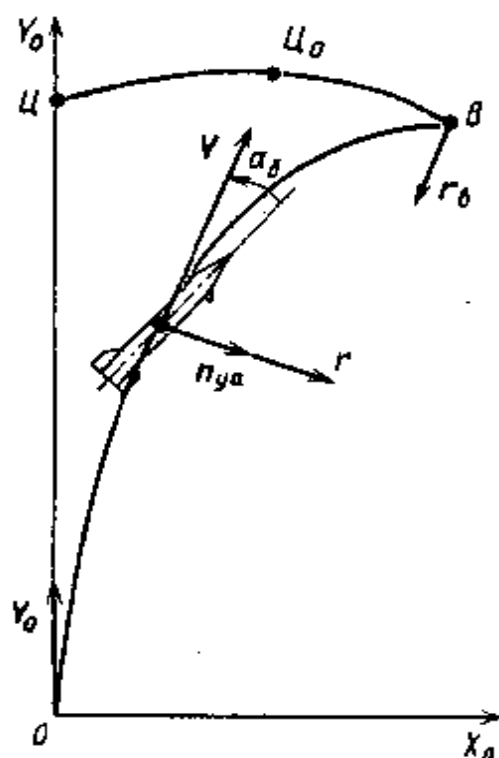


图 3.7 有控火箭按曲线接近目标时
弹道曲率半径的变化

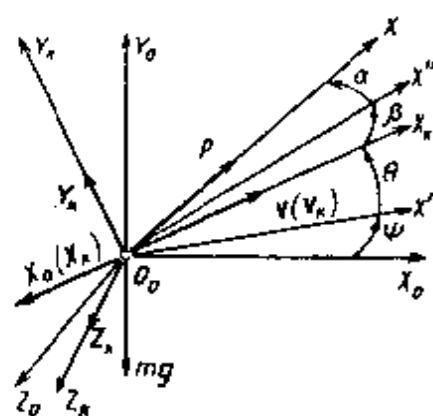


图 3.8 建立过载运动方程时
所选坐标系的相互关系

纵向运动和侧向运动方程组。在这种情况下，控制力与空气动力可统一合并表示为 $-X_a, Y_k, Z_k$ ；将方程的左右两边同除以火箭重量 $Q = mg$ ，最后可得

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{dV}{dt} = \frac{P \cos \alpha \cos \beta - X_a}{mg} - \sin \theta; \quad (3.111)$$

$$\frac{V}{g} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{P \sin \alpha + Y_k}{mg} - \cos \theta;$$

$$- \frac{V}{g} \cos \theta \frac{d\Psi}{dt} = \frac{-P \cos \alpha \sin \beta + Z_k}{mg} \quad (3.112)$$

根据定义，从上面的方程可以得到过载的表达式。为使公式简化，可假设角度为小量， $\sin \alpha \approx \alpha$ ； $\sin \beta \approx \beta$ ； $\cos \alpha \approx \cos \beta \approx 1$ ，于是过载矢量在弹道坐标系上的投影为

$$\begin{aligned}
n_{x_k} &= \frac{P \cos \alpha \cos \beta - X_a}{mg} \approx \frac{P - X_a}{mg}; \\
n_{y_k} &= \frac{P \sin \alpha + Y_k}{mg} \approx \frac{P \alpha + Y_k}{mg}; \\
n_{z_k} &= \frac{-P \cos \alpha \sin \beta + Z_k}{mg} \approx \frac{-P \beta + Z_k}{mg} \quad (3.113)
\end{aligned}$$

将过载矢量的投影代入公式(3.111), (3.112)中,得

$$\begin{aligned}
n_{x_k} &= \frac{1}{g} \cdot \frac{dV}{dt} + \sin \theta; \\
n_{y_k} &= \frac{V}{g} \frac{d\theta}{dt} + \cos \theta; \\
n_{z_k} &= -\frac{V}{g} \cos \theta \frac{d\Psi}{dt} \quad (3.114)
\end{aligned}$$

由此得
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{g}{V} (n_{y_k} - \cos \theta) \quad \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{g}{V \cos \theta} n_{z_k} \quad (3.115)$$

将式(3.115)分别代入曲率半径方程(3.109)和(3.110)中,得

$$n_{y_k} = \frac{1}{r_{y_k}} \cdot \frac{V^2}{g} + \cos \theta \quad (3.116)$$

$$n_{z_k} = \frac{1}{r_{z_k}} \cdot \frac{V^2 \cos \theta}{g} \quad (3.117)$$

弹道参数 V, θ, Ψ 确定了速度矢量的大小和方向,而由它们导出的过载则表示飞行器改变其质心运动速度大小和方向的能力。

关系式(3.116)和(3.117)表明,只有飞行器具备了足够的过载 n_{y_k}, n_{z_k} , 它才可能作曲率半径为 r 的机动飞行,并且在其它条件相同的情况下,曲率半径愈小,表示机动飞行的机动性愈好,但所需的法向过载愈大。在进行过载的研究时需确定所谓**需用过载**的值,它是为了得到给定弹道形状所必需提供的过载量。为了计算需用过载,须按照公式(3.109)和(3.110)确定出具有最小曲率半径的弹道轨迹,对于这样的弹道如果已确定出了函数 $V(t), \theta(t)$ 和 $\Psi(t)$, 则可按公式(3.114)计算出需用过载来。

在控制舵最大偏转情况下,飞行器保持平衡可能具有的过载称为**可用过载**。可用过载也就是火箭可能获得的最大过载,应当注意的是,在确定可用过载时,应该仔细分析它对舱内控制仪器工作的影响,对火箭壳体和部件强度的影响。火箭保持平衡时可用过载的正常

最大值是在攻角和侧滑角取最大值时达到的[参看式(3.113)]。

为了实现火箭按预定的程序弹道或导引弹道飞行,应使飞行必须的需用过载小于或(在极限情况下)等于火箭能够获得的可用过载。即

$$n_{y_k T} \leq n_{y_k P} \quad n_{z_k T} \leq n_{z_k P} \quad (3.118)$$

下标“ T ”表示需用过载,“ P ”表示可用过载。

但是,条件式(3.118)不是充分的。在实际飞行过程中,火箭的运动总是伴随有各种类型的短期或者长期的扰动,这些扰动将使火箭偏离计算弹道。为了保证火箭运动的稳定性,它的控制系统应保证能抵消这些扰动。

因而,在确定需用过载和可用过载之间的关系时,必须有一个过载储备量 $n_{y_k z}$ 和 $n_{z_k z}$ 。该过载储备量是在火箭运动中存在偶然扰动时为实现火箭预定飞行所必须的。在此情况下,条件式(3.118)变成如下形式:

$$n_{y_k T} + n_{y_k z} \leq n_{y_k P} \quad n_{z_k T} + n_{z_k z} \leq n_{z_k P} \quad (3.119)$$

§ 3.3 有控和无控火箭在弹道被动段上运动的数学模型

3.3.1 常质量火箭在稠密大气层中的自由运动方程组

常质量火箭在稠密大气层中自由飞行时其上作用有两类力:空气动力和由地球影响确定的力。如果在一般方程组(3.7)~(3.12), (3.15)~(3.24)中去掉控制力和力矩,并且令 $m = \text{const}$ 和 $P = 0$, 则可得到无控飞行器空间运动方程组。稳定性良好的飞行器,由飞行器相对质心的摆动而形成的攻角 α 和 β 的变化不会导致其质心较大地偏离不计飞行器摆动的计算弹道。

在方程(3.7)~(3.12)和(3.15)~(3.24)中没有考虑的扰动因素对自由飞行中飞行器质心弹道的形状有明显的影响。

在弹道被动段上,当只考虑空气阻力影响时,描写弹道式火箭

(或者它的头部)有控质心运动的方程组可以从方程组(3.73)中得到,取 $P = 0, m = \text{const}$ 即得:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{X_a \cos \theta + Y_a \sin \theta}{m} - g \sin \gamma; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{X_a \sin \theta - Y_a \cos \theta}{m} - g \cos \gamma; \\ \frac{dy}{dt} &= w \quad \frac{dx}{dt} = u \quad V = \sqrt{u^2 + w^2}; \\ \tan \theta &= \frac{w}{u} \quad \tan \gamma = \frac{x}{R_s + y} \quad r = \sqrt{(R_s + y)^2 + x^2}; \\ g &= g_0 \left[\frac{R_s}{r} \right]^2 \quad \alpha + \theta = \vartheta = \vartheta_m(t)\end{aligned}\quad (3.120)$$

在弹道被动段上,火箭运动诸元的计算只需计算到弹道与地面的交点处,或者只需计算到位于地面上方高度为 h_B 的那个点。当假设地球为球体,在射出点坐标系中计算平面弹道问题时,弹道与地面的交点 x_c 和 y_c 应属地球外圆上的点,即满足方程为 $x^2 + (y + R_s)^2 = R_s^2$ 的点,把求解方程组(3.120)得到的坐标 x, y 代入上述圆的方程中去,当方程的左边和右边相等时计算过程才可认为终止。对于在高度为 h_B 处的弹道计算终点 x_c 和 y_c ,则应满足圆方程 $x^2 + (y + R_s)^2 = (R_s + h_B)^2$ 。

假设地球为椭球模型时,要确定弹道与地表面的交点,应单独地计算射击点处的经度和纬度与落点处的经度和纬度。

为了建立无控飞行器未扰动运动的简化模型,只要利用前面推导出的方程组中的方程(3.7)、(3.8)和(3.12)。最后得到描写无控飞行器纵向运动和纵轴相对质心摆动的方程组的展开式:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= -c_{x_a} \frac{\rho S}{2m} V^2 - g \sin \theta; \\ \frac{d\theta}{dt} &= c_{y_a}^* \frac{\rho S}{2m} V \alpha - \frac{g \cos \theta}{V}; \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= -\frac{1}{I_z} \left[m_z^a \frac{\rho S l}{2} V^2 \alpha + m_{z_z}^* \rho S l^2 V \frac{d\vartheta}{dt} \right]; \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z \quad \frac{dx_g}{dt} = V \cos \theta;\end{aligned}$$

$$\frac{dy_{\kappa}}{dt} = V \sin \theta \quad \alpha = \vartheta - \theta \quad (3.121)$$

对于带尾翼的非旋转弹丸和迫击炮弹的弹道方程,只要在方程(3.10 ~ 3.12)中去掉包含角速度乘积的那些项即可。

如果已知气动力矩和扰动力矩,则这些方程中的每一组方程都能单独求解。

3.3.2 在大气中飞行器质心纵向运动方程的简化

对于许多弹道问题可作如下假设:无控飞行器只是在均匀平面平行引力场内作纵向运动,大气是静止的,攻角为小量并忽略不计。在这种情况下弹丸的弹道是一条平面曲线。在这种情况下,若设 $\cos \alpha \approx 1, \sin \alpha = 0, Y_a = 0$,则飞行器质心运动的方程组有如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\frac{X_a}{m} - g \sin \theta; & \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{g \cos \theta}{V}; \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin \theta; & \frac{dx}{dt} &= V \cos \theta \end{aligned} \quad (3.122)$$

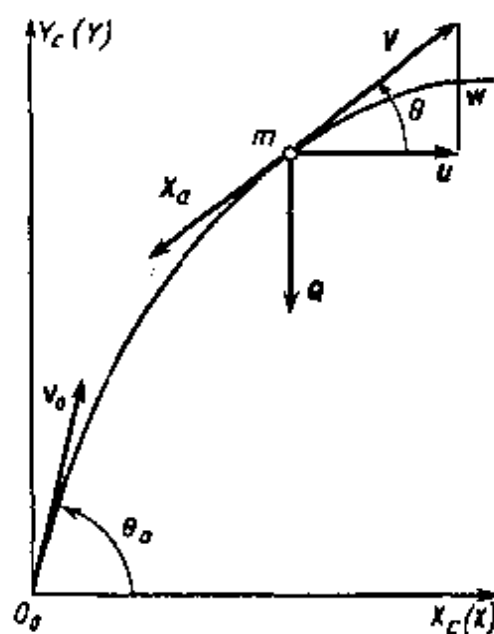


图 3.9 当 g 为常数时,作用在空气中运动的常质量弹丸质心上的力

式(3.122)的第一、第二个方程是在速度坐标系(在此情况下速度坐标系与弹道坐标系一致)上给出的,也就是说给出了在弹道切线和法线方向上的投影式。在许多情况下,求解直角坐标系下的方程组较为方便。根据图 3.9, $m \frac{du}{dt} = -X_a \cos \theta$, 将其右边的分子分母同乘以 V , 得 $du/dt = X_a u / (mV)$ 。总速度的值可以由已知值 u 按公式 $V = u \sqrt{1 + p^2}$ 计算得到。式中 $p = \tan \theta$ 。所以,可以取以下的微分方程代替方程组中的第二个方程:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(\tan \theta)}{dt} = -\frac{g}{u} \quad (3.123)$$

为了简单起见,记 $E = X_a/(mV)$ 。再补充运动学关系式后可得到直角坐标系下的运动方程组:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -Eu; & \frac{dp}{dt} &= -\frac{g}{u}; \\ \frac{dy}{dt} &= up; & \frac{dx}{dt} &= u\end{aligned}\quad (3.124)$$

如果利用 X_a 的公式(1.126),引入函数 $G(V)$,则方程组的第一个方程有如下形式

$$\frac{du}{dt} = -cH(y)G(V)u = -Eu \quad (3.125)$$

式中 $E = cH(y)G(V)$

为了计及声速随高度的变化,应该利用公式(1.141),则由 $du/dt = -cH_r(y)G(V_r)u$,相应地有

$$E = cH_r(y)G(V_r) \quad (3.126)$$

方程组(3.124)中的第二个方程可以用确定速度的铅直分量的微分方程 $dw/dt = -X_a \sin\theta/m - g$ 代替。引入垂直分速度 $w = V \sin\theta$,则有如下方程组:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -Eu; & \frac{dw}{dt} &= -Ew - g; \\ \frac{dy}{dt} &= w; & \frac{dx}{dt} &= u\end{aligned}\quad (3.127)$$

自变量 t 的方程组在计算常质量地面炮弹的运动特性时最适用。对于计算“地—地”类型火箭的运动特性,方程组的自变量取 t (时间)或者取坐标 x 。对方程组(3.124)中的第一、第二个方程进行变换,可以得到自变量为 x 的方程组:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (-Eu) \left[\frac{1}{u} \right] = -E; \\ \frac{dp}{dx} &= \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = -\frac{g}{u} \cdot \frac{1}{u} = -\frac{g}{u^2}\end{aligned}\quad (3.128)$$

因而,以 x 为自变量的方程组有如下形式:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= -E; & \frac{dp}{dx} &= -\frac{g}{u^2}; \\ \frac{dy}{dx} &= p; & \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{u}\end{aligned}\quad (3.129)$$

在进行常质量飞行器外弹道基本问题的某些近似分析计算时常利用以 θ 为自变量的运动方程组。有

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = -Eu \left[-\frac{V}{g \cos \theta} \right] = \frac{EV^2}{g}$$

将式(3.125)代入上式得

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{c}{g} H(y) V F(V) \quad (3.130)$$

进行一些中间的求导,相应地可得

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = V \cos \theta \left[-\frac{V}{g \cos \theta} \right] = -\frac{V^2}{g}; \\ \frac{dy}{d\theta} &= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d\theta} = \tan \theta \left[-\frac{V^2}{g} \right] \end{aligned}$$

因而,以 θ 为自变量的方程组有如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= \frac{c}{g} H(y) V F(V); \\ \frac{dy}{d\theta} &= -\frac{V^2 \operatorname{tg} \theta}{g}; \\ \frac{dx}{d\theta} &= -\frac{V^2}{g}; \\ \frac{dt}{d\theta} &= -\frac{V}{g \cos \theta} \end{aligned} \quad (3.131)$$

为了计及声速随高度的变化,方程组(3.131)的第一个方程可取如下形式:

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{c}{g} H_r(y) V_r F(V) \quad (3.132)$$

在方程组(3.122)、(3.124)、(3.127)和(3.129)中,联立在一起的(即需联解的)是第一至第三个方程。在方程组(3.131)中的联解方程是第一、第二个方程。在进一步补充简化时,例如取 $H(y) \approx H(y_{cp})$ 情况下,第一个方程可以分离变量。方程组(3.131)的这个性质允许用来进行近似分析求解。

方程(3.130)的解是一个函数关系 $V = f(\theta)$,它表示了飞行器质心速度的矢端曲线。因而把方程(3.130)称之为速度矢端曲线方程。

至此,在建立以上的方程时均假设 $g = \text{const}$ 。当火箭的射程相

对较小时,作这样的假设进行火箭运动弹道计算是合理的。但当预计的射程较大时,应考虑重力加速度的方向改变。这时,常质量飞行器质心自由运动方程组可以从式(3.120)中得到。假定没有俯仰角的程序变化,且 $P = 0$, 则有

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{X_a \cos \theta + Y_a \sin \theta}{m} - g \sin \gamma; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{X_a \sin \theta - Y_a \cos \theta}{m} - g \cos \gamma; \\ \frac{dx}{dt} &= u \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{w}{u} \quad g = g_0 \left[\frac{R_s}{r} \right]^2; \\ \frac{dy}{dt} &= w \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{x}{R_s + y} \quad I_z \ddot{\vartheta} = \Sigma M_z; \\ \alpha &= \vartheta - \theta \quad V = \sqrt{u^2 + w^2}; \\ r &= \sqrt{(R_s + y)^2 + x^2}\end{aligned}\quad (3.133)$$

如果取 $\alpha = 0, Y_a = 0$, 则

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{X_a \cos \theta}{m} - g \sin \gamma; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{X_a \sin \theta}{m} - g \cos \gamma\end{aligned}\quad (3.134)$$

而在方程组(3.133)中的其余方程没有改变。当射程不大时,可取 $\gamma = 0$, 和 $g = g_0 = \text{const}$, 此时从式(3.133)中可得

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{X_a \cos \theta + Y_a \sin \theta}{m}; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{X_a \sin \theta - Y_a \cos \theta}{m} - g; \\ \frac{dx}{dt} &= u \quad \frac{dy}{dt} = w \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{w}{u} \quad V = \sqrt{u^2 + w^2}\end{aligned}\quad (3.135)$$

3.3.3 不考虑外部介质阻力时飞行器质心自由运动方程组

在无空气的空间中或者介质的阻力很小,可以忽略时,为了进行弹道不长的自由飞行的近似计算,可不考虑 g 的变化、不考虑科氏加速度和地球的曲率的影响,利用只计及重力的运动方程组。当在空气中的飞行速度较小(如果小于 50m/s)时,也可不考虑空气阻力,并认

为物体是在没有空气的空间中飞行。在这种情况下,在物体上唯一作用的力是重力。此时,投影在射出点直角坐标系上的分量形式的运动微分方程有如下形式:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g \quad (3.136)$$

方程(3.136)即为常质量弹丸运动的抛物线理论基本方程。描写弹道式火箭或者是它的头部在不计地球旋转影响和在大气层外无控被动段上飞行情况的微分方程组,可以从一般形式的方程组(3.47)中得到。如果在方程组(3.47)中, V_x 、 $\dot{\vartheta}$ 和 Ω 取为0,并将考虑推力和空气阻力的项去掉,便可得到这种情况下的方程组。它是相对于惯性坐标系 $O_u X_u Y_u$ 下的平面弹道。

$$\dot{V}_{x_u} = -g_{r0} \frac{R_s^2}{r^3} x_u \quad \dot{V}_{y_u} = -g_{r0} \frac{R_s^2}{r^3} y_u$$

从图3.10可得

$$x_u = r \sin \gamma \quad y_u = r \cos \gamma \quad (3.137)$$

这时,

$$\dot{V}_{x_u} = -g_{r0} \left[\frac{R_s}{r} \right]^2 \sin \gamma \quad \dot{V}_{y_u} = -g_{r0} \left[\frac{R_s}{r} \right]^2 \cos \gamma \quad (3.138)$$

注意到, $\ddot{x}_u = \dot{V}_{x_u}$ 和 $\ddot{y}_u = \dot{V}_{y_u}$,对(3.137)微分二次后可转化成极坐标 r 和 γ 的方程:

$$\ddot{r} \sin \gamma + 2\dot{r}\dot{\gamma} \cos \gamma - r\dot{\gamma}^2 \sin \gamma + r\ddot{\gamma} \cos \gamma = g_{r0} \left[\frac{R_s}{r} \right]^2 \sin \gamma \quad (3.139)$$

$$\ddot{r} \cos \gamma - 2\dot{r}\dot{\gamma} \sin \gamma - r\dot{\gamma}^2 \cos \gamma - r\ddot{\gamma} \sin \gamma = g_{r0} \left[\frac{R_s}{r} \right]^2 \cos \gamma \quad (3.140)$$

将方程(3.139)各项乘以 $\sin \gamma$,方程(3.140)的各项乘以 $\cos \gamma$,并相加之得

$$\ddot{r} - r\dot{\gamma}^2 = -g_{r0} \left[\frac{R_s}{r} \right]^2 \quad (3.141)$$

如果将方程(3.139)的各项乘以 $\cos \gamma$,而方程(3.140)的各项乘以 $\sin \gamma$ 并从第二个方程减去第一个方程,则得 $2\dot{r}\dot{\gamma} + r\ddot{\gamma} = 0$ 。该方程乘以 r ,经变换可得方程组

$$\ddot{r} - r\dot{\gamma}^2 = -g_{r0} \left[\frac{R_s}{r} \right]^2 \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\gamma}) = 0 \quad (3.142)$$

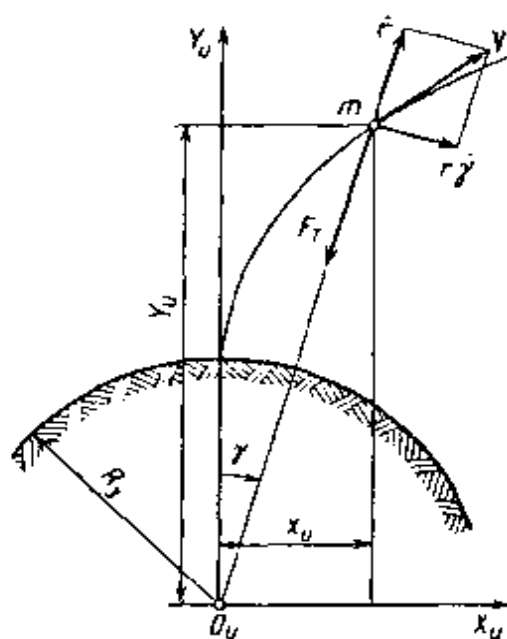


图 3.10 在地球中心引力场内引力作用示意图

这就是在不考虑空气阻力和地球旋转影响条件下,在地球中心引力场内的以极坐标 r 和 γ 表示的常质量飞行器弹道运动微分方程组。方程组(3.142)是一条基本的椭圆弹道,可用来近似地确定弹道式火箭在大气层外飞行段上的运动特性。

这个方程也可以从第二类拉格朗日方程(2.34)中方便地求得,这时可取 r 和 γ 作为广义坐标,而认为作用在弹丸上的只有一个外力——重力。

根据图 3.10

$$V = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\gamma}^2} \quad (3.143)$$

弹丸的动能

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\gamma}^2) \quad (3.144)$$

对坐标 r 求微分,可得到方程组(2.31)中指定的各项值:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m r \dot{\gamma}^2 \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} = m r^2 \dot{\gamma} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right) = m \ddot{r};$$

$$F_{rr} = -g_0 m - m g_0 \left(\frac{R_0}{r} \right)^2$$

最后可得到方程组(3.142)中的第一个方程

$$\ddot{r} - r \dot{\gamma}^2 = -g_0 \left(\frac{R_0}{r} \right)^2$$

对坐标 γ 求微分,得到方程(2.34)中的指定项

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\gamma}} = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial \gamma} = m r^2 \dot{\gamma} \text{ 和 } F_{rr} = 0$$

最后又可得到方程组(3.142)中的第二个方程。

§ 3.4 炮弹的自由飞行

3.4.1 矢量形式下的炮弹运动方程

在建立陀螺稳定或者尾翼稳定的轴对称飞行器(其中包括炮弹)的运动方程时,认为弹丸以任意旋转角的转动不会改变作用在其上的气动力和力矩的投影。气动力和力矩矢量的方向只决定于纵轴与弹丸质心速度矢量之间的相互位置。因此,将气动力和力矩表示在与空间攻角有关的坐标系上是最简单的。

为了确定气动力和力矩矢量的投影,引入单位矢量: \mathbf{x}^0 ——固连坐标系 OX 轴的单位矢; \mathbf{x}_k^0 ——弹道坐标系 OX_k 轴的单位矢。它们相应地确定了弹丸纵轴与速度矢量的方位。该两轴之间的攻角 δ 位于弹道学中所谓的阻力面内。

作用在炮弹上的总空气动力 R_A 通常表示成三部分组成的和:

$$R_A = R_T + R_N + R_{M_a}$$

式中, $R_T, (X_a)$ ——迎面阻力(总气动力矢的切向分量); R_N ——总气动力矢的法向分量; R_{M_a} ——马格努斯力。

利用这些力的表达式,可以把它们写成如下形式:

$$X_a = R_T = -\frac{\pi \Pi_{0N}}{8} \cdot \frac{d^2}{g} H(y) V^2 c_T \left[\frac{V}{a}; \delta \right] \mathbf{x}_k^0 = -m f_1 \mathbf{x}_k^0;$$

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{\pi \Pi_{0N}}{8} \cdot \frac{d^2}{g} H(y) V^2 c_N \left[\frac{V}{a}; \delta \right] \mathbf{x}_k^0 \times (\mathbf{x}^0 \times \mathbf{x}_k^0) \\ &= m V f_2 \mathbf{x}_k^0 \times (\mathbf{x}^0 \times \mathbf{x}_k^0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{M_a} &= \frac{\pi \Pi_{0N}}{8} \cdot \frac{d^2 l}{g} H(y) V r c_{M_a} \left[\frac{V}{a}; \delta \right] \mathbf{x}^0 \times \mathbf{x}_k^0 \\ &= m V f_3 \mathbf{x}^0 \times \mathbf{x}_k^0 \end{aligned}$$

对于右旋弹丸,马格努斯力 R_{M_a} 的方向沿着 $\mathbf{x}^0 \times \mathbf{x}_k^0$, 作用力矢量的模由式(1.145)给出。系数 f_1, f_2, f_3 由以下公式确定:

$$f_1 = \frac{\pi \Pi_{0N}}{8} \cdot \frac{d^2}{mg} H(y) V^2 c_T \left[\frac{V}{a}; \delta \right];$$

$$f_2 = \frac{\pi \Pi_{0N}}{8} \cdot \frac{d^2}{mg} H(y) V c_N \left[\frac{V}{a}; \delta \right];$$

$$f_3 = \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2 l}{mg} H(y) r c_{M_a} \left[\frac{V}{a}; \delta \right]$$

作用在炮弹上的总空气动力矩矢量 M_A 由四部分组成

$$M_A = M_{CT} + D + \Gamma + M_{M_a}$$

式中, M_{CT} —— 翻转(或者稳定)力矩矢量; D —— 赤道阻尼力矩矢量; Γ —— 表面摩擦力矩(在外弹道中称为极抑制力矩)矢量; M_{M_a} —— 马格努斯力矩矢量。

$$\begin{aligned} M_{CT} &= \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2 l}{g} H(y) V^2 m_M \left[\frac{V}{a}; \delta \right] \mathbf{x}_k^0 \times \mathbf{x}^0 \\ &= A f_4 \mathbf{x}_k^0 \times \mathbf{x}^0; \end{aligned}$$

$$D = - \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2 l^2}{g} H(y) \nabla V m_D \left[\frac{V}{a}; \delta \right] \Omega = A f_7 \Omega;$$

$$\begin{aligned} M_{M_a} &= \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2 l^2}{g} H(y) V r m_{M_a} \left[\frac{V}{a}; \delta \right] \mathbf{x}_k^0 \times (\mathbf{x}^0 \times \mathbf{x}_k^0) \\ &= C r f_5 \mathbf{x}^0 \times (\mathbf{x}^0 \times \mathbf{x}_k^0); \end{aligned}$$

$$\Gamma = - \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2 l^2}{g} H(y) V m_{\Gamma} \left[\frac{V}{a}; \delta \right] r \mathbf{x}^0 = - C r f_6 \mathbf{x}^0$$

式中, $A = I_y = I_z$ —— 弹丸赤道转动惯量; $C = I_x$ —— 弹丸极转动惯量; $r = r \mathbf{x}^0$ —— 绕弹丸纵轴的角速度分矢量; Ω —— 绕垂直于纵轴的角速度分矢量。

力和力矩矢量的方位由图 3.11 给出, 力矩矢量模的表达式见公式(1.145)。

系数 f_4, f_5, f_6, f_7 由以下公式确定:

$$f_4 = \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2 l}{Ag} H(y) V^2 m_M \left[\frac{V}{a}; \delta \right];$$

$$f_5 = \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2 l^2}{Cg} H(y) V m_{M_a} \left[\frac{V}{a}; \delta \right];$$

$$f_6 = \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2 l^2}{Cg} H(y) V m_{\Gamma} \left[\frac{V}{a}; \delta \right];$$

$$f_7 = \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2 l^2}{Ag} H(y) V m_D \left[\frac{V}{a}; \delta \right]$$

利用任意 3 个矢量的叉乘公式

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (3.145)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_k^0}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_k^0 = V^{-1}[\mathbf{g} - \mathbf{x}_k^0(\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_k^0)] + f_2[\mathbf{x}^0 - (\mathbf{x}^0 \cdot \mathbf{x}_k^0)\mathbf{x}_k^0] + f_3\mathbf{x}^0 \times \mathbf{x}_k^0 \quad (3.149)$$

为了确定弹丸质心在射出点坐标系上的位置,可利用弹丸质心的半径矢量 \mathbf{r}_c ,其运动学关系式为

$$\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = V\mathbf{x}_k^0 \quad (3.150)$$

式中, $\frac{d\mathbf{r}_c}{dt}$ ——在不动的射出点坐标系上的导数。因此,弹丸质心运动方程组由式(3.148)、(3.149)、(3.150)给出。

弹丸的动量矩矢量为 $\mathbf{K} = Cr\mathbf{x}^0 + A\boldsymbol{\Omega}$

\mathbf{x}^0 矢端的线速度为 $\left[\frac{d\mathbf{x}^0}{dt} - \mathbf{x}^0 \times \boldsymbol{\omega}\right]$ 。所以,垂直于弹轴的弹丸分角速度矢量 $\boldsymbol{\Omega}$ 可以借助式(3.145)表示为

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{x}^0 \times \left[\frac{d\mathbf{x}^0}{dt} - \mathbf{x}^0 \times \boldsymbol{\omega}\right] = \mathbf{x}^0 \times \dot{\mathbf{x}}^0 - \mathbf{x}^0(\mathbf{x}^0 \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega}$$

引进记号 $2\alpha = \frac{Cr}{A}$, 方程组(3.146)的第二个方程可转化为

$$\begin{aligned} 2\dot{\alpha}\mathbf{x}^0 + 2\alpha\dot{\mathbf{x}}^0 + \mathbf{x}^0 \times \ddot{\mathbf{x}}^0 - 2\dot{\mathbf{x}}^0(\mathbf{x}^0 \cdot \boldsymbol{\omega}) - \mathbf{x}^0(\mathbf{x}^0 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) + \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} + 2\alpha\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^0 - (\mathbf{x}^0 \cdot \boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^0) = f_4\mathbf{x}_k^0 \times \mathbf{x}^0 + \\ 2\alpha f_5 \cdot [(\mathbf{x}^0 \cdot \mathbf{x}_k^0)\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_k^0] - 2\alpha f_6\mathbf{x}^0 - f_7[\mathbf{x}^0 \times \dot{\mathbf{x}}^0 - \\ \mathbf{x}^0(\mathbf{x}^0 \cdot \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega}] \end{aligned} \quad (3.151)$$

上式点乘 \mathbf{x}^0 , 得

$$\dot{\alpha} = -f_6\alpha \quad (3.152)$$

代入式(3.151), 变为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^0 \times \ddot{\mathbf{x}}^0 + 2\alpha\dot{\mathbf{x}}^0 - (2\dot{\mathbf{x}}^0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^0 + f_7\mathbf{x}^0)(\mathbf{x}^0 \cdot \boldsymbol{\omega}) - \\ \mathbf{x}^0(\mathbf{x}^0 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} + 2\alpha\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^0 = f_4\mathbf{x}_k^0 \times \mathbf{x}^0 + 2\alpha f_5 \\ [(\mathbf{x}^0 \cdot \mathbf{x}_k^0)\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}_k^0] - f_7(\mathbf{x}^0 \times \dot{\mathbf{x}}^0 + \boldsymbol{\omega}) \end{aligned} \quad (3.153)$$

方程(3.152)和(3.153)表示了弹丸的旋转运动,故完整的矢量形式的运动方程组有如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_k^0 - f_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_k^0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_k^0 &= V^{-1}[\mathbf{g} - \mathbf{x}_k^0(\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_k^0)] + f_2[\mathbf{x}^0 - (\mathbf{x}^0 \cdot \mathbf{x}_k^0)\mathbf{x}_k^0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f_3 \dot{x}^0 \times x_k^0; \\
\dot{r}_c &= V x_n^0; \\
\dot{x}^0 \times \ddot{x}^0 + 2\alpha \dot{x}^0 - (2\dot{x}^0 + \omega \times x^0 + f_7 x^0)(x^0 \cdot \omega) - \\
& x^0(x^0 \cdot \dot{\omega}) + \dot{\omega} + 2\alpha \omega \times x^0 = f_4 x_k^0 \times x^0 + \\
& 2\alpha f_5 [(x^0 \cdot x_k^0)x^0 - x_k^0] - f_7(x^0 \times x_n^0 + \omega); \\
\dot{\alpha} &= -f_6 \alpha
\end{aligned} \tag{3.154}$$

3.4.2 B. C. 普加乔夫形式下的炮弹运动方程

为了建立普加乔夫形式下的炮弹空间运动方程,可利用射出点坐标系 $OX_c Y_c Z_c$ 确定弹丸质心的位置,利用弹道坐标系 $OX_n Y_n Z_n$ 确定弹丸纵轴相对速度矢量的方位(参看图 3.12)。为了确定弹丸质心速度矢量(或 x_n^0) 在射出点坐标系上的方位,利用如下两个角度: θ ——速度矢量相对于水平面的倾角, ψ_H ——在倾斜面上速度矢的旋转角,其正方向如图 3.12 所示。这样,方程组(3.154)第二和第四个方程中的矢量和矢量积在弹道坐标系上的投影有如下形式:

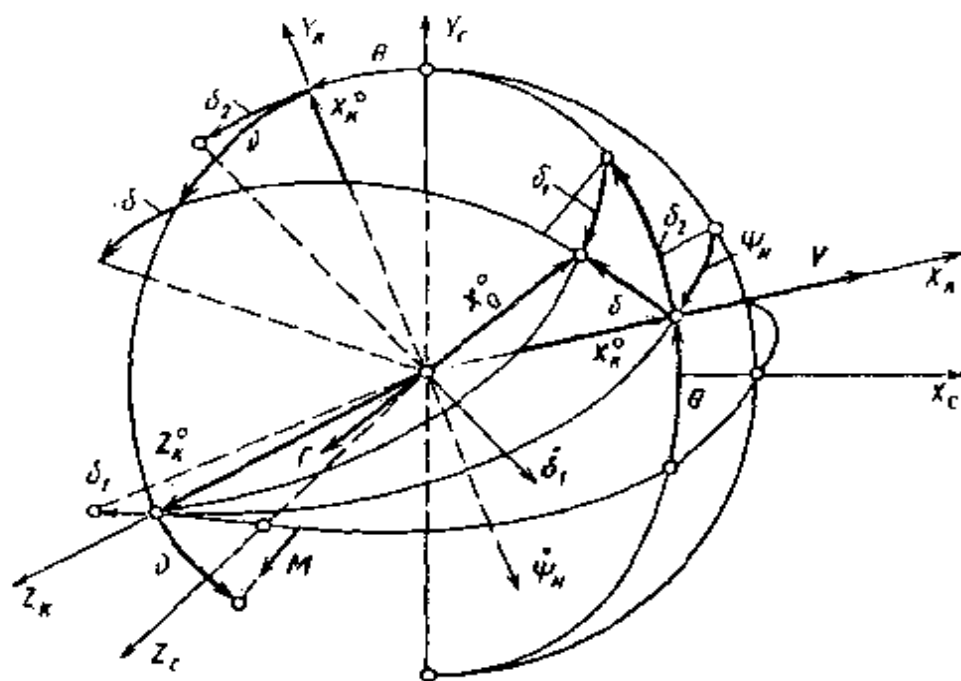


图 3.12 弹丸纵轴和速度矢的相互位置关系

$$\mathbf{x}_k^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\Psi}_H \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} -g \sin \theta \\ -g \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}_k^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\Psi}_H \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^0 \times \mathbf{x}_k^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ z_3 \\ -z_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}^0 \times \ddot{\mathbf{x}}^0 = \begin{bmatrix} z_2 \ddot{z}_3 - \ddot{z}_2 z_3 \\ z_3 \ddot{z}_1 - \ddot{z}_3 z_1 \\ z_1 \ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 z_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} -(z_2 \dot{\theta} + z_3 \dot{\Psi}_H) \\ z_1 \dot{\theta} \\ z_1 \dot{\Psi}_H \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^0 \times \dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} z_2 \ddot{\theta} + z_3 \ddot{\Psi}_H \\ -z_1 \ddot{\theta} \\ -z_1 \ddot{\Psi}_H \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_k^0 \times \mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -z_3 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^0 \times \dot{\mathbf{x}}^0 = \begin{bmatrix} z_2 \dot{z}_3 - \dot{z}_2 z_3 \\ z_3 \dot{z}_1 - \dot{z}_3 z_1 \\ z_1 \dot{z}_2 - \dot{z}_1 z_2 \end{bmatrix}.$$

方程组(3.154)第二和第四个方程中出现的数量积有如下形式:

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_k^0 = -g \sin \theta \quad \mathbf{x}^0 \cdot \mathbf{x}_k^0 = z_1 \quad \mathbf{x}^0 \cdot \boldsymbol{\omega} = z_3 \dot{\theta} - z_2 \dot{\Psi}_H$$

$$\mathbf{x}^0 \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} = z_3 \ddot{\theta} - z_2 \ddot{\Psi}_H$$

将式(3.154)中的第二和第四个方程在 OY_k 轴和 OZ_k 轴上投影得:

$$\dot{\theta} = -gV^{-1} \cos \theta + f_2 z_2 + f_3 z_3;$$

$$\dot{\Psi}_H = -f_3 z_2 + f_2 z_3;$$

$$z_3 \ddot{z}_1 - \ddot{z}_3 z_1 + 2\alpha \dot{z}_2 - (2\dot{z}_2 + z_1 \dot{\theta} + f_1 z_2)(z_3 \dot{\theta} - z_2 \dot{\Psi}_H) -$$

$$\begin{aligned}
& z_2(\ddot{z}_3\dot{\theta} - \ddot{z}_2\dot{\Psi}_H) - \ddot{\Psi}_H + 2\alpha z_1\dot{\theta} = -f_4 z_3 + \\
& 2\alpha f_5 z_2 z_1 - f_7(z_3\dot{z}_1 - \dot{z}_3 z_1 - \dot{\Psi}_H); \\
& z_1\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 z_2 + 2\alpha\dot{z}_3 - (2\dot{z}_3 + z_1\dot{\Psi}_H + f_7 z_3)(z_3\dot{\theta} - z_2\dot{\Psi}_H) - \\
& z_3(\ddot{z}_3\dot{\theta} - \ddot{z}_2\dot{\Psi}_H) + \ddot{\theta} + 2\alpha z_1\dot{\Psi}_H \\
& = f_4 z_2 + 2\alpha f_5 z_3 z_1 - f_7(z_1\dot{z}_2 - \dot{z}_1 z_2 + \dot{\theta}) \quad (3.155)
\end{aligned}$$

将方程组(3.154)的第三个方程投影在射出点坐标系上,得

$$\dot{x}_c = V \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \Psi_H} \quad \dot{y}_c = V \sin \theta \quad \dot{z}_c = V \sin \Psi_H \quad (3.156)$$

考虑到 \mathbf{x}^0 在 $OX_\kappa Y_\kappa Z_\kappa$ 坐标系上的投影有如下关系 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$, 将式(3.155)与(3.156)结合在一起可以得到 B. C. 普加乔夫形式下的完整的炮弹空间运动方程组^[88]:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \dot{V} = -g \sin \theta - f_1; \\
2) \quad & \dot{\theta} = -g V^{-1} \cos \theta + f_2 z_2 + f_3 z_3; \\
3) \quad & \dot{\Psi}_H = -f_3 z_2 + f_2 z_3; \\
4) \quad & z_3\ddot{z}_1 - \ddot{z}_3 z_1 + 2\alpha\dot{z}_2 - (2z_2 + z_1\dot{\theta} + f_7 z_2)(z_3\dot{\theta} - z_2\dot{\Psi}_H) - \\
& z_2(\ddot{z}_3\dot{\theta} - \ddot{z}_2\dot{\Psi}_H) - \ddot{\Psi}_H + 2\alpha z_1\dot{\theta} \\
& = -f_4 z_3 + 2\alpha f_5 z_2 z_1 - f_7(z_3\dot{z}_1 + \dot{z}_3 z_1 - \dot{\Psi}_H); \\
5) \quad & z_1\ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 z_2 + 2\alpha\dot{z}_3 - (2\dot{z}_3 + z_1\dot{\Psi}_H + f_7 z_3)(z_3\dot{\theta} - z_2\dot{\Psi}_H) - \\
& z_3(\ddot{z}_3\dot{\theta} - \ddot{z}_2\dot{\Psi}_H) + \ddot{\theta} + 2\alpha z_1\dot{\Psi}_H \\
& = f_4 z_2 + 2\alpha f_5 z_3 z_1 - f_7(z_1\dot{z}_2 - \dot{z}_1 z_2 + \dot{\theta}); \\
6) \quad & \dot{\alpha} = -f_6 \alpha; \\
7) \quad & z_1 = \sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2}; \\
8) \quad & \dot{x}_c = V \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \Psi_H}; \\
9) \quad & \dot{y}_c = V \sin \theta; \\
10) \quad & \dot{z}_c = V \sin \Psi_H \quad (3.157)
\end{aligned}$$

为了用分析方法或者数值方法研究方程组(3.157), 可以将它变成柯西标准形式, 记

$$u_2 = \dot{z}_2 \quad u_3 = \dot{z}_3$$

假设系数 c_N 和 c_{M_a} 只取决于 V/a 和 δ , 可以得到 $\ddot{\theta}$ 和 $\ddot{\Psi}_H$ 的表达式

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & -gV^{-2}(g\sin 2\theta + f_1\cos\theta) + (\dot{f}_2 + gV^{-1}\sin\theta f_2)z_2 + \\ & (\dot{f}_3 + gV^{-1}\sin\theta f_3)z_3 + f_2\dot{z}_2 + f_3\dot{z}_3; \\ \ddot{\Psi}_H = & -f_3\dot{z}_2 + f_2\dot{z}_3 - \dot{f}_3z_2 + \dot{f}_2z_3. \end{aligned}$$

式中,
$$\dot{f}_2 = \frac{\partial f_2}{\partial V}\dot{V} + \frac{\partial f_2}{\partial y_c}\dot{y}_c + \frac{\partial f_2}{\partial z_2}\dot{z}_2 + \frac{\partial f_2}{\partial z_3}\dot{z}_3;$$

$$\dot{f}_3 = \frac{\partial f_3}{\partial V}\dot{V} + \frac{\partial f_3}{\partial y_c}\dot{y}_c + \frac{\partial f_3}{\partial z_2}\dot{z}_2 + \frac{\partial f_3}{\partial z_3}\dot{z}_3.$$

对方程组(3.157)的第七个方程进行微分得

$$\dot{z}_1 = -\frac{z_2\dot{z}_2 + z_3\dot{z}_3}{\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2}}$$

从而有

$$\ddot{z}_1 = -\frac{z_2\ddot{z}_2 + z_3\ddot{z}_3 + \dot{z}_2^2 + \dot{z}_3^2}{\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2}} - \frac{(z_2\dot{z}_2 + z_3\dot{z}_3)^2}{(1 - z_2^2 - z_3^2)^{3/2}}$$

借助上面导出的关于 \dot{z}_1, \ddot{z}_1 的表达式, 方程组第四、第五个方程变为

$$\begin{aligned} \frac{z_2z_3\dot{u}_2 - (1 - z_2^2)\dot{u}_3}{\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2}} &= \Phi_1(V, \theta, y_c, z_2, z_3, u_2, u_3, \alpha); \\ \frac{(1 - z_3^2)\dot{u}_2 + z_2z_3\dot{u}_3}{\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2}} &= \Phi_2(V, \theta, y_c, z_2, z_3, u_2, u_3, \alpha) \quad (3.158) \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & (\dot{f}_3 + f_3f_7)z_2 + (\dot{f}_4 - \dot{f}_2 - f_2f_7)z_3 + f_3u_2 - \\ & (f_2 + f_7\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2})u_3 + 2\alpha u_2 + gV^{-2} \\ & (g\sin 2\theta + f_1\cos\theta)z_2z_3 - 2\alpha gV^{-1}\cos\theta\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2} + \\ & [2u_2 - (gV^{-1}\cos\theta - f_2z_2 - f_3z_3)\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_7 z_2][gV^{-1}\cos\theta z_3 - f_3(z_2^2 + z_3^2)] - gV^{-1}\sin\theta(f_2 z_2 + \\
& f_3 z_3)z_2 z_3 - \dot{f}_3 z_2(z_2^2 + z_3^2) + f_2(z_2 u_3 - z_3 u_2)z_2 - \\
& f_3(z_2 u_2 + z_3 u_3)z_2 + 2a(f_2 z_2 + f_3 z_3 - \\
& f_5 z_2)\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2} - f_7 z_3 \frac{z_2 u_2 + z_3 u_3}{\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2}} - \\
& z_3 \frac{u_2^2 + u_3^2}{\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2}} - z_3 \frac{(z_2 u_2 + z_3 u_3)^2}{(1 - z_2^2 - z_3^2)^{3/2}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_2 = & gV^{-2}(g\sin 2\theta + f_1 \cos \theta) + gV^{-1}\cos \theta f_7 + (f_4 - \dot{f}_2 - \\
& gV^{-1}\sin \theta f_2 - f_2 f_7)z_2 - (\dot{f}_3 + gV^{-1}\sin \theta f_3 + f_3 f_7)z_3 - \\
& (f_2 + f_7 \sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2})u_2 + f_3 u_3 - 2au_3 - [2u_3 + \\
& (f_2 z_3 - f_3 z_2)\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2} + f_7 z_3][gV^{-1}\cos \theta z_3 - \\
& f_3(z_2^2 + z_3^2)] - gV^{-2}(g\sin 2\theta + f_1 \cos \theta)z_3^2 + gV^{-1}\sin \theta \\
& (f_2 z_2 + f_3 z_3)z_3^2 + \dot{f}_3 z_3(z_2^2 + z_3^2) - f_2(z_2 u_3 - z_3 u_2)z_3 + \\
& f_3(z_2 u_2 + z_3 u_3)z_3 + 2a(f_3 z_2 - f_2 z_3 + f_5 z_3) \\
& \sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2} - f_7 z_2 \frac{z_2 u_2 + z_3 u_3}{\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2}} - \\
& z_2 \frac{u_2^2 + u_3^2}{\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2}} - z_2 \frac{(z_2 u_2 + z_3 u_3)^2}{(1 - z_2^2 - z_3^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

由方程(3.158)解出 \dot{u}_2 和 \dot{u}_3 ,可以将方程组(3.157)变成标准形式^[88]:

- 1) $\dot{V} = -g\sin\theta - f_1;$
- 2) $\dot{\theta} = -gV^{-1}\cos\theta + f_2 z_2 + f_3 z_3;$
- 3) $\dot{\Psi}_H = -f_3 z_2 + f_2 z_3;$
- 4) $\dot{z}_2 = u_2;$
- 5) $\dot{u}_2 = [\Phi_2 - z_2(\Phi_1 z_3 + \Phi_2 z_2)](1 - z_2^2 - z_3^2)^{-1/2};$
- 6) $\dot{z}_3 = u_3;$
- 7) $\dot{u}_3 = [\Phi_1 - z_3(\Phi_1 z_3 + \Phi_2 z_2)](1 - z_2^2 - z_3^2)^{-1/2};$

$$\begin{aligned}
8) \quad \dot{\alpha} &= -f_{\delta} \alpha; \\
9) \quad \dot{x}_c &= V \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \Psi_H}; \\
10) \quad \dot{y}_c &= V \sin \theta; \\
11) \quad \dot{z}_c &= V \sin \Psi_H
\end{aligned} \tag{3.159}$$

由 B. C. 普加乔夫得到的方程组 (3.159) 是描写上述计及的力和力矩作用下炮弹空间运动的最一般的方程组。该方程组对确定炮弹运动的相坐标没有任何的限制。所以, 在已知气动系数关于 V/a 和 δ 的关系后可以在任意章动角值的情况下进行求解。

方程组 (3.159) 中的第 3)、9) 和 11) 个方程可以独立积分。由方程组 (3.159) 积分后, 可以得到 z_2 和 z_3 , 从而确定出表示弹丸纵轴相对速度矢量方位的角度。

如果弹丸纵轴的方位利用欧拉角——攻角 δ 和进动角 ν 来表示 (参看图 3.12), 则固连坐标系 OX 轴的单位矢 x^0 在 $OX_k Y_k Z_k$ 坐标系上的投影有如下形式:

$$x^0 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \cos \nu \\ \sin \delta \sin \nu \end{bmatrix} \tag{3.160}$$

如果弹丸纵轴的方位利用 δ_1 和 δ_2 角表示 (参看图 3.12), 则

$$x^0 = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta_2 \cos \delta_1 \\ \sin \delta_2 \cos \delta_1 \\ \sin \delta_1 \end{bmatrix} \tag{3.161}$$

知道 z_2 和 z_3 后, 可以从式 (3.160) 求得攻角和进动角

$$\delta = \arccos \sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2} \quad \nu = \arctan \frac{z_3}{z_2} \tag{3.162}$$

也可从式 (3.161) 求得

$$\delta_1 = \arcsin z_3 \quad \delta_2 = \arctan \frac{z_2}{\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2}} \tag{3.163}$$

因此, 由方程组 (3.159) 求解出 z_2 和 z_3 的值后, 可以据式 (3.162) 或 (3.163) 给出弹丸纵轴相对速度矢的角运动的几何图画。

3.4.3 章动角较小时炮弹的空间运动方程

在文献[88]中,对方程组(3.157)中的各项及其量级进行了仔细的分析后指出:在攻角 δ 较小时,可忽略高阶小量,方程组(3.157)近似地简化成以下方程:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -g \sin \theta - f_1; \\
 \dot{\theta} &= -gV^{-1} \cos \theta + f_2 z_2 + f_3 z_3; \\
 \dot{\Psi}_H &= -f_3 z_2 + f_2 z_3 - \\
 &\quad \ddot{z}_3 + 2\alpha \dot{z}_2 - f_2 \dot{z}_3 + f_3 \dot{z}_2 + 2\alpha(f_2 z_2 + f_3 z_3) \\
 &\quad = -f_4 z_3 + 2\alpha f_5 z_2 + f_7 \dot{z}_3 + 2\alpha V^{-1} g \cos \theta; \\
 &\quad \ddot{z}_2 + 2\alpha \dot{z}_3 + f_2 \dot{z}_2 + f_3 \dot{z}_3 + 2\alpha(f_2 z_3 - f_3 z_2) \\
 &\quad = f_4 z_2 + 2\alpha f_5 z_3 - f_7(\dot{z}_2 + \theta); \\
 \dot{\alpha} &= -f_6 \alpha; \\
 z_1 &= \sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2}; \\
 \dot{x}_c &= V \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \Psi_H}; \\
 \dot{y}_c &= V \sin \theta; \\
 \dot{z}_c &= V \sin \Psi_H
 \end{aligned} \tag{3.164}$$

由于章动角 δ 较小,因而, δ_1 和 δ_2 也较小。方程(3.164)中表示方向余弦的 z_2 和 z_3 可直接转变成角度。

因为 δ_1, δ_2 较小, $\sin \delta_i \approx \delta_i$; $\cos \delta_i \approx 1$ ($i = 1, 2$)。据式(3.161)得

$$\begin{aligned}
 z_2 &= \sin \delta_2 \cos \delta_1 \approx \delta_2 & \dot{z}_2 &= \dot{\delta}_2; \\
 z_3 &= \sin \delta_1 \approx \delta_1 & \dot{z}_3 &= \dot{\delta}_1
 \end{aligned}$$

因为 δ 较小, $z_1 = \cos \delta \approx 1 - \frac{\delta^2}{2}$, 因而

$$z_1^2 = \cos^2 \delta \approx 1 - \delta^2$$

于是,方程组(3.164)的第七个方程变为

$$\delta^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2$$

所以, 方程组(3.164) 可转变成如下形式:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -g \sin \theta - f_1; \\
 \dot{\theta} &= -gV^{-1} \cos \theta + f_2 \delta_2 + f_3 \delta_1; \\
 \dot{\Psi}_H &= -f_3 \delta_2 + f_2 \delta_1; \\
 \ddot{\delta}_1 + (f_2 + f_7) \dot{\delta}_1 - (2\alpha + f_3) \dot{\delta}_2 - (2\alpha f_3 + f_4) \delta_1 + \\
 &\quad 2\alpha(f_5 - f_2) \delta_2 = -2\alpha g V^{-1} \cos \theta; \\
 \ddot{\delta}_2 + (f_2 + f_7) \dot{\delta}_2 + (2\alpha + f_3) \dot{\delta}_1 - (2\alpha f_3 + f_4) \delta_2 - \\
 &\quad 2\alpha(f_5 - f_2) \delta_1 = -f_7 \dot{\theta}; \\
 \dot{\alpha} &= -f_6 \alpha; \\
 \delta^2 &= \delta_1^2 + \delta_2^2; \\
 \dot{x}_c &= V \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \Psi_H}; \\
 \dot{y}_c &= V \sin \theta; \\
 \dot{z}_c &= V \sin \Psi_H
 \end{aligned} \tag{3.165}$$

因为系数 $f_1 \sim f_7$ 是质心速度的函数, 其表达式为

$$\begin{aligned}
 f_1 &= V^2 \bar{c}_T \quad f_2 = V \bar{c}_N \quad f_3 = 2\alpha \bar{c}_{Ma}; \\
 f_4 &= V^2 \bar{m}_M \quad f_5 = V \bar{m}_{Ma} \quad f_6 = V \bar{m}_r \quad f_7 = V \bar{m}_D
 \end{aligned}$$

式中,

$$\begin{aligned}
 \bar{c}_T &= \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2}{mg} H(y) c_T \left[\frac{V}{\alpha}, \delta \right]; \\
 \bar{c}_N &= \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2}{mg} H(y) c_N \left[\frac{V}{\alpha} \right]; \\
 \bar{c}_{Ma} &= \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2 l}{mg} \cdot \frac{A}{C} H(y) c_{Ma} \left[\frac{V}{\alpha} \right]; \\
 \bar{m}_M &= \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2 l}{Ag} H(y) m_M \left[\frac{V}{\alpha} \right]; \\
 \bar{m}_{Ma} &= \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2 l^2}{Cg} H(y) m_{Ma} \left[\frac{V}{\alpha} \right]; \\
 \bar{m}_r &= \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2 l^2}{Cg} H(y) m_r \left[\frac{V}{\alpha} \right]; \\
 \bar{m}_D &= \frac{\pi \Pi_{ON}}{8} \cdot \frac{d^2 l^2}{Ag} H(y) m_D \left[\frac{V}{\alpha} \right]
 \end{aligned}$$

将上面方程组中的第二个方程的 $\dot{\theta}$ 代入第五个方程的右边部分,忽略第五个方程中的与 $f_1 f_2 \delta_2$ 和 $f_1 f_3 \delta_1$ 有关的项,最后得到如下形式的方程组:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -g \sin \theta - V^2 \bar{c}_r; \\ \dot{\theta} &= -g V^{-1} \cos \theta + V \bar{c}_N \delta_2 + 2 \alpha \bar{c}_{Ma} \delta_1; \\ \dot{\Psi}_H &= -2 \alpha \bar{c}_{Ma} \delta_2 + V \bar{c}_N \delta_1; \\ \delta_1 + V(\bar{c}_N + \bar{m}_D) \dot{\delta}_1 - 2 \alpha(1 + \bar{c}_{Ma}) \dot{\delta}_2 - (4 \alpha^2 \bar{c}_{Ma} + V^2 \bar{m}_M) \delta_1 + 2 \alpha V(\bar{m}_{Ma} - \bar{c}_N) \delta_2 &= -2 \alpha V^{-1} g \cos \theta; \\ \delta_2 + V(\bar{c}_N + \bar{m}_D) \dot{\delta}_2 + 2 \alpha(1 + \bar{c}_{Ma}) \dot{\delta}_1 - (4 \alpha^2 \bar{c}_{Ma} + V^2 \bar{m}_M) \delta_2 - 2 \alpha V(\bar{m}_{Ma} - \bar{c}_N) \delta_1 &= \bar{m}_D g \cos \theta; \\ \dot{\alpha} &= -V \bar{m}_1 \alpha; \\ \dot{x}_c &= V \sqrt{\cos^2 \theta - \sin^2 \Psi_H}; \\ \dot{y}_c &= V \sin \theta; \\ \dot{z}_c &= V \sin \Psi_H; \\ \delta^2 &= \delta_1^2 + \delta_2^2\end{aligned}\quad (3.166)$$

该方程组可用于小章动角情况下炮弹空间运动的近似分析和数值研究。

检查题

1. 推力与火箭力的区别在哪里?推力比冲量随高度是如何变化的?变质量物体和变组分物体之间有哪些区别?说出“壳体—燃料—燃气”系统质心的绝对速度和加速度的分量。当取地球椭球模型时自由落体加速度矢在赤道轴和极轴上的指向怎样?在地球中心引力场中地球引力加速度随它至地球中心的距离是如何变化的?写出重力各分量的矢量和。

2. 固连坐标系与惯性坐标系之间的区别在哪里?速度坐标系和固连坐标系之间的相互方位可由哪些角度确定?在什么情况下弹道坐标系和速度坐标系重合?绘出确定飞行器相对当地水平面位置的

坐标系和角度。

3. 说出飞行器运动的基本数学模型,在建立火箭和弹丸的空间运动微分方程组时,必须考虑哪些力和力矩?当顺着赤道轴向东或向西发射火箭时地球的旋转对远程火箭弹的飞行有何影响?在弹道坐标系和射出点坐标系下建立飞行器在铅直平面内主动(被动)段上的质心运动方程组。

第二部分 飞行器运动数学模型的研究和外弹道问题的解法

第四章 火箭和炮弹的运动稳定性

作为动力学系统的飞行器,并不是与其运动微分方程严密数学解相应的每一种运动情况在实际中都能观察得到。状态的不可观察性可以用它的不稳定性以及对于微小偏差(即扰动)的敏感性来解释,在扰动作用下改变得很小的运动或平衡状态通常就称为稳定的。

A. M. 李雅普诺夫曾给出了运动稳定性的严格定义,并建立了选择稳定解的一般原则。

在动力学系统理论里,在分析可能的运动时也利用其它一些稳定性定义,例如拉格朗日稳定性、拉普拉斯稳定性、普瓦松稳定性、伯克霍夫稳定性^[82]等,但是李雅普诺夫给出的稳定性最适合我们所研究的问题。

在李雅普诺夫定义里,稳定性是在无限长时间间隔里研究的,但在外弹道学和飞行力学许多实际问题中仅需要保证在有限长时间间隔内的稳定性,在这种情况下就要用到工程稳定性的概念。

§ 4.1 运动稳定性的一般概念及 火箭和炮弹的运动稳定性

4.1.1 火箭和炮弹的弹道稳定性

在利用火箭和炮弹飞行的数学模型时会产生这样一个问题,即对某个简单概括的数学模型所求得的结果是否能推广到实际中去的

问题。假定这种结果对于模型的微小改变极为敏感,以致模型有了无论多么小的改变(例如运动微分方程的右边有所改变)后就变成了另一个性质完全不同的模型,若将这种结果推广到所研究的实际问题中去是十分危险的。

作为动力学系统的飞行器,其数学模型这种性质的出现与否与 A. A. 安德罗诺夫和 A. C. 庞德里雅金所引进的粗糙度概念或稳定性结构有关。必须强调一下,此概念表示,如果在模型的改变足够小时能得到一个与原系统等价的系统,也即系统可能运动的本质特征不变,则动力系统(飞行器)的数学模型在结构上是稳定的。

与线性系统不同,当将飞行器作为非线性系统时,则在一种飞行状态下可以是稳定的,而在另一种飞行状态下可以是不稳定的。换句话说也就是一种运动或平衡状态可以是稳定的,而同一系统的另一运动或平衡状态可以是不稳定的。因而不能一般地讲作为非线性系统的飞行器是稳定的或不稳定的,而只能说,也仅仅只可能说不同运动状态下的稳定性或不稳定性。因此,如果要给出稳定性的定义,它也不是属于系统所有的,而是属于系统某个运动所具有的,并且按照 A. M. 李雅普诺夫的术语将这个运动称为未扰动运动。

在弹道学中将火箭或炮弹在标准大气或真空中、在预先给定的、满足一定规律的力的作用下产生的运动称为未扰动运动。与未扰动运动相应的弹道称为未扰动弹道或标准弹道。

但实际上火箭和炮弹的运动是在一些附加的、偶然的因素作用下发生的。这些因素在进行标准弹道计算时是不考虑的(例如起始条件的散布、气温与标准定律的偏差、风以及它的阵性、发动机推力的波动、非程序控制力等)。这些扰动因素的作用将导致火箭和炮弹不沿标准弹道飞行,而与标准弹道的偏差则或多或少地取决于扰动作用的量值和方向。我们将反映了扰动因素作用的运动称为扰动运动,而与其相应的弹道称为扰动弹道。

按照飞行器运动稳定性的直观提法,如果在扰动因素对未扰动运动的作用中止后飞行器的运动具有能恢复的性质,就称为是稳定的。由李雅普诺夫运动渐近稳定性定义也可形成这种提法。但如果

谈到的是无控火箭或炮弹的质心运动,则要保证这种稳定性显然是办不到的,因为任何使火箭质心偏离标准弹道的扰动都遇不到直接的反抗作用。

可以认为,如果小的扰动只引起对标准弹道小的偏差,则火箭的运动就是稳定的。如果当 $t \rightarrow \infty$ 时偏差仍保持很小,则关于稳定性的提法就可利用李雅普诺夫稳定性来表述。

如果在整个飞行期间火箭的实际弹道与理想弹道的偏差都不超过某个允许的极限,则可认为火箭的运动实际上是稳定的。这种处理方法与工程稳定性概念的利用有关。实际上由于火箭或炮弹的飞行时间是有限的,故要求其运动具有李雅普诺夫稳定性是不必要的,也就是说要求在无穷长时间间隔内偏差有限是不必要的,只需在飞行时间内偏差小于允许的极限值就足够了。这也就是说在实际问题中李雅普诺夫稳定性要求可能显得过于生硬。

在研究火箭和炮弹运动稳定性时,通常要分别研究质心运动稳定性和相对质心旋转运动的稳定性,保证旋转运动稳定性是保证质心运动稳定性的必要条件,它与火箭和炮弹的姿态角稳定性概念直接相关。

4.1.2 稳定无控火箭和炮弹的方法

在飞行过程中质心速度矢量 V 不断地转弯,因而稳定的火箭和炮弹必须不断地改变自己的角方位,相对于质心转动而追随速度矢量 V ,如图 4.1 中所示那样。对于炮弹或无尾翼火箭的弹体,当其纵轴偏离了运动方向那怕不大一个角度时,就会产生作用在火箭或炮弹压力中心 $[O_A]$ 上的空气动力合力 R_A ,此压心位于火箭顶部与质心之间(见图 4.2a),于是形成了相对于质心的翻转力矩 M ,对于未进行稳定的火箭和炮弹就产生相对于质心的混乱运动,结果使弹道显著变形。在这种情况下,弹轴与运动方向一致时壳体的位置是不稳定平衡位置,这是因为当弹轴与速度矢量 V 之间有一个微小偏差时这个偏差会不断增大。为了防止这种现象发生而保证正确的飞行状态(头部向前),应使火箭和炮弹稳定化。

适用于无控火箭和炮弹的有两种“被动”稳定方法——旋转稳定和尾翼稳定。

用尾翼稳定火箭和炮弹的方法就是在其长圆形弹体的尾部加装不同结构形状和尺寸的稳定翼，恰当地选择稳定翼的尺寸就可以使 $\alpha \neq 0$ 时空气动力的合力

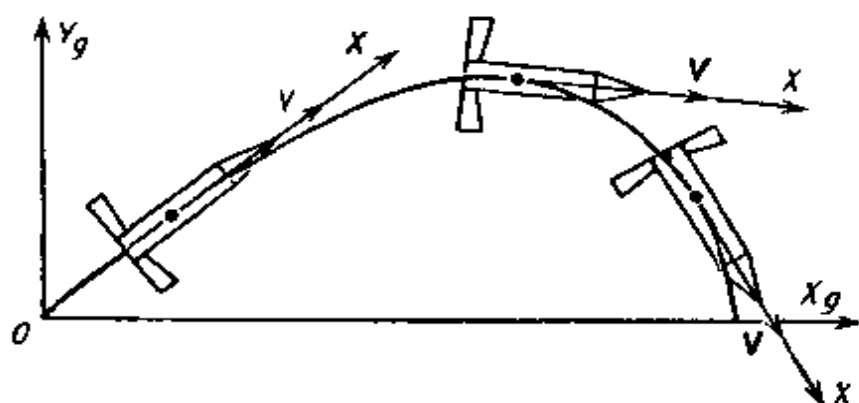


图 4.1 飞行正常的尾翼弹在弹道不同位置上的状态

R_A 的作用情况如图 4.26 所示(此图对应于铅直面内运动的情况)。显然,由力 V_A 形成的力矩 M 将力图减小攻角 α ,它将使弹体回到弹轴与速度矢量 V 一致、而力矩本身变成零的位置上去,也即表现出有稳定(或恢复)作用。因此,力矩 M 有稳定弹体在 $\alpha = 0$ 位置上的作用,故弹体的这个位置是稳定平衡位置。

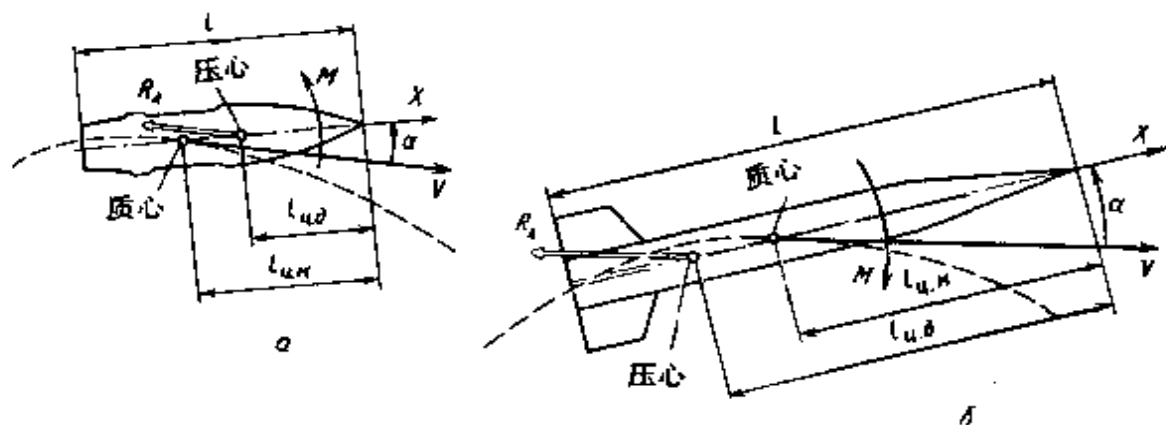


图 4.2 空气动力矩作用示意图

a) 在无尾翼炮弹(火箭)上; b) 在尾翼弹上。

如果只是在静止状态下研究上述现象,则力矩 M_z 可以取如下关系式(在小攻角情况下) $M_z = qS l m_z^* \cdot \alpha$ (见第 1 章)。从这个表达式出发可以确定作用在火箭和炮弹上的 M_z 的符号。对于翻转力矩,其符

号应与攻角 α 的符号一致,故有 $m_z^* > 0$; 对于稳定力矩则有 $m_z^* < 0$ 。导数 m_z^* 与升力系数导数有如下关系:

$$m_z^* \approx c_{y_a}^* \frac{l_{u,\kappa} - l_{u,\pi}}{l} \quad (4.1)$$

式中 l 为火箭全长; $l_{u,\kappa}$ 和 $l_{u,\pi}$ 分别为火箭顶部到质心的距离和到压心的距离(见图 4.26), 因为 $c_{y_a}^* > 0$, 故上面乘积的符号就与差值 $(l_{u,\kappa} - l_{u,\pi})$ 的符号一致。由此条件出发, 火箭和炮弹的静稳定性和静不稳定性就可表述如下:

- $l_{u,\kappa} - l_{u,\pi} < 0$ 时 火箭或炮弹是静稳定的;
- $l_{u,\kappa} - l_{u,\pi} > 0$ 时 火箭或炮弹是静不稳定的;
- $l_{u,\kappa} - l_{u,\pi} = 0$ 时 火箭或炮弹处于随遇平衡状态

弹丸沿弹道运动时其飞行速度和它相对于速度矢量的方位不断变化, 使得压心相对于弹体的位置也不断变化; 此外在弹道主动段上因发动机工作时燃料的排出, 火箭质心相对于自己的初始位置也在移动。由于这两个原因就可以引起 $l_{u,\kappa} - l_{u,\pi}$ 值的显著变化, 从而也引起确定火箭稳定程度的导数 m_z^* 的变化。由此得出, 为了保证火箭飞行中姿态角稳定, 必须保证沿全弹道满足条件 $m_z^* < 0$ 以及不等式 $|m_z^*| \geq |m_{z_{\text{静}}^*}|$ 。

换句话说, 尾翼稳定火箭(或炮弹)应具有必要的“静”稳定储备量, 静稳定储备量通常用按如下关系算出的量 $m_{\text{静}}^*$ 以百分数表示:

$$m_{\text{静}}^* = \frac{|m_z^*|}{c_{y_a}^*} = \frac{|l_{u,\kappa} - l_{u,\pi}|}{l} \times 100\% = (c_{u,\kappa} - c_{u,\pi})100\% \quad (4.2)$$

式中 $c_{u,\pi}$ 是压心位置系数; $c_{u,\kappa}$ 是质心位置系数。通常认为, 如果无控火箭的静稳定储备是 $m_{\text{静}}^* = 10\% \sim 15\%$, 则它们就有较好的稳定性。

下面研究一下无控静稳定炮弹相对质心运动的特点(设弹丸仅在射击平面内运动)。为简单计, 我们只研究一段弹道, 故沿此段弹道运动时可以认为 $m_z^* = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ 。在不考虑阻尼作用的情况下弹丸相对于质心运动的方程就可写成如下形式:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_c^2\alpha = 0 \quad (4.3)$$

式中 $\omega_c^2 = \frac{M_x}{I_z \alpha} = \frac{S q l}{I_z} |m_z^*|$ 是可以沿已知的尾翼弹质心弹道预先算出的系数。

在一段不长的弹道弧段上,当初始条件为 $t = 0, \alpha = \alpha_0, \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_0$ 时,方程(4.3)的解为

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_c t) + \frac{\dot{\alpha}_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \quad (4.4)$$

经过不太复杂的变换,此解可写成如下更为方便的形式:

$$\alpha = \alpha_m \sin(\omega_c t + \epsilon) \quad (4.5)$$

式中相位角

$$\epsilon = \operatorname{arctg} \frac{\omega_c \alpha_0}{\dot{\alpha}_0} \quad (4.6)$$

这个解表明,在所取假设条件下,静稳定尾翼弹相对质心的运动是平面谐振动,其振幅为

$$\alpha_m = \sqrt{\left[\frac{\dot{\alpha}_0}{\omega_c}\right]^2 + \alpha_0^2} \quad (4.7)$$

周期为

$$T = 2\pi/\omega_c$$

与此解相应的攻角 α 的变化曲线如图 4.3 所示。

在上述情况里,在分析静稳定尾翼火箭和炮弹的振动运动时我们没有考虑阻尼力矩 $M_{\text{阻}}$ 。这个力矩的作用在第 1 章里研究过,在现在的情况下 $M_{\text{阻}}$ 的作用是使由起始扰动和力矩 M_x 产生的振荡运动衰减。考虑阻尼力矩时攻角 α 改变的情况也表示在图 4.3 中。(曲线 2)

这样,在稠密大气层里,尾翼火箭和炮弹沿弹道运动时,其纵轴将平稳地追随速度矢量 V ,一直到

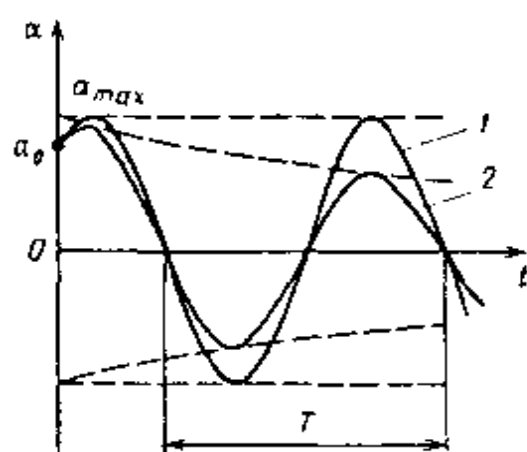


图 4.3 攻角 α 的变化

1. 不考虑阻尼

2. 考虑阻尼

某个扰动又重新激起振动为止。

下面研究用旋转稳定弹丸的方法。相对于弹轴高速旋转的炮弹沿弹道运动时,空气动力所产生的力矩力图使炮弹翻转,但它像一个陀螺一样并不翻倒,而是稳定地运动,在运动过程中弹丸纵轴“追随”弹道切线相对于动力平衡轴振动。炮弹的转速是当其在身管中前进时由于弹带的凸出部沿身管的螺旋膛线运动而形成的。旋转稳定的火箭称为涡轮式火箭(TPC),它依靠燃气从斜置喷管中喷出而旋转。炮弹或涡轮式火箭弹的转速应这样来考虑,它应使弹丸沿弹道运动时其纵轴不断地追随质心运动方向,以使弹轴与质心运动方向的偏离在允许的角度范围之内。

正如许多研究所表明的那样,炮弹和火箭相对于质心的运动可以与沿弹道的移动分开进行研究,而认为质心运动为已知的时间函数 $V(t)$ 、 $\theta(t)$ 、 $y(t)$ 等。在这种情况下,对于旋转稳定弹的工程计算来说,在一级近似中只要考虑翻转力矩 M_x 就足够了,这是因为翻转力矩是决定旋转运动特征的主要因素^[35]。

对高速旋转弹丸运动稳定性条件评估的第一个理论结果是由 H. B. 马也夫斯基获得的^[73],他把这个问题归结为理论力学中著名的对称重刚体绕不动点运动的拉格朗日 - 普瓦松情况。其中利用了这样一个假设,即对于弹轴与弹道切线的小偏差,空气阻力起到了类似于重力的作用。马也夫斯基利用近似解析方法得到了炮弹沿低伸弹道旋转运动的稳定条件,H. Г. 契塔耶夫称它为稳定性必要条件,而严格的结果由 A. H. 克雷诺夫给出^[59]。

H. Г. 契塔耶夫曾利用李雅普诺夫直接方法研究过在弹道起始段上仅有翻转力矩作用时弹丸的运动,他证明了在满足马也夫斯基条件的情况下,含有零章动角的弹丸角运动具有李雅普诺夫稳定性^[115]。利用李雅普诺夫第一方法,B. C. 普加乔夫证明了,考虑作用在炮弹上的全力组的情况下,理想弹道对应的运动按李雅普诺夫定义是不稳定的。

下面将要引用弹道学中的这些经典结论(见 § 4.3),而弹丸的原始运动方程则取 B. C. 普加乔夫形式的运动方程。炮弹运动稳定性

的充分条件(按契塔耶夫术语)以及作用在弹上的各种力对稳定性的影响将在第八章中单独研究。

§ 4.2 李雅普诺夫运动稳定性

4.2.1 李雅普诺夫运动稳定性的定义

设飞行器的运动以如下形式的常微分方程组来描述:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= Y_1(t, y_1, \dots, y_n); \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{y}_n &= Y_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (4.8)$$

式中 y_1, \dots, y_n 是表示系统状态的变量, 在我们的情况下即是表征飞行器运动的变量。

某个完全确定而需研究其稳定性的运动称为未扰动运动。设与它相应的、满足起始条件

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{10} = \xi_1(t_0); \dots\dots\dots \\ y_n &= y_{n0} = \xi_n(t_0) \end{aligned} \quad \text{当 } t = t_0 \text{ 时} \quad (4.9)$$

的、方程(4.8)的特解为 $y_1 = \xi_1(t), \dots, y_n = \xi_n(t)$ 。

在同样的力作用下系统可能的、将要与未扰动运动进行比较的其它运动 $y_i = y_i(t) (i = 1, 2, \dots, n)$, 称为扰动运动。其相应的起始条件改为

$$\begin{aligned} t = t_0 \text{ 时,} \\ y_1 = \xi_1(t_0) + \epsilon_1; \quad \dots\dots \quad y_n = \xi_n(t_0) + \epsilon_n \end{aligned} \quad (4.10)$$

量 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 称之为扰动, 扰动运动与未扰动运动同一变量的差值为

$$x_i = y_i(t) - \xi_i(t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.11)$$

变量 x_i 称为量 y_i 的偏差或变分, 如果所有的偏差都等于零 [$x_i = 0, (i = 1, \dots, n)$], 则扰动运动 $y_i(t)$ 就与未扰动运动 $\xi_i(t)$ 一致。当 $t = t_0$ 时, 起始偏差 x_{i0} 即是系统的扰动

$$x_i = x_{i0} = \epsilon_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.12)$$

如果对于给定的、任意小的正数 A 都可以找到这样一个正数 Δ , 对于满足条件

$$\dot{x}_i + \dot{\xi}_i = Y_i(t, x_1 + \xi_1, \dots, x_n + \xi_n) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.16)$$

将此方程的右边展成泰勒级数,得

$$\begin{aligned} \dot{x}_i + \dot{\xi}_i = & Y_i(t, \xi_1, \dots, \xi_n) + \left[\frac{\partial Y_i}{\partial x_1} \right]_0 x_1 \\ & + \dots + \left[\frac{\partial Y_i}{\partial x_n} \right]_0 x_n + X_i^* \end{aligned} \quad (4.17)$$

式中 X_i^* 是高于二阶的各项偏差之和,偏导数式的下标“0”表示它们是在 $x_i = 0$ 处取值,也即按自变量的未扰动值进行计算。

因为在未扰动运动中函数 $\xi_i(t)$ 应满足方程(4.8),也即

$$\dot{\xi}_i = Y_i(t, \xi_1, \dots, \xi_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.18)$$

故最后得

$$\dot{x}_i = X_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (4.19)$$

式中

$$X_i(t, x_1, \dots, x_n) = \left[\frac{\partial Y_i}{\partial x_1} \right]_0 x_1 + \dots + \left[\frac{\partial Y_i}{\partial x_n} \right]_0 x_n + X_i^*$$

方程(4.19)称为扰动运动微分方程。如果在这些方程中舍去 X_i^* 项,则得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & \left[\frac{\partial Y_1}{\partial x_1} \right]_0 x_1 + \dots + \left[\frac{\partial Y_1}{\partial x_n} \right]_0 x_n; \\ & \dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = & \left[\frac{\partial Y_n}{\partial x_1} \right]_0 x_1 + \dots + \left[\frac{\partial Y_n}{\partial x_n} \right]_0 x_n \end{aligned} \quad (4.20)$$

此方程组称为一级近似方程组。

因此,关于方程(4.8)特解的未扰动运动 $\xi_i(t)$ 的稳定性分析就归结为对扰动运动方程零解(即平衡状态)的稳定性分析,这是因为在 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 时,所有的函数 X_i 都变为零

$$X_i(t, 0) \equiv 0 \quad (4.21)$$

如果扰动运动方程是自治的,也即函数 x_i 不显含时间,则有

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (4.22)$$

4.2.2 李雅普诺夫第一方法和一级近似稳定性

李雅普诺夫首先提出了这个研究方法,他利用此法成功地得到

了扰动运动微分方程组的解,并用它来证明零解的稳定性或不稳定性。

在稳定性定义下,认为扰动运动是在未扰动运动所考虑的同样的外力作用下发生的,故不存在扰动力。

如果对抗动力不加什么限制,则在扰动力作用下的稳定性问题就没什么意义。但如果作用在飞行器上的扰动从一种情况到另一种情况改变很小,以致这种改变不影响函数 x_i 中的线性项时,则主要的问题是和高阶项无关的一级近似(也即一级近似方程)稳定性问题,也就是一级近似方程满足什么条件时运动具有稳定性的问题。

在一级近似方程(4.20)中,记

$$\left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_1}\right)_0 = a_{i1} \quad \cdots \quad \left(\frac{\partial Y_i}{\partial x_n}\right)_0 = a_{in} \quad (i = 1, \cdots, n)$$

就可将其写成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n; \\ &\cdots \cdots \cdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned} \quad (4.23)$$

让我们来研究当方程(4.23)所有的系数为常数而成为一个自治系统时的情况,此时方程的特解可写成如下形式:

$$x_1 = A_1 e^{\lambda t} \quad \cdots \quad x_n = A_n e^{\lambda t} \quad (4.24)$$

式中 $A_1, \cdots, A_n, \lambda$ 为常数。将方程(4.24)求导,得导数为

$$\dot{x}_1 = A_1 \lambda e^{\lambda t} \quad \cdots \quad \dot{x}_n = A_n \lambda e^{\lambda t} \quad (4.25)$$

将方程(4.24)和(4.25)代入方程(4.23)中,消去共同因子 $e^{\lambda t}$,得

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)A_1 + a_{12}A_2 + \cdots + a_{1n}A_n &= 0; \\ a_{21}A_1 + (a_{22} - \lambda)A_2 + \cdots + a_{2n}A_n &= 0; \\ &\cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)A_n &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

此线性齐次代数方程组对常量 A_1, \cdots, A_n 应有非零解(否则的话则所有的 $x_n \equiv 0$),因此这个方程组的行列式应等于零,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (4.27)$$

所得的关于 λ 的方程称为特征方程, 特征方程含有未知数 λ 的 n 次方, 因而它有 n 个根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 。如果特征根中不存在彼此相等的根, 则总存在一个非奇异线性变换,

$$z_1 = \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \quad \cdots \quad z_n = \sum_{i=1}^n a_{ni} x_i \quad (4.28)$$

式中 a_{ji} 为常数, 它将使一级近似方程变成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1; \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{z}_n &= \lambda_n z_n \end{aligned} \quad (4.29)$$

变量 z_1, \dots, z_n 称为标准变量。因为系数 a_{ji} 是常数, 故从对变量 x_i 的运动稳定性就可以得出对变量 z_i 的运动稳定性, 反之也一样。在以上关于根 λ 所作的假设下, 方程(4.29)就可以彼此独立地积分, 其解具有如下形式:

$$z_1 = z_{10} e^{\lambda_1 t} \quad \cdots \quad z_n = z_{n0} e^{\lambda_n t} \quad (4.30)$$

式中 z_{i0} 是 $t = 0$ 时的变量值, 在一般情况下 $\lambda_k = \nu_k + i\mu_k$ 。如果 $\nu_k \neq 0, \mu_k \neq 0$, 则根是复数; 如果 $\nu_k = 0, \mu_k \neq 0$, 则根是虚数; 如果 $\mu_k = 0$ 则根是实数; 当 $\mu_k = \nu_k = 0$ 时则为零根。于是

$$|e^{\lambda_k t}| = |e^{(\nu_k + i\mu_k)t}| = e^{\nu_k t} |e^{i\mu_k t}|$$

因为 $|e^{i\mu_k t}| = |\cos \mu_k t + i \sin \mu_k t| = 1$ 故

$$|e^{\lambda_k t}| = e^{\nu_k t} \quad (4.31)$$

由等式(4.31)得, 当 $t \rightarrow \infty$ 时

$$\begin{aligned} |e^{\lambda_k t}| &\rightarrow 0 && \text{当 } \nu_k < 0 \text{ 时} \\ |e^{\lambda_k t}| &= 1 && \text{当 } \nu_k = 0 \text{ 时} \\ |e^{\lambda_k t}| &\rightarrow \infty && \text{当 } \nu_k > 0 \text{ 时} \end{aligned} \quad (4.32)$$

因此, 对于特征方程无重根的线性自治系统, 其稳定性问题的解决取决于特征方程所有根的实部符号。

A. M. 李雅普诺夫曾准确地表述过一级近似方程的运动稳定性条件,他证明了关于一级近似的稳定性和不稳定性定理:

如果一级近似的特征方程的所有根都具有负实部,则未扰动运动是渐近稳定的,而与一级以上的小量无关;如果特征方程根中那怕有一个具有正实部,则未扰动运动是不稳定的,而与一级以上小量无关。

这两个一级近似稳定性理论解决了两种情况下:当特征方程所有的根的实部为负值以及那怕只有一个根的实部为正的情况下的稳定性问题。在另一些情况(它们被称为奇异情况或临界情况)下,例如,当某个根的实部等于零时,为了判断运动稳定性仅用一级近似方程是不够的,这时必须要研究高阶项的影响。

4.2.3 李雅普诺夫第二方法

李雅普诺夫第二方法是研究稳定性最有效的方法之一,按照 H. Г. 契塔耶夫的建议称它为直接方法。它是基于利用李雅普诺夫函数的方法,而这种李雅普诺夫函数是针对所研究的扰动运动方程组而得出的。

这个方法不要求扰动运动方程的一般解,这也就是此法的本质优点。在弹道学中任何一个对工程实际问题有意义的结论都是建立在对火箭和炮弹运动数学模型本身的研究上,这是因为这些数学模型通常没有分析解。

李雅普诺夫第二方法是保守力场中质点平衡位置稳定性一般原理的发展。众所周知,最小势能点是质点的稳定平衡位置,而最大势能点是不稳定平衡位置。李雅普诺夫第二方法的基本思想就是要寻找这个系统相空间点的、类似于静止质点势能函数的坐标函数 $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

下面介绍一下对于自治系统李雅普诺夫第二方法的基本概念,弹道学中大量的实际问题都可归结为对这种系统的分析。

李雅普诺夫函数 我们研究在某个域

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 < A \quad (4.33)$$

中定义的实函数 $V(x) = V(x_1, \dots, x_n)$, 式中 A 是一正常数, 并假设在域(4.33)中这些函数是单值、连续的, 并且在坐标原点处变成零, 也即当 $x_i = 0 (i = 1, \dots, n)$ 时

$$V(0) = 0 \quad (4.34)$$

如果在域(4.33)中函数 V 除了零值外只能取相同符号的值, 则称它为常号(常正或常负)函数; 如果常号函数仅在 x_1, x_2, \dots, x_n 都等于零时才变为零(也即在扰动系统相空间的唯一一点——原点上变为零), 则称函数 $V(x)$ 是定号的(相应称为正定的或负定的)。既可以取正值又可以取负值的函数称为变号函数。

以这种方式引入的函数称李雅普诺夫函数。

由所引入的定义知, 定号函数在 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 处有极值: 在正定的情况下是极小值; 在负定的情况下是极大值。

设函数 $V = V(x)$ 及其导数是连续的, 并且是定号的, 则当 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 时它将有孤立极值, 这就意味着在该点计算的、所有的一阶偏导数都等于零(这是极值存在的必要条件):

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.35)$$

将函数 V 按 x_1, \dots, x_n 的幂分解成麦克劳林级数得

$$\begin{aligned} V = V(0) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial V}{\partial x_i} \right]_0 x_i \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} \right]_0 x_j x_i + \dots \end{aligned} \quad (4.36)$$

考虑到式(4.34)和(4.35)后得

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n c_{ji} x_j x_i + \dots \quad (4.37)$$

常系数 $c_{ji} = c_{ij}$ 用下面的等式确定:

$$c_{ji} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} \right]_0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.38)$$

由(4.37)式可见, 定号函数分解成 x_1, \dots, x_n 的幂级数时不含一阶项, 如果二次型

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ji} x_j x_i \quad (4.39)$$

取正值并且只在 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 时变为零, 则当 x_i 的模足够小时函数 V 也将取正值, 并且仅在 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ 时变为零而与高阶项无关。因此, 如果二次型 (4.39) 是正定的, 则函数 V 也是正定的。

西尔维斯特判据 研究下面二次型的系数矩阵

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

以及由它形成的 n 个主对角线子行列式

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= c_{11} & \Delta_2 &= \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}; \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_n &= \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & & c_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.41)$$

在线性代数里已证明了西尔维斯特判据: 为使二次型正定, 其充分必要条件是使系数矩阵的所有主对角线子行列式 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ 为正, 也即要

$$\Delta_1 > 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \cdots \quad \Delta_n > 0 \quad (4.42)$$

因此, 对于函数 V 的二次部分的西尔维斯特判据是函数 (4.37) 本身正定性的充分条件。

如果函数 V 是负定的, 则 $(-V)$ 将是正定的。因此函数 V 负定的条件可用对于矩阵 $(-C)$ 的西尔维斯特判据求得, 即应有

$$\Delta_1 < 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \Delta_3 < 0 \quad \cdots \quad (4.43)$$

也即行列式 Δ_i 的符号依次交错。

李雅普诺夫第二方法基本定理 在研究函数 V 的同时, 我们再看一下在变量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 满足扰动运动微分方程 (4.22) 的假设下它对时间的导数, 得

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} \dot{x}_n \quad (4.44)$$

将扰动运动微分方程(4.22)代入(4.44)式以代替 \dot{x}_i ,得

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} X_n \quad (4.45)$$

导数 \dot{V} 的值可以用来直观地观察在扰动方程组(4.22)相空间里所描述的点的运动。

对于任何正定的函数 V ,方程

$$V(x_1, \cdots, x_n) = c$$

表示在扰动方程组相空间里的单参数封闭曲线族,并且在坐标原点附近,比 c 小的 c_1 值所对应的曲面完全位于由大参数 c 值对应的曲面所围成的域之内,在 $c \rightarrow 0$ 时曲面压缩成一点——坐标原点。

从几何上思考是更明显的。如果当系统运动时,所描述的相空间中的点在坐标原点附近只可能在表面 $V(x_1, \cdots, x_n) = c$ 之内或沿此表面运动而不可能向外越出由表面所限定的区域面,则系统是稳定的(见图4.5a)。进一步,如果所描述的点总只能向任意表面 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c$ 之内移动(见图4.5b),则系统是渐近稳定的。

如果所描述的点向表面 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n) = c$ 之内运动,则正定函数 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在系统运动过程中减少,因而它对时间的全导数将是负的。如果所描

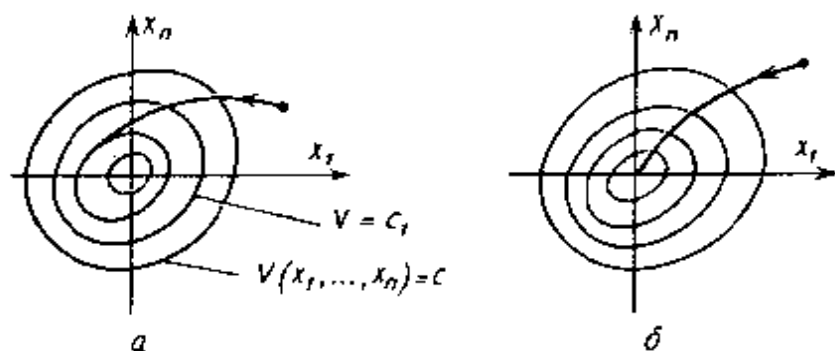


图4.5 在相空间中所描述的点的运动轨迹

(a) 稳定系统; (b) 渐近稳定系统。

述的点沿 $V(x_1, \cdots, x_n) = c$ 表面运动,则 V 对时间的全导数等于零。因此,如果所描述的点只能向任意表面 $V = c$ 之内运动或在此表面上运动,则函数 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 的全导数是常负的。如果所描述的点只

能向表面 $V = c$ 之内部运动,则此全导数是负定的。以上的几何描述以图解方式阐明了李雅普诺夫关于稳定性和不稳定性的基本定理。

李雅普诺夫稳定性定理 如果对于扰动运动微分方程可以找到一个定号函数 V , 其导数 \dot{V} 由原方程确定是与 V 反号的常号函数, 或者恒等于零, 则未扰动运动是稳定的。

李雅普诺夫渐近稳定性定理 如果对于扰动运动微分方程可以找到一个定号函数, 其导数 \dot{V} 由原方程确定是与 V 反号的定号函数, 则未扰动运动是渐近稳定的。

A. M. 李雅普诺夫还证明了关于运动不稳定的两个定理, 契塔耶夫综合这两个定理证明了一个定理, 李雅普诺夫的这两个定理可作为此定理的特殊情况而得出。

契塔耶夫运动不稳定定理 如果对于扰动运动微分方程组可以找到一个函数 V , 它在零点附近的任意小的邻域内存在一个 $V > 0$ 的域, 如果由此方程计算出的函数 V 的导数 \dot{V} 在域 $V > 0$ 内一切点上为正, 则未扰运动是不稳定的。

必须指出, 直接方法只给出了运动稳定性的充分条件, 也就是说, 不满足这些条件并不意味着系统的运动就不稳定。

李雅普诺夫函数的建立 这个方法的实际应用常遇到寻找李雅普诺夫函数 $V(x_1, \dots, x_n)$ 的困难, 对于任意一个系统建立李雅普诺夫函数的普遍方法是不存在的。

但对于许多类型的问题也详细研究过建立李雅普诺夫函数的一般性方法, 在文献[96]中对这些基本方法作了评述。在这里我们研究一下在求解弹道学问题时由契塔耶夫提出的建立李雅普诺夫函数的方法。

设扰动运动方程(4.22)有首次积分:

$$F(x_1, \dots, x_n) = \text{const} = h \quad (4.46)$$

对于它, 差值 $F(x) - F(0)$ 是变量 x_1, \dots, x_n 的正定函数, 这时可取如下函数作为李雅普诺夫函数:

$$V = F(x_1, \dots, x_n) - F(0) \quad (4.47)$$

实际上函数 V 对时间的导数根据(4.46) 式恒等于零,因而这个函数将满足关于运动稳定性的李雅普诺夫定理的一切条件。

在某些情况下运动方程可以有几个首次积分

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = h_1 \quad \dots \quad F_k(x_1, \dots, x_n) = h_k \quad (4.48)$$

并且其中任何一个都不是正定函数。对于这种情况,契塔耶夫也给出了寻找具有首次积分串的函数 V 的方法,在一般情况下

$$V = \lambda_1[F_1 - F_1(0)] + \dots + \lambda_k[F_k - F_k(0)] \\ + \mu_1[F_1^2 - F_1^2(0)] + \dots + \mu_k[F_k^2 - F_k^2(0)] \quad (4.49)$$

式中 $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_k$ 是待定常数,如果这些常数能成功地选择得使函数成为正定的,则此函数将满足关于运动稳定性的李雅普诺夫定理的一切条件。我们指出,这 $2k$ 个系数 λ, μ 之一可以任意选择。通常设 $\mu_k = 0$,即只利用首次积分串中的线性部分建立此函数。

§ 4.3 高速旋转弹的运动稳定性

4.3.1 在弹道起始段上弹丸相对质心运动方程的首次积分

下面在弹道起始段上忽略弹道的弯曲,研究仅在翻转力矩作用下炮弹的运动。在这种假设下描述弹丸相对质心运动的方程可以以普加乔夫形式的弹丸运动一般方程(3.157) 获得,这只需在该方程中设

$$f_2 = f_3 = f_5 = f_6 = f_7 = 0 \quad \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0 \quad (4.50)$$

即可。在这种情况下描述弹丸绕质心运动的方程组(3.157) 的第4…7 个方程就可以单独地进行积分和研究而与描述质心运动的方程无关。故由方程(3.157) 将有

$$\begin{aligned} z_3 \ddot{z}_1 - \ddot{z}_3 z_1 + 2\alpha \dot{z}_2 &= -f_4 z_3; \\ z_1 \ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 z_2 + 2\alpha \dot{z}_3 &= f_4 z_2; \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= 1; \\ \dot{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (4.51)$$

将方程(4.51) 的第一和第二个方程分别乘以 z_2 和 z_3 后相加得

$$z_1 z_3 \ddot{z}_2 - z_1 z_2 \ddot{z}_3 + 2\alpha(z_2 \dot{z}_2 + z_3 \dot{z}_3) = 0$$

由此得

$$z_3 \ddot{z}_2 - z_2 \ddot{z}_3 + 2\alpha \frac{z_2 \dot{z}_2 + z_3 \dot{z}_3}{z_1} = 0 \quad (4.52)$$

对方程组(4.51)的第三个方程的两边求全微分得

$$\frac{z_2 \dot{z}_2 + z_3 \dot{z}_3}{z_1} = -\dot{z}_1 \quad (4.53)$$

考虑到(4.53)式,则方程(4.52)将变为

$$-z_3 \ddot{z}_2 + z_2 \ddot{z}_3 + 2\alpha \dot{z}_1 = 0 \quad (4.54)$$

注意到方程(4.54)可表示成如下形式:

$$\frac{d}{dt}(-z_3 \dot{z}_2 - z_2 \dot{z}_3 + 2\alpha z_1) = 0 \quad (4.55)$$

故而表达式

$$-z_3 \dot{z}_2 - z_2 \dot{z}_3 + 2\alpha z_1 = \text{const} = h_1 \quad (4.56)$$

是方程组(4.51)的首次积分。

现将方程组(4.51)的第一个方程乘以 \dot{z}_3 , 第二个方程乘以 \dot{z}_2 , 相加后得

$$-\ddot{z}_1(z_2 \dot{z}_2 + z_3 \dot{z}_3) + z_1(\dot{z}_3 \ddot{z}_3 + \dot{z}_2 \ddot{z}_2) = f_4(z_3 \dot{z}_3 + z_2 \dot{z}_2) \quad (4.57)$$

考虑到(4.53)式,此方程有如下形式:

$$\dot{z}_1 \ddot{z}_1 + \dot{z}_2 \ddot{z}_2 + \dot{z}_3 \ddot{z}_3 + f_4 \dot{z}_1 = 0 \quad (4.58)$$

注意到方程(4.58)的左边是对时间的全导数

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + \dot{z}_3^2) + f_4 z_1 \right] = 0 \quad (4.59)$$

因此,表达式

$$\frac{1}{2}(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + \dot{z}_3^2) + f_4 z_1 = \text{const} = h_2$$

是方程组(4.51)的第二个首次积分。

第三个方程是平凡积分,在刚体动力学里称为余弦积分或几何积分,因为它表达了在弹道坐标系里确定弹轴方位的方向余弦的平方和等于1。

最后,从方程(4.51)可以得出4个首次积分:

$$-z_3 \dot{z}_2 - z_2 \dot{z}_3 + 2\alpha z_1 = h_1;$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + \dot{z}_3^2) + f_4 z_1 &= h_2; \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= 1; \\ \alpha &= \alpha_0 = h_3\end{aligned}\quad (4.60)$$

4.3.2 弹丸角运动稳定性的必要条件

取弹轴与质心速度方向一致的运动为弹丸的未扰动运动,也即取

$$\delta_1(t) = \delta_2(t) = \dot{\delta}_1(t) = \dot{\delta}_2(t) = 0 \quad (4.61)$$

为未扰动运动,我们要确定它的稳定性。

先将以变量 $z_i (i = 1, 2, 3)$ 表示的旋转运动方程直接转换成以确定弹轴在弹道坐标系中方位的角度 δ_1 和 δ_2 表示的方程,为此将方程组(4.51)的第一个方程乘以 $(1 - z_3^2)$,第二个方程乘以 $z_2 z_3$,然后相加,得

$$\begin{aligned}z_3(1 - z_1^2 - z_2^2)\ddot{z}_1 - z_1(1 - z_2^2)\ddot{z}_3 + z_1 z_2 z_3 \ddot{z}_2 \\ + 2\alpha[(1 - z_3^2)\dot{z}_2 + z_2 z_3 \dot{z}_3] = f_4 z_3(z_2^2 + z_3^2 - 1)\end{aligned}\quad (4.62)$$

按照(3.161)式有

$$z_1 = \cos\delta_2 \cos\delta_1, \quad z_2 = \sin\delta_2 \cos\delta_1, \quad z_3 = \sin\delta_1$$

将这些表达式对时间微分两次,得到 \dot{z}_i 和 $\ddot{z}_i (i = 1, 2, 3)$ 。将对于 z_i, \dot{z}_i 和 \ddot{z}_i 的相应表达式代入(4.62)中,经过不太复杂的变换得

$$\begin{aligned}-\dot{\delta}_1 \cos^2\delta_1 \cos\delta_2 - \dot{\delta}_2^2 \sin\delta_1 \cos^3\delta_1 \cos\delta_2 + \\ 2\alpha\dot{\delta}_2 \cos^3\delta_1 \cos\delta_2 = -f_4 \sin\delta_1 \cos^2\delta_1 \cos^2\delta_2\end{aligned}$$

将所得到的方程再除以 $(-\cos^2\delta_1 \cos\delta_2)$ 就可将其归为如下形式:

$$\ddot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2^2 \sin\delta_1 \cos\delta_1 - 2\alpha\dot{\delta}_2 \cos\delta_1 = f_4 \sin\delta_1 \cos\delta_2 \quad (4.63)$$

类似地将 $z_i, \dot{z}_i, \ddot{z}_i$ 代入方程组(4.51)的第二个方程,得

$$\ddot{\delta}_2 \cos\delta_1 - 2\dot{\delta}_1 \dot{\delta}_2 \sin\delta_1 + 2\alpha\dot{\delta}_1 = f_4 \sin\delta_2 \quad (4.64)$$

对于未扰动运动(4.61),扰动运动方程将是(4.63)和(4.64)。正如上面所指出的那样,它们有首次积分 h_1 和 h_2 。为了求得变量 δ_1 ,

δ_2 表示的式子,将 z, \dot{z} 与 δ_1, δ_2 角的关系式代入方程组(4.60)的头两个方程中,得

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1 \sin \delta_2 - \dot{\delta}_2 \sin \delta_1 \cos \delta_1 \cos \delta_2 + 2\alpha \cos \delta_1 \cos \delta_2 = h_1 \\ \frac{1}{2}(\dot{\delta}_1^2 + \dot{\delta}_2^2 \cos^2 \delta_1) + f_4 \cos \delta_1 \cos \delta_2 = h_2 \end{cases} \quad (4.65)$$

为了求解未扰动运动(4.61)的稳定性问题, H. Γ. 契塔耶夫利用了李雅普诺夫直接方法,并建立了以扰动运动方程(4.63)和(4.64)的首积分有关形式表示的李雅普诺夫函数(见[115])。将第一个积分 h_1 乘以 $(-2f_4)$,第二个积分 h_2 乘以 2α 并相加得

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2}2\alpha(\dot{\delta}_1^2 + \dot{\delta}_2^2 \cos^2 \delta_1) + 2\alpha f_4 \cos \delta_1 \cos \delta_2 - \\ & 2f_4 \dot{\delta}_1 \sin \delta_2 + 2f_4 \dot{\delta}_2 \sin \delta_1 \cos \delta_1 \cos \delta_2 - \\ & 2\alpha 2f_4 \cos \delta_1 \cos \delta_2 = 2\alpha h_2 - 2f_4 h_1 \end{aligned} \quad (4.66)$$

将(4.66)式中的三角函数展成泰勒级数,得

$$\begin{aligned} \sin \delta_i &= \delta_i - \frac{\delta_i^3}{3!} + \dots \\ \cos \delta_i &= 1 - \frac{\delta_i^2}{2!} + \dots \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

只保留级数的 $\sim \delta_i, \sim \delta_i^2$ 项,得

$$\cos^2 \delta_1 = \left[1 - \frac{\delta_1^2}{2} + \dots\right]^2 = 1 - \delta_1^2 + \dots \quad (4.67)$$

$$\sin \delta_1 \cos \delta_1 \cos \delta_2 = [\delta_1 + \dots] \left[1 - \frac{\delta_1^2}{2} + \dots\right] \left[1 - \frac{1}{2}\delta_2^2 + \dots\right] = \delta_1 + \dots$$

$$\cos \delta_1 \cos \delta_2 = \left[1 - \frac{1}{2}\delta_1^2 + \dots\right] \left[1 - \frac{1}{2}\delta_2^2 + \dots\right] = 1 - \frac{\delta_1^2}{2} - \frac{\delta_2^2}{2} + \dots$$

将这些乘数的值代入函数 W 的表达式中,得

$$\begin{aligned} W + 4\alpha f_4 &= \alpha \dot{\delta}_1^2 - 2f_4 \dot{\delta}_1 \delta_2 + \alpha f_4 \delta_2^2 + \alpha \dot{\delta}_2^2 + 2f_4 \dot{\delta}_2 \delta_1 \\ &+ \alpha f_4 \delta_1^2 + \dots = W_2 + \dots \end{aligned} \quad (4.68)$$

式中 W_2 是关于变量 $\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2$ 的二次型,它由两个同一类型的二次型组成。我们只研究其中如下的一个就够了:

$$W_2 = \alpha \dot{\delta}_1^2 - 2f_4 \dot{\delta}_1 \delta_2 + \alpha f_4 \delta_2^2 \quad (4.69)$$

按照西尔维斯特判据(4.42),式子 W_2 当其行列式的各主对角线子式均为正时是正定的,在现在的情况下就应满足

$$\alpha > 0 \quad \begin{vmatrix} \alpha & -f_4 \\ -f_4 & \alpha f_4 \end{vmatrix} = \alpha^2 f_4 - f_4^2 > 0 \quad (4.70)$$

如果不等式(4.70)被满足,则对于弹丸的未扰动旋转运动($\delta_1 = \delta_2 = \dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_2 = 0$),至少在变量 $\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2$ 值很小的范围里函数 $W + 2\alpha f_4 = W_2 + \dots$ 是正定的。因为函数 W 以各首次积分线性相加的方式构成,故按精确的扰动运动方程(4.63), (4.64), 函数 $(W + 4\alpha f_4)$ 对时间的全导数将等于零。因而在满足不等式(4.70)的情况下也就满足了关于运动稳定性的李雅普诺夫直接方法的条件,因而所研究的未扰动运动(4.61)是稳定的。

不等式(4.70)的第一个式子显然是成立的,这是因为 $\alpha = \alpha_0 = \frac{C}{2A} r_0 > 0$ 。考虑到 $f_4 > 0$, 由马也夫斯基首先得到的第二个不等式可写成如下形式:

$$\alpha^2 - f_4 > 0 \quad (4.71)$$

因为表达式(4.68)是弹丸的精确扰动运动方程的首次积分,故所建立的函数解决了在变量 $\delta_1, \delta_2, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2$ 相空间有限域内的稳定性问题,在该域中, $W = \text{const}$ 给出了一个由表面限定、可收缩到坐标原点的封闭系。

4.3.3 炮弹运动的李雅普诺夫稳定性一般问题

B. C. 普加乔夫证明过,在无穷长时间间隔上,也即 $t \rightarrow \infty$ 时,相应与高速旋转炮弹理想飞行的未扰动运动是李雅普诺夫不稳定的^[88]。

我们来研究以 B. C. 普加乔夫形式描述的弹丸空间运动方程组(3.157),在变量 t 的值很大($t \rightarrow \infty$)时变量 y_c 的绝对值无限增大($y_c \rightarrow -\infty$)。为了避免在 $t = \infty$ 时 y_c 的值无穷大,合理地进行如下代换

$$w = e^{y_c} \quad (4.72)$$

这样,在 $y_c \rightarrow -\infty$ 时 $w \rightarrow 0$ 。考虑到(4.72)式,联立方程组(3.157)

具有如下形式:

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -g \sin \theta - f_1; \\
 \dot{\theta} &= -gV^{-1} \cos \theta + f_2 z_2 + f_3 z_3; \\
 \dot{w} &= wV \sin \theta; \\
 \dot{z}_2 &= u_2; \\
 \dot{z}_3 &= u_3; \\
 \dot{u}_2 &= [\Phi_2 - z_2(\Phi_1 z_3 + \Phi_2 z_2)](1 - z_2^2 - z_3^2)^{-\frac{1}{2}}; \\
 \dot{u}_3 &= [\Phi_1 - z_3(\Phi_1 z_3 + \Phi_2 z_2)](1 - z_2^2 - z_3^2)^{-\frac{1}{2}}; \\
 \dot{\alpha} &= -f_6 \alpha
 \end{aligned} \tag{4.73}$$

系统(4.73)的平衡状态,或者说变量 $V, \theta, w, z_2, z_3, u_2, u_3, \alpha$ 的特定值由方程(4.73)的右边等于零来确定:

$$\begin{aligned}
 g \sin \theta + f_1 &= 0; \\
 gV^{-1} \cos \theta - f_2 z_2 - f_3 z_3 &= 0; \\
 wV \sin \theta &= 0; \\
 u_2 = u_3 &= 0; \\
 \Phi_2 - z_2(\Phi_1 z_3 + \Phi_2 z_2) &= 0; \\
 \Phi_1 - z_3(\Phi_1 z_3 + \Phi_2 z_2) &= 0; \\
 \alpha &= 0
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

函数 Φ_1 和 Φ_2 与表达式 $\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2}$ 有关,此式的正值相应于弹丸头部向前飞行,而负值相应于弹丸头部翻转向后的飞行 ($\sqrt{1 - z_2^2 - z_3^2} = z_1 = \cos \delta$, 当 $\delta \in [0 \sim \frac{\pi}{2}]$ 时, $\cos \delta > 0$; 当 $\delta \in [\frac{\pi}{2} \sim \pi]$ 时, $\cos \delta < 0$)。

下面研究 z_1 为正值、也即弹丸头部向前飞行的情况,以下变量值显然是方程组(4.74)的解

$$\begin{aligned}
 w &= z_2 = z_3 = u_2 \\
 &= u_3 = \alpha = 0; \\
 V &= V_*;
 \end{aligned}$$

$$\theta = \theta_* = -\frac{\pi}{2} \quad (4.75)$$

式中 V_* 是 $t \rightarrow \infty$ 时弹丸质心速度的极限, 它可由重力与阻力相等这一条件求得, 也即可由方程组 (4.74) 的第一个方程在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的条件下求得。

我们指出, 这一组解 (4.75) 描述了弹丸的理想飞行, 因为由 $z_2 = z_3 = 0$ 得 $z_1 = \cos \delta = 1$, 因而章动角 $\delta = 0$ 。

因而解 (4.75) 可以取作未扰动运动, 而所需的是要进一步研究它的李雅普诺夫稳定性。

为了获得扰动运动方程, 作如下的变量代换:

$$V = V_* + v;$$

$$\theta = \theta_* + \vartheta = -\frac{\pi}{2} + \vartheta \quad (4.76)$$

并将方程 (4.73) 的右边分解成 $v, \vartheta, w, z_2, z_3, u_2, u_3, \alpha$ 的级数, 新变量 v 和 ϑ 表征相对于未扰动运动的速度偏差和速度矢量倾角的偏差。

考虑到量 f_3, \dot{f}_3 和 \dot{f}_2 (其表达式在 § 3.4.1 中) 在满足等式 (4.75) 时变为零, 可将方程组 (4.73) 归结为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -f_{11}v - f_{12}w - f_{13}z_2 - f_{14}z_3 + X_1^*; \\ \dot{\vartheta} &= -gV^{-1}\vartheta + f_{20}z_2 + X_2^*; \\ \dot{w} &= -Vw + x_3^*; \\ \dot{z}_2 &= u_2; \\ \dot{z}_3 &= u_3; \\ \dot{u}_2 &= -gV^{-1}(gV^{-1} - f_{70})v + (f_{40} - f_{20}f_{70} \\ &\quad + gV^{-1}f_{20})z_2 - (f_{20} + f_{70})u_2 + X_4^*; \\ \dot{u}_3 &= (f_{40} - f_{20}f_{70})z_3 - (f_{20} + f_{70})u_3 + X_5^*; \\ \dot{\alpha} &= -f_{60}\alpha + X_6^* \end{aligned} \quad (4.77)$$

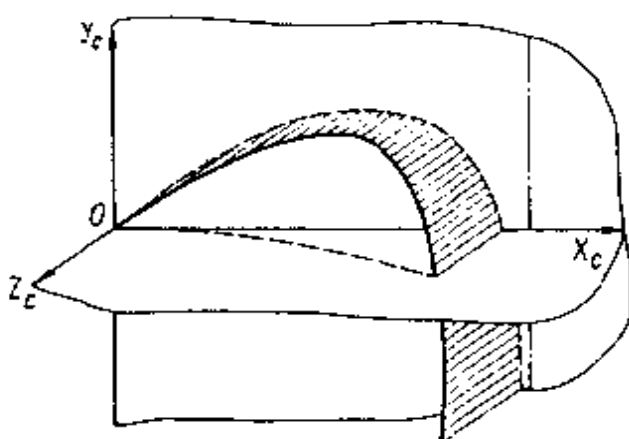


图 4.6 炮弹的李雅普诺夫稳定性

方程组(4.77)即是扰动运动方程组,在此方程中 X_i^* ($i=1, \dots, 6$)是对变量 $v, \vartheta, w, z_2, z_3, u_2, u_3, \alpha$ 一阶以上级数项之和。此外,系数 $f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}$ 表示相应的导数值 $\frac{\partial f_1}{\partial V}, \frac{\partial f_1}{\partial w}, \frac{\partial f_1}{\partial z_2}, \frac{\partial f_1}{\partial z_3}$ 。而 f_{i0} ($i=2, \dots, 7$), 是在 $w=z_2=z_3=0$ 和 $V=V_*$ 时的函数 f_i 的值。

舍去方程(4.77)右边的非线性项 X_i^* 就得到一级近似方程。在这种情况下特征方程(4.27)将有如下形式:

$$\begin{vmatrix} [f_{11} - \lambda] & 0 & -f_{12} & -f_{13} \\ 0 & [-\frac{g}{V} - \lambda] & 0 & f_{20} \\ 0 & 0 & [-V - \lambda] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-\frac{g}{V} [\frac{g}{V} - f_{70}]] & 0 & [f_{40} - f_{20}f_{70} + \frac{g}{V}f_{20}] \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & [f_{20} - f_{70} - \lambda] & 0 & 0 \\ [f_{40} - f_{20}f_{70}] & 0 & [-f_{20} - f_{70} - \lambda] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [-f_{60} - \lambda] \end{vmatrix} = 0 \quad (4.78)$$

展开行列式则得到如下方程:

$$\begin{aligned} & (f_{11} + \lambda)(V + \lambda)(f_{60} + \lambda)[\lambda^2 + (f_{20} + f_{70})\lambda - f_{40} + f_{20}f_{70}] \\ & \cdot [\lambda^3 + (\frac{g}{V} + f_{20} + f_{70})\lambda^2 - (f_{40} - f_{20}f_{70} - \frac{g}{V}f_{70})\lambda - \frac{g}{V}f_{40}] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

此特征方程的五个根为

$$\lambda_1 = f_{11} \quad \lambda_2 = -V \quad \lambda_3 = -f_{60};$$

$$\lambda_4 = -\frac{1}{2}(f_{20} + f_{70} + \sqrt{(f_{20} - f_{70})^2 + 4f_{40}});$$

$$\lambda_5 = -\frac{1}{2}(f_{20} + f_{70} - \sqrt{(f_{20} - f_{70})^2 + 4f_{40}}) \quad (4.80)$$

前四个根是负的,而第五个根是正的($\lambda_5 > 0$),这是因为对于炮弹通常有 $f_{40} > f_{20}f_{70}$,故

$$\begin{aligned} & \sqrt{(f_{20} - f_{70})^2 + 4f_{40}} \\ &= \sqrt{(f_{20} + f_{70})^2 + 4(f_{40} - f_{20}f_{70})} > f_{20} + f_{70} \end{aligned}$$

为了确定方程(4.79)其余的根,必须求得下面多项式的根:

$$\begin{aligned} F(\lambda) = & \lambda^3 \left[\frac{g}{V} + f_{20} + f_{70} \right] \lambda^2 \\ & - \left[f_{40} - f_{20}f_{70} - \frac{g}{V}f_{70} \right] \lambda - \frac{g}{V}f_{40} \end{aligned}$$

考虑到 $f_{40} > 0$,我们来确定多项式 $F(\lambda)$ 在 $\lambda \rightarrow \pm \infty$ 时的值的符号。设 M 是一足够大的正数,于是

$$F(-M) < 0, \quad F(M) > 0, \quad F(0) = -\frac{g}{V}f_{40} < 0$$

$F(\lambda)$ 的可能变化情况如图 4.7 所示。因此,多项式 $F(\lambda)$ 有一个根是正的($\lambda_6 > 0$),其余两个根要么是负的($\lambda_8 < \lambda_7 < 0$),要么是带有负实部的共轭复数。最后得,特征方程有 6 个具有负实部的根和 2 个具有正实部的根。

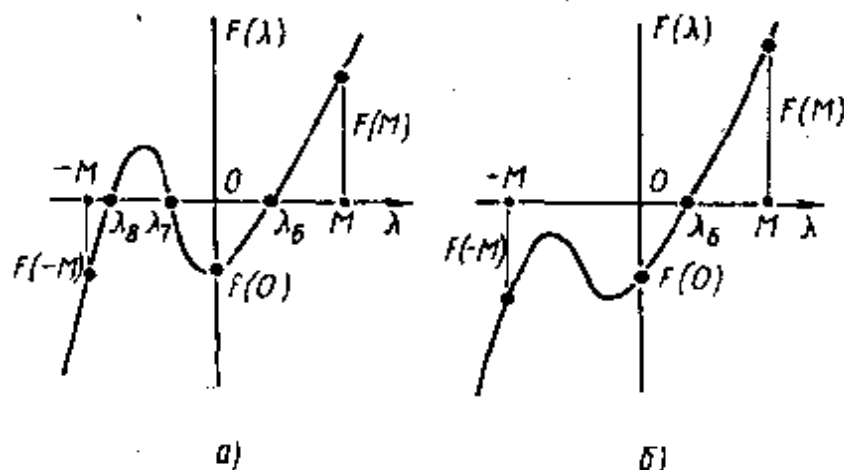


图 4.7 $F(\lambda)$ 可能的图形

a) 多项式有三个实根 b) 多项式有一个实根和两个复根

因此,根据一级近似不稳定性的李雅普诺夫定理(见 § 4.2.2),描述高速旋转炮弹理想飞行的未扰动运动是不稳定的。

我们从物理观点来解释一下由 B. C. 普加乔夫得到的旋转弹在无限长时间内运动不稳定的结论。由于弹丸绕纵轴的转速在 $t \rightarrow \infty$ 时不断减小,故从某个瞬时起,陀螺力矩就不足以抵抗翻转力矩,章动角即开始增大。从实用观点讲,只要使弹轴与弹道切线的偏差在从起飞瞬时 t_0 到最后瞬时 T 的全部飞行时间内尽可能地小即可,故我们提出有限时间内的稳定性问题。

在李雅普诺夫稳定性定义中,假定时间的变化范围是无限的半开区间 $t \in [t_0, +\infty]$,并且给定了确定可能初始扰动域(4.13)的数 Δ 以及(4.14)式中的数 A ,但实际上只要求在 $t \in [t_0, T]$ 内保证满足由(4.13)式和(4.14)式给出的条件即可。

H. Г. 契塔耶夫给出了 (Δ, A, t_0, T) 问题的提法,也即在给定的 Δ, A, t_0, T 值下的李雅普诺夫稳定性问题的提法。在他所研究过的方法里,在有限时间内、有限扰动力作用下的运动稳定性问题都可归结为李雅普诺夫稳定性问题。

按照对流动相坐标给定的限制 A 确定允许的起始扰动 (Δ) 这类问题的例子就是第 9 章中提出的、由 H. Г. 契塔耶夫解决了的弹丸稳定性充分条件问题。

关于运动的工程稳定性和工程不稳定性定义的提法可以参考 [2,96] 等文献中的研究。

第五章 外弹道方程的数值积分 和电子计算机的应用

炮弹及火箭有控无控飞行的复杂性,快速、高精度计算运动特征的要求以及计算量之大,造成必须利用电子计算机和连续作用的电子模拟机进行弹道领域中的大量研究。

对严格(无本质性假设)建立起来的外弹道方程进行积分的特殊性就在于方程本身十分复杂。此外,用于确定空气阻力、推力和其它某些量的函数,没有简单的解析表达式,而一般只能以实验数据建立的复杂图形或表格来给出,因此飞行运动方程通常要用数值方法求解。在弹道学中常用的数值积分法有欧拉法,龙格-库塔法和阿当姆斯-施特默方法。

在俄罗斯,第一个对外弹道方程进行数值积分的人是 A. H. 克雷洛夫。

在现代弹道实践中,对于在电子计算机上编制求解问题的程序或进行个别计算,通常采用的是使那些离散计算能力不高的机器都能实现的方法,在这种情况下阿当姆斯-克雷洛夫的有限差分法给出了很好的结果。为了掌握外弹道方程的数值积分法,我们将介绍此法的理论基础及实际使用的例子。

§ 5.1 步进积分法及其实际应用

5.1.1 差分法数值积分

数值积分法可以从给定的表格函数算出积分值,为此要利用所谓的插值函数,在积分号下用它来代替没有解析形式的实际函数。当这种替换是在很小一段曲线上进行时,积分的精度可以足够高。

设插值函数为 $y = f(x)$, 则在 x_n 到 x_{n+1} 范围内定积分的增量为

$$\Delta I_n = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y dx \quad (5.1)$$

最简单的插值函数是线性插值函数

$$\frac{y - y_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{x - x_n}{x_{n+1} - x_n} \quad (5.2)$$

式中 $x_{n+1} - x_n = h_x$ 为自变量变化的间隔或自变量步长, $y_{n+1} - y_n = \Delta y_n$ 是与给定的第 n 点和紧接着的 $n + 1$ 点自变量相应的函数值之差。

由公式(5.2), 可将与自变量 x 相应的函数值写成如下形式:

$$y = y_n + \frac{x - x_n}{h_x} \Delta y_n \quad (5.3)$$

在线性插值情况下, 函数 $f(x)$ 曲线下的面积被划分成一系列的梯形。但按梯形法积分会产生本质上的误差, 故在弹道计算中一般不用此法。

微分方程最简单的积分方法是欧拉法。设要求出一阶微分方程

$$y'_x = f(x, y)$$

在初始条件 $x = x_0, y = y_0$ 下的解, 在积分时自变量改变的步长 h_x 应这样选择, 应使得在此步长内函数 $f(x, y)$ 近似保持为常数。取小的有限增量之比代替导数, 得

$$y'_x = \frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

对于第一个积分段得 $\Delta x = x - x_0 = h_x, \Delta y_0 = y_1 - y_0$, 而此时

$$f(x_0, y_0) = \frac{y_1 - y_0}{h_x}$$

经过变换, 得

$$y_1 = y_0 + h_x f(x_0, y_0)$$

对后面各积分区段重复这种运算, 即得到以下各点的函数值:

$$y_2 = y_1 + h_x f(x_1, y_1);$$

$$y_3 = y_2 + h_x f(x_2, y_2);$$

.....

微分方程欧拉数值积分法的一般公式为

$$y_{n+1} = y_n + h_x f(x_n, y_n) \quad (5.4)$$

在求解外弹道问题时,欧拉方法会带来很大误差。此法的精度随着步长的减小而提高,但这时总的计算量增大,并且还增大了积分过程中的积累误差。因此,在通行的外弹道方程数值积分法中采用了专门的插值函数,这种插值函数与梯形法和欧拉法相比可以增大积分步长但又保证了必要的精度。

插值函数由整多项式组成,多项式的阶数比所研究积分段上给定的函数值的点数少 1。与多项式相应的曲线应通过所有可利用的点,这些点称为插值结点。满足了这些条件,插值函数就具有唯一性。利用插值函数就可以近似计算自变量不在插值结点上的函数值。此时,当自变量 x 位于给定区间 $x_n - x_{n+1}$ 之内时称为内插,而当自变量之值处于这个区间之外时称为外插。

最通用的插值函数是拉格朗日插值函数,利用这种插值函数时对插值函数结点的选取不附加任何特殊的限制,拉格朗日插值函数具有如下形式:

$$\begin{aligned} y = f(x) \approx & \frac{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdots (x_0 - x_m)} y_0 \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2) \cdots (x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_m)} y_1 + \cdots + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{m-1})}{(x_m - x_0)(x_m - x_1) \cdots (x_m - x_{m-1})} y_m \quad (5.5) \end{aligned}$$

已知的其它插值公式有,牛顿第一和第二插值公式、高斯公式、贝塞尔公式、斯特林公式等。牛顿插值公式要利用有限差分表,故它只用于自变量步长为常数(即 $h_x = \text{const}$) 的情况。

如果某个函数 $y = f(x)$ 用表格给出并且自变量变化的步长 h_x 不变,则称量 $\Delta y = \Delta f(x) = f(x + h_x) - f(x)$ 为函数的一阶有限差分或一阶差分,而函数的二阶差分则为 $\Delta^2 y = \Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)]$,等等。为了得到差分表,应从每一个函数值减去它的上一个值,并将所得到的结果写在被减数那一行的右边,然后给它加上被减数的编号(见表 5.1),以类似方式组成的表称为函数的水平有限差分表。

表 5.1 函数 $y = f(x)$ 的水平有限差分表

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_{n-3}	y_{n-3}	Δy_{n-3}	$\Delta^2 y_{n-3}$	$\Delta^3 y_{n-3}$
x_{n-2}	y_{n-2}	Δy_{n-2}	$\Delta^2 y_{n-2}$	$\Delta^3 y_{n-2}$
x_{n-1}	y_{n-1}	Δy_{n-1}	$\Delta^2 y_{n-1}^*$	$\Delta^3 y_{n-1}^*$
x	y_n^*	Δy_n^*	$\Delta^2 y_n$	$\Delta^3 y_n$
x_{n+1}	y_{n+1}	Δy_{n+1}	$\Delta^2 y_{n+1}$	
x_{n+2}	y_{n+2}	Δy_{n+2}		
x_{n+3}	y_{n+3}			

引入变量

$$\xi = \frac{x - x_0}{h_x}$$

式中 x_0 是自变量的初始值, 我们写出不高于 n 阶的牛顿第一插值多项式的公式, 得

$$P_n(x) = y_0 + \xi \Delta y_0 + \frac{\xi(\xi-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{\xi(\xi-1)(\xi-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \frac{\xi(\xi-1)\dots(\xi-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 \quad (5.6)$$

对于在已知函数值的终点处的插值(也即外插)采用牛顿第二插值公式

$$P_n(x) = y_n + \xi \Delta y_{n-1} + \frac{\xi(\xi+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{\xi(\xi+1)(\xi+2)}{3!} \Delta^3 y_{n-3} + \dots + \frac{\xi(\xi+1)\dots(\xi+n-1)}{n!} \Delta^n y_0 \quad (5.7)$$

式中 y_n 是最后的一个已知函数值。

在已有函数有限差分表的情况下, 插值函数组成的原则是:

1) 写出顺序元素行。所谓顺序元素就是差分表中直接与前一个数有关的数(所谓行就是从每一列中只选一个元素组成的顺序元素的总和)。

2) 除第一个元素外,在行中每个元素前面有一个分数形式的系数,其分母为一个阶乘,阶即为该元素的阶数,而分子含有与差分阶数相同个数、形如 $\xi - i$ 的因子。

3) 分子的第一个因子应具有 $\xi - i_0$ 的形式,而 i_0 是前一个有限差分元素的下标(例如,如果前一个元素具有编号 -3 ,其下标即为 -3 ,则有 $i_0 = -3$)。

所有后面的因子都依次减少 1。

利用这个规则,作为例子我们得到与自变量 x_n 值相应的折行的插值公式

$$y = y_n + \frac{\xi}{1!} \Delta y_n + \frac{\xi(\xi-1)}{2!} \Delta^2 y_{n-1} + \frac{(\xi+1)\xi(\xi-1)}{3!} \Delta^3 y_{n-1} \quad (5.8)$$

公式(5.8)与由顺序元素组成的一个折行相应,在此公式中用到的有限差分在表(5.1)中用 * 号表示。在自变量为 ξ 的情况下由(5.1)式我们得到在一个积分步长范围内定积分的增量如下:

$$\Delta I_n = h_x \int_0^1 y d\xi \quad (5.9)$$

其中 $d\xi = dx/h_x$

为了求 ΔI_n ,可利用由顺序元素行组成的一种插值公式。例如将公式(5.8)的 y 值代入(5.9)后就可得到如下计算定积分增量的公式

$$\Delta I_n = h_x \left[y_n + \frac{1}{2} \Delta y_n - \frac{1}{12} \Delta^2 y_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 y_{n-1} \right] \quad (5.10)$$

类似地,对于顺序元素水平行,得

$$\Delta I_n = h_x \left[y_n + \frac{1}{2} \Delta y_n - \frac{1}{12} \Delta^2 y_n + \frac{1}{24} \Delta^3 y_n \right] \quad (5.11)$$

在利用外推斜行时,公式就变成如下形式:

$$\Delta I_n = h_x \left[y_n + \frac{1}{2} \Delta y_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 y_{n-3} \right] \quad (5.12)$$

最后的这个公式中可以以前面的函数值为基础向前积分(外插)。

将由相应公式确定的函数差分 Δy_n 加到已知值 y_n 上就得到下一点的函数值

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n \quad (5.13)$$

如果起始时已知的导数值不少于 4 个,则可以用含有三阶差分的公式外推使行增加。第一个值由被积微分方程的初条件确定,而所缺的起始导数值通常用逐次近似法求得,其要点叙述如下:

设给定了一阶微分方程 $y'_x = f(x, y)$, 为了减少下标我们将它写成 $y' = f(x, y)$ 的形式。设初值 x_0 和 y_0 已知,因而 y'_0 的值也已知,差分表中所缺元素的确定要从一次近似开始:

$$\Delta y_0 = h y'_0 \quad y_1 = y_0 + \Delta y_0$$

由已知的 y_1 值,得到 $y'_1 = f(x_1, y_1)$,并算出 $\Delta y'_0 = y'_1 - y'_0$ 。根据一次近似已知值 $y'_0, y'_1, \Delta y'_0$ 又可作二次近似,得

$$\Delta y_0 = h_x \left[y'_0 + \frac{1}{2} \Delta y'_0 \right] \quad y_1 = y_0 + \Delta y_0$$

和
$$\Delta y_1 = h_x \left[y'_1 + \frac{1}{2} \Delta y'_0 \right] \quad y_2 = y_1 + \Delta y_1$$

将已知的 x_1, y_1 和 x_2, y_2 代入原始方程,得

$$y'_1, y'_2 \text{ 和 } \Delta y'_0 = y'_1 - y'_0 \quad \Delta y'_1 = y'_2 - y'_1 \quad \Delta^2 y'_0 = \Delta y'_1 - \Delta y'_0$$

第三次近似是检查计算,按照下面算出的值

$$\Delta y_0 = h_x \left[y'_0 + \frac{1}{2} \Delta y'_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_0 \right]$$

$$\Delta y_1 = h_x \left[y'_1 + \frac{1}{2} \Delta y'_1 - \frac{1}{12} \Delta^2 y'_1 \right]$$

重新确定 y_1 和 y_2 并算出 $y'_1, y'_2, \Delta y'_0, \Delta y'_1, \Delta^2 y'_0$ 。

作为例子,下面介绍用有限差分法计算无控火箭运动特性的结果。

设要确定具有如下结构参数的飞行器的运动特征:

$$d = 0.5\text{m} \quad m_0 = 1174\text{kg} \quad |\dot{m}| = 86.59\text{kg/s}$$

$$c_1 = P_0/m_0 = 148\text{m/s}^2 \quad c_2 = S_a P_{ON}/m_0 = 16.15\text{m/s}^2$$

$$t_k = 2.8\text{s} \text{ (在初速 } v_0 = 50\text{m/s 的条件下)}, v_0 = 50\text{m/s}$$

$$\theta_0 = 40.6^\circ, \quad x_0 = y_0 = 0.$$

在主动段上迎面阻力系数如下:

M	0.01	0.55	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00	1.02
c_{x_0}	0.30	0.30	0.33	0.42	0.54	0.68	0.82	0.85

M	1.06	1.08	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60
c_{x_0}	0.87	0.86	0.86	0.83	0.80	0.77	0.74	0.71

M	1.70	1.80	1.90	2.30	2.90			
c_{x_0}	0.68	0.65	0.62	0.50	0.31			

被动段阻力以标准函数 $G(V_r)$ 给出,其数值如下:

V_r	m/s	200	220	240	260	280
$G(V_r)$		0.1466	0.1611	0.1753	0.1900	0.2098

V_r	m/s	300	320	340	360	380
$G(V_r)$		0.2430	0.3474	0.5099	0.6111	0.6718

V_r	m/s	400	420	440	460	480
$G(V_r)$		0.7141	0.7480	0.7770	0.8028	0.8257

V_r	m/s	500	520	540	560	580	600
$G(V_r)$		0.8472	0.8671	0.8856	0.9033	0.9203	0.9363

为了进行计算,对于主动段还需要有函数 $\pi(y)$, $H(y)$, $a(y)$ 的值,对于被动段还需要有函数 $H_r(y)$ 和 $\sqrt{\tau_{ON}/\tau}$ 的值,它们都以专门的表格给出。为便于计算,下面列出含有所需数值的一段函数表。

y	m	0	100	200	300	400
$\pi(y)$		1.000	0.9882	0.9765	0.9649	0.9535
$H(y)$		1.000	0.9904	0.9849	0.9715	0.9622
$a(y)$	m/s	340.7	339.9	339.5	339.1	338.8

y	m	500	600	700	800	900	1000
$\pi(y)$		0.9421	0.9309	0.9198	0.9087	0.8978	0.8879
$H(y)$		0.9529	0.9437	0.9345	0.9254	0.9164	0.9075
$a(y)$	m/s	338.4	338.0	337.6	337.2	336.8	336.4

y	m	0	200	400	600	800	1000
$H_r(y)$		1.000	0.97	0.9583	0.9371	0.9171	0.8976
$\sqrt{\tau_{ON}/\tau}$		1.000	1.002	1.004	1.007	1.009	1.011

y	m	1200	1400	1600	1800	2000	2200
$H_r(y)$		0.8775	0.8587	0.8400	0.8210	0.8032	0.7839
$\sqrt{\tau_{ON}/\tau}$		1.014	1.016	1.018	1.021	1.023	1.026

y	m	2400	2600	2800	3000
$H_r(y)$		0.7677	0.7500	0.7334	0.7164
$\sqrt{\tau_{ON}/\tau}$		1.028	1.031	1.033	1.733

对于弹道主动段,需积分的方程具有如下形式:

$$\dot{u} = \frac{1}{\mu}(D - E)u \quad \dot{p} = -\frac{g}{u} \quad \dot{y} = pu \quad \dot{x} = u \quad (5.14)$$

式中, $\mu = m/m_0$, $D = p/(m_0V)$, $E = X_a/(m_0V)$, $p = \operatorname{tg}\theta$
 $u = V\cos\theta$

所列方程组的初始条件可用关系式 $u_0 = V_0\cos\theta_0$; $p_0 = \operatorname{tg}\theta_0$ 算出。
 为便于进行被动段的计算,可积分以自变量 x 形式写出的微分方程组

$$u'_x = -cH_r(y)G(V_r) \quad p'_x = -\frac{y}{u^2} \quad y'_x = p \quad t'_x = \frac{1}{u_x} \quad (5.15)$$

式中, $V_r = u \sqrt{\tau_{ON}/\tau} \sqrt{1 + p^2}$ 。

下面我们指出求解方程组(5.15)的一些特点。

积分的初始值为计算主动段得到的主动段终点各弹道诸元值。
 如果给定的时间 t_k 不是自变量的节点值,则对应的弹道诸元值可用

插值公式求得。

对于“助推”点的确定可按与主动段相同的方式逼近。飞行器在运动过程中弹道基础诸元变化的特点可以用关系式 $y = f_1(x)$, $V = f_2(x)$, $p = f_3(x)$, $u_x = f_4(x)$ 的图形表示在图 5.1 上, 这些图线是根据本例的计算结果绘出的。

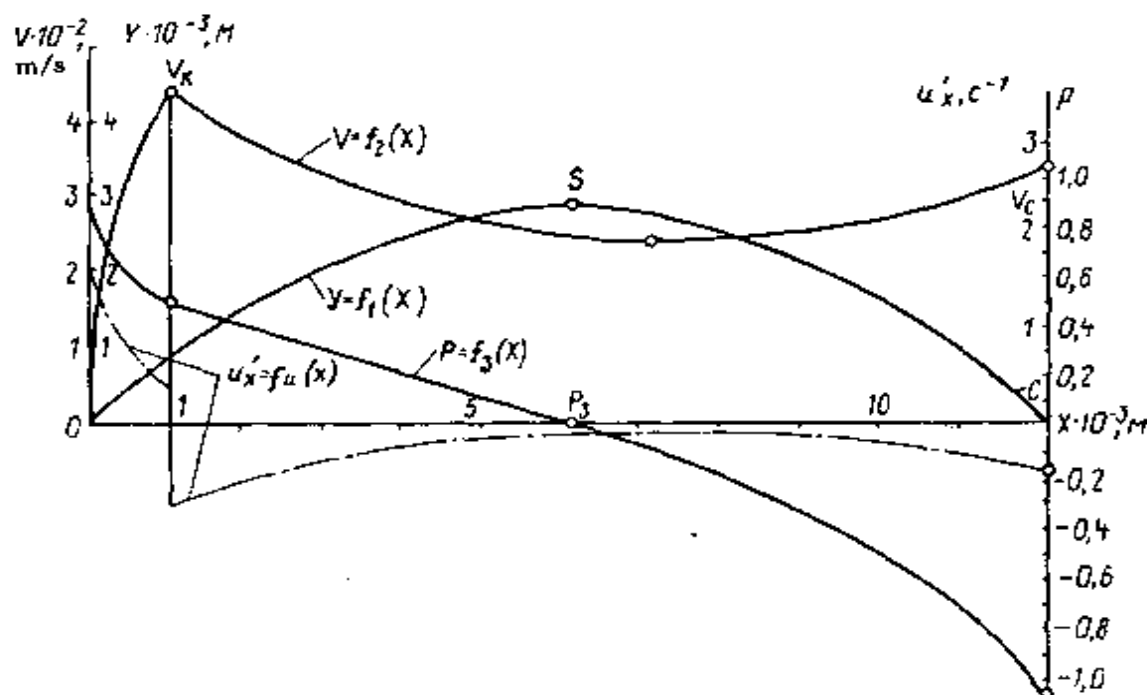


图 5.1 飞行器运动过程中主要运动参数和弹道诸元的变化特性

5.1.2 计算精度和积分步长的选取

飞行器运动特性计算结果的误差取决于如下一些典型的误差。

1) 问题提出的误差, 或由数学模型对实际运动过程近似程度所决定的误差。这一类误差称为问题误差, 它与建立的假设以及所选择的方程组有关。

2) 解法误差, 例如对空气阻力引入近似函数, 以近似解析解代替数值解造成的误差。

3) 在引入级数解或其它数列解并只利用它们的头几项时产生的误差, 这种误差称为剩余误差, 它与所略去的级数项之和有关。

4) 解的精度在很大程度上取决于数据源的精度,例如确定空气动力特征的精度,这种误差称为初始误差。

5) 取整误差以及大量的近似数演算误差通常归为计算的技术误差。

弹道学研究的各个领域以及求解弹道问题的各种方法有自己特殊的误差。在应用有限差分法时计算误差主要取决于近似计算误差、数学运算误差和取整误差。数学运算误差与求解方法有关,实际上是不可避免的。在弹道计算中数学运算误差和取整误差对最后结果的精度影响不大。

近似计算的误差是由插值函数替代实际函数或其导数引起的,近似计算误差的大小取决于在插值函数中所保留的差分的阶次以及自变量的步长。在增加行的长度时,近似计算误差、数学运算误差和取整误差就被累积起来。积分步长的选择是整个计算中最重要的一步,因为步长的大小不仅决定了计算精度,而且决定了计算工作量。

在步长较小的情况下可不用高阶(二阶和二阶以上)导数的差分,但在这种情况下计算点的个数会增加;在步长较大时计算量减少,但精度降低。

积分步长的选取与许多量有关,并由最终结果的绝对误差和相对误差要求确定。在计算过程中步长是否需要减小,这通常取决于某一个量的剧烈变化,例如飞行器在接近于声速的速度范围内运动时 $c_x(M)$ 大小的变化。在通过了声速域以后, $c_x(M)$ 又继续缓慢变化,则积分步长又可重新增大。通常数字计算机的标准积分程序都具有按给定的误差大小自动选择步长的功能。

对于描述无控火箭在不长距离上质心运动的方程组(5.14)和(5.15),其时间步长可取 $h_i = 0.1, \dots, 0.5\text{s}$ 等。对于高射火箭和炮弹,在与机动目标交会的时间范围内可取 $h_i = 0.01, \dots, 0.001\text{s}$ 。在积分描述弹丸质心运动及相对质心作短周期振动的联立方程组时,小型弹的积分步长应取 $h_i = 0.001, \dots, 0.0005\text{s}$ 。

计算的精度与有效数字的大小有关,由以下不等式确定:

$$\Delta \leq 10^k \quad (5.16)$$

式中, $k = m - n + 1$; Δ 是数的绝对误差; m 是数的第一个十进位位数, n 是有效数字的个数。

例: 设近似数为 $L = 12480$ 公里, 需以相对精度 $\delta_L = 1\%, 0.1\%, 0.01\%$ 和 0.001% 进行计算, 要确定在每种情况里有效数字应取多少位。

在每种情况里绝对误差按公式 $\Delta_L = L\delta_L$ 计算如下:

$$\begin{aligned}\Delta L_1 &= 125 < 10^3 & \Delta L_2 &= 12.5 < 10^2 \\ \Delta L_3 &= 1.25 < 10^1 & \Delta L_4 &= 0.125 < 10^0\end{aligned}$$

按科学记数法, 用以计算的数有如下形式:

$$12480 = 1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 8 \times 10^1 + 0 \times 10^0$$

因而第一个十进位数 $m = 4$, 按公式 $n = m - k + 1$, 在每个计算情况里有效数字的个数分别为 $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = 4, n_4 = 5$, 考虑到一个备份数字, 进行中间计算时应相应地具有 3, 4, 5, 6 个有效数字。故 L 在各种情况下的正确写法具有如下形式:

$$\begin{aligned}L &= 1.25 \times 10^4 \text{ km} & L &= 1.248 \times 10^4 \text{ km} \\ L &= 1.2480 \times 10^4 \text{ km} & L &= 1.24800 \times 10^4 \text{ km}\end{aligned}$$

5.1.3 利用电子计算机求解外弹道基本问题

利用已调试好的程序在电子计算机上进行计算, 可以获得进行飞行器设计和研制时所需的大量数据资料。

现有的飞行器运动方程数值积分法, 按其结构可分为单步法、多步法和预报-校正法。典型的单步法有各阶龙格-库塔法。欧拉法属于一阶方法, 而标准的龙格-库塔法是 4 阶方法。龙格-库塔法有下述优缺点^[37]:

- 具有同一型式的计算流程图;
- 不需要进行“起始”计算;
- 在计算过程中很容易改变步长;
- 能很好地适应方程右端为间断函数的情况;
- 在一步之内需多次计算右端函数;
- 不能进行计算正确性的可靠检查。

在统一的计算机数学软件程序库中,利用龙格-库塔法编制的积分微分方程的标准子程序是 RK_1, RK_2, RKS , 其中最后一个程序含有对取整积累进行修改的变形吉尔法。

多步法有上面研究过的阿当姆斯-克雷洛夫方法。

预报-校正法有修改的欧拉法、米尔恩法和哈明法等,这些方法在每一步上可对计算的正确性进行可靠的检查。

比起单步法来说,多步法在一步之内返回方程右部的次数变少(哈明方法只是两次,而标准龙格-库塔法是4次),但在机器计算过程中占用的存储单元比标准龙格-库塔法多一些;在积分步长改变时又需重新进行起点计算。

对于运动要素计算,积分步长的选择可采用数字试探法,或采用下面推荐的步长:

在考虑主动力作用下飞行器平面运动方程的积分时,时间步长可取 $h_t = 0.1, \dots, 0.5$ (当 $V_0 < 50\text{m/s}$ 时) 或取 $h_t = 0.5, \dots, 1.0$ 秒 (当 $V_0 > 50\text{m/s}$ 时)。

在积分飞行器被动段短距离平面运动方程时,对坐标 x 的积分步长在 $h_x = 50, \dots, 500\text{m}$ 范围内。

在积分考虑飞行器振动的空间运动方程时,对时间的步长一定要选择得足够小,步长可从 $0.01, \dots, 0.05$ 到 $0.001, \dots, 0.005$ 之间改变,这要取决于运动方程的特点。

在积分一大串微分方程而又必须选择小步长时,为了保证在给定的精度下机器消耗的时间最少,正确选择数值积分方法就成为特别突出的问题。

5.1.4 飞行器运动方程计算机积分程序的编制

在利用一种算法语言编制计算机计算程序之前,有个任务准备阶段,在此阶段内须解决与计算方法数值运算特点以及以编程方式计算的可能性有关的问题。下面列出一些应准备的工作:

- 1) 被积方程组应是已解出导数的,也即应写成柯西标准形。
- 2) 必须选择在计算机上给出空气动力函数值和大气参数值的

方法:借助于插值的表格法、近似多项式法或其它方法。这时应注意到在利用插值函数的情况下,应对所得到的插值关系式的正确性进行检查计算。

3) 必须选择一种数值积分法,以保证获得指定精度要求的计算结果并且具有较高的计算速度。

用于手工计算的有限差分法不大适合于计算机应用,因这种方法使用了两个计算流程(一个流程用于加长差分表的行),不便于在计算过程中改变步长。欧拉法和改进的欧拉法所需的计算时间较少,但通常它的精度不高。在计算飞行器运动诸元时比较喜欢使用的是龙格—库塔法及其变形,还有预报—校正法。它们已编成了标准子程序,并且在大多数电子计算机中都有这种软件。

4) 利用电子计算机来积分方程组,可使弹道特征点(K, S, C)上的诸元值计算自动化。为此在编制程序时可采用反向积分,当计算到特征点邻域时减少步长再反向积分,也即在特征点区域内减少步长并改变其符号进行计算。选用此法时应保证获得给定精度的结果。

5) 为了结束计算,应根据飞行器的运动特征编排退出积分程序的条件。

作为例子,我们列写出火箭主动段运动微分方程组

$$\frac{du}{dt} = \{c_1 + c_2[1 - \pi(y)]\}m_0u/(mV) - c_3c_{x_a}(M)VH(y)um_0/m$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{g}{u}$$

$$\frac{dx}{dt} = u$$

式中

$$c_1 = P_0/m_0 \quad c_2 = S_a P_{ON}/m_0 \quad c_3 = S P_{ON}/(2m_0) \quad (5.17)$$

再介绍一个利用逼近多项式来表示函数 $c_{x_a}(M)$ 的例子,设函数 $c_{x_a}(M)$ 以如下形式给出:

M	0.1	0.8	1.0	1.2	1.3	1.4	1.6	1.8	2.0
c_{x_a}	0.158	0.158	0.325	0.385	0.381	0.371	0.351	0.332	0.316

为了进行函数逼近要画出它的图形,然后按图形选择特征段(见图 5.2)。对于本例,显示出这样的特征段有 5 个, I、III、V 段可以用 $c_{x_0} = aM + b$ 直线关系描述,而 II、IV 段可用二次函数 $c_{x_0} = aM^2 + bM + c$ 来描述。经验公式中的系数可用试验结果处理的数学方法来计算,例如用被选点法、均方根法和最小二乘法来计算。

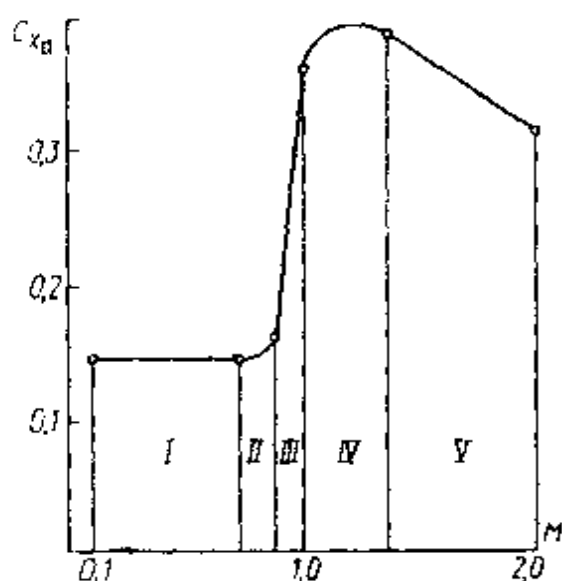


图 5.2 $c_{x_0}(M)$ 函数关系的例子

下面我们用选择点法来建立在 $M = 1.0, \dots, 1.4$ 区间给定的第 IV 段逼近公式。为此依公式中未知数的个数将三个点的坐标依次代入抛物线方程中。我们取两个边界点 $M = 1.0$ 和 $M = 1.4$ 以及一个中间点 $M = 1.2$, 得到如下一组代数方程:

$$a + b + c = 0.325 \quad 1.44a + 1.2b + c = 0.385;$$

$$1.96a + 1.4b + c = 0.371$$

解此方程组可求得未知数 a, b, c , 于是得第 IV 段逼近多项式的最终形式为:

$$c_{x_0} = -0.925M^2 + 2.355M - 1.085$$

对于其余各段也可求得类似的方程, 函数 $c_{x_0}(M)$ 的一般形式如下:

$$c_{x_0}(M) = \begin{cases} 0.158 & 0.1 \leq M \leq 0.8 \\ 0.137M^2 + 0.0865M + 0.000898 & 0.8 \leq M \leq 0.9 \\ 1.35M - 1.025 & 0.9 < M \leq 1.0 \\ -0.925M^2 + 2.355M - 1.085 & 1.0 < M \leq 1.4 \\ -0.0917M + 0.4993 & 1.4 < M \leq 2.0 \end{cases}$$

为了检验所得关系的正确性, 编出了从 $M = 0.1$ 到 2.0 , 间隔为 0.05 的函数 $c_{x_0}(M)$ 值的计算程序, 在图 5.3 上画出了相应的算法框图。

大气基本特征应符合
ГОСТ 4401 — 81, 由如下关
系式确定:

$$\alpha = 20.0468 \sqrt{288.15 - 0.0065H}$$

$$\pi(y) = \exp\left[5.2559 \ln \frac{T}{T^*}\right]$$

$$H(y) = \exp\left[4.2559 \ln \frac{T}{T^*}\right]$$

式中, $H = ry/(r + y)$ 是位
势高度; r 是地球半径; T/T^*
 $= 1 - 0.0000226H$; $T^* =$
288.15K 是海平面上的气
温。

应用逼近多项式和逼近
关系式的方法较之在机器存
储器中存入体积庞大的表格
和采用线性插值或二次函数
插值更受欢迎一些, 这样, 函
数值的计算就只须引入数量
不大的相应多项式系数表。
为了计算自变量在某一具体
范围内的函数值, 只须选取
相应的一组系数。这种有条
件转换的操作应包含在问题
求解的主程序中。

飞行器运动微分方程组
的积分, 要应用在给定的计
算机上能够实现的具体程序
语言和数学软件来实现。

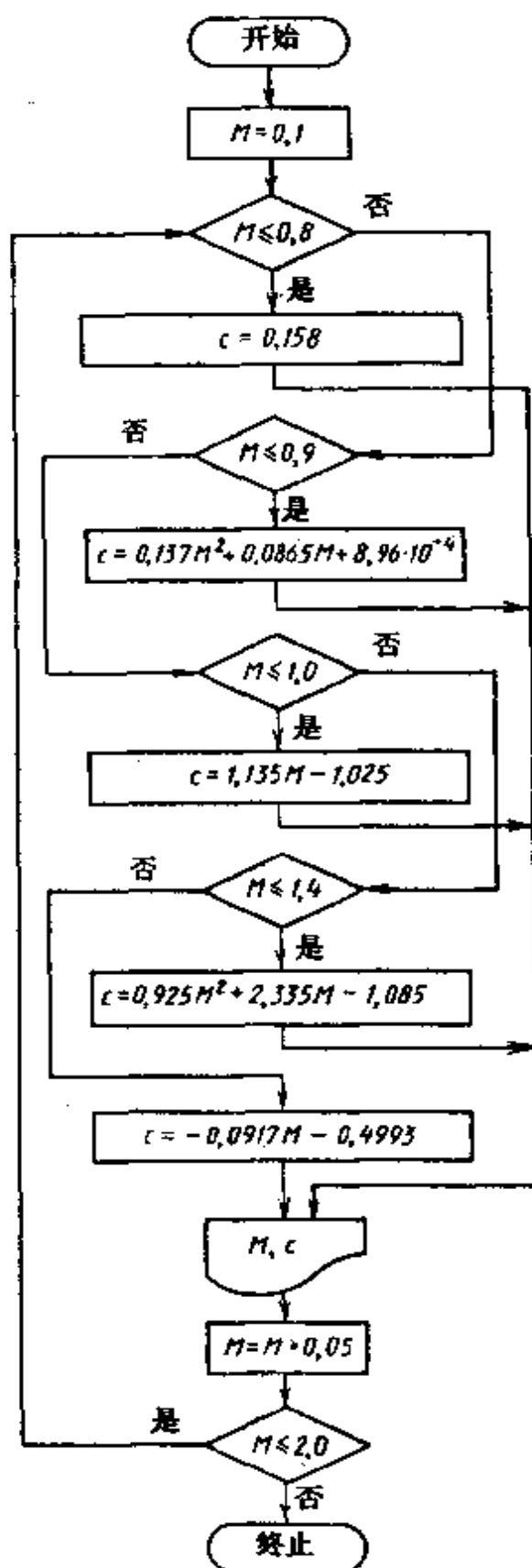


图 5.3 计算函数 $c_x(M)$ 的框图

§ 5.2 飞行器运动过程的模拟仿真

5.2.1 利用模拟计算机求解外弹道问题

电子模拟机能以电压形式直接生成研究者感兴趣的物理过程,这种模拟之所以获得成功,是因为可以使模拟机电路中所发生的过程也服从与所研究问题相同的微分方程。此外,各种电量的改变、其中也包括电压的改变易于储存和以图形表示。从按一定比例尺表示变量的曲线图上不仅可以定性地判明所研究对象的各种情况,而且可以得到所研究过程各种特性的数值。

模拟机是一种组合型模拟装置,它由若干独立的部件组成,每个部件只完成一种或几种基本数学运算。模拟机的主要部件有:

运算放大器 —— БОУ

常系数部件(比例分压器) —— МД

变系数部件 —— ВПК

函数部件 —— ФБ

乘积(乘法)部件 —— ВУ

下面简略地讲一下每个部件的作用。

运算放大器处于模拟机的中心地位,其主要部件是具有放大系数的三级直流放大器(У ПТ)。运算放大器完成代数求和、积分、微分和反转(改变符号)运算。

在解题时常出现需以某一常数 $k < 1$ 乘函数的情况,这种运算是利用二级或三级电压分压器(常系数部件)来实现的。

变系数组件保证获得如下关系:

$$U_{\text{вых}} = ka(t)U_{\text{вх}}$$

式中, $U_{\text{вых}}$ 是输出电压; $U_{\text{вх}}$ 是输入电压; k 是常数; $a(t)$ 是变系数。

由变系数部件实现的函数按自变量分成若干区间,经过梯形近似并转换成机器变量以后分别分配到所研究部件的面盘上去。

函数部件可以给出预知的函数关系 $y = f(x)$ 。采用二极管电路

的函数转换器得到了广泛的应用。先将须利用函数部件再现的曲线用相对于横坐标轴有一定倾斜角的若干直线段来近似代替,而所得到的这些函数直线段就可用二极管元件来再现。

最后,乘积部件用于完成乘法(除法)运算,两个函数的乘积在乘法部件的输出端表示成如下形式:

$$U = U_x U_y / 100$$

在解题时各部件用专门的接线系统按一定的顺序连接起来,连接的顺序以及部件的个数取决于所研究问题的特性和复杂程度。

所有的模拟机可分成两类:线性的和非线的。在线性模拟机中只有 БОУ、МД 和 БПК。非线性模拟机除了通常的线性模拟元件外还有可复现各种非线性函数和完成非线性运算的部件——ФБ 和 БУ。

由于模拟机的精度不高(对于大多数模拟机,计算误差为 3% ~ 10%)。故它只能揭示物理现象的定性图像,但在研究作用于飞行火箭上的各种扰动因素的影响时它们是不可替代的。电子模拟机可以按自然时间尺度工作,这样就可将它与那些工作过程无精确解析描述的实际调节对象(如自动驾驶仪、舵机等)结合在一起使用。

5.2.2 利用电子模拟机研究常质量尾翼弹纵轴的摆动

作为例子,下面研究在弹道被动段上弹丸在铅直平面内相对质心运动的模拟仿真,同时假设质心运动特征是已知的。

设质心作高度变化不大的直线运动,于是空气密度可看作是常数,而弹道相对水平面的倾角 θ 等于零。弹丸相对质心的运动可以写成如下形式:

$$I_z \ddot{\vartheta} = M_{\delta} + M_{\sigma} + M_{\lambda} \quad (5.18)$$

式中除了熟知的稳定力矩 M_{σ} 和阻尼力矩 M_{λ} 外还引进了扰动力矩 M_{δ} , 并假设这个力矩只在不长的时间间隔内起作用。在弹丸运动时类似的这种力矩可能是由于某些短时作用因素,例如阵风所造成。利用公式(1.116)和(1.112)我们写出

$$M_{\sigma} = -\frac{\rho V^2}{2} S l^2 |m_z^*| \alpha \quad M_{\lambda} = -\rho V S l^2 |m_{\lambda}| \dot{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\text{记 } a_1 &= \rho S l |m_n| / I_z && (\text{以 } 1/\text{m 为单位}) \\
a_2 &= \rho S l |m_z^a| / (2I_z) && (\text{以 } 1/\text{m}^2 \text{ 为单位}) \\
a_3 &= M_g / I_z && (\text{以 } 1/\text{s}^2 \text{ 为单位}) \\
f_1(t) &= V && f_2(t) = V^2
\end{aligned}$$

因为在现在的情况下 $\theta = 0$, 故有 $\vartheta = \alpha$, $\dot{\vartheta} = \dot{\alpha}$ 。考虑到各力矩和各个记号的表达式, 方程(5.18)就取 $\ddot{\vartheta} + a_1 f_1(t) \dot{\vartheta} + a_2 f_2(t) \vartheta = a_3$ 的形式。这是右端为常值的二阶变系数微分方程, 它描述的是振动过程, 在现在的情况下它不可能有解析解, 但可以在模拟机上进行积分。

为了求解方便, 我们用两个一阶微分方程组成的等价方程组来代替上述二阶方程, 注意到 $\dot{\vartheta} = \omega_z$, 这里 ω_z 是火箭纵轴相对于质心平面摆动的角速度, 则得

$$\dot{\omega}_z + a_1 f_1(t) \omega_z + a_2 f_2(t) \vartheta = a_3 \quad \dot{\vartheta} = \omega_z \quad (5.19)$$

此时, 描述电子模拟机运行过程的微分方程组应有如下形式:

$$\begin{aligned}
dU_{\omega_z}/d\tau + k_1 U_{f_1(t)} U_{\omega_z} + k_2 U_{f_2(t)} U_{\vartheta} &= k_3; \\
dU/d\tau &= k_4 U_{\omega_z}
\end{aligned} \quad (5.20)$$

式中, $U_{\omega_z}, U_{f_1(t)}, U_{f_2(t)}, U_{\vartheta}$ 是以相应尺度表示 $\omega_z, f_1(t), f_2(t), \vartheta$ 值的电压值, 而 k_1, k_2, k_3, k_4 是考虑到比例尺的系数。

如用实际值及其相应的比例系数来代表电压, 则有

$$\begin{aligned}
U_{\omega_z} &= \mu_{\omega_z} \cdot \omega_z & U_{f_1(t)} &= \mu_{f_1(t)} \cdot f_1(t); \\
U_{f_2(t)} &= \mu_{f_2(t)} \cdot f_2(t) & U_{\vartheta} &= \mu_{\vartheta} \cdot \vartheta & \tau &= \mu_t \cdot t
\end{aligned}$$

式中 μ_{ω_z} 以 $(V \cdot s/1)$ 为单位, $\mu_{f_1(t)}$ 以 $(V \cdot s/m)$ 为单位, $\mu_{f_2(t)}$ 以 $(V \cdot s/m^2)$ 为单位, μ_{ϑ} 以 $(V/1)$ 为单位, 它们是对电压的比例系数。 μ_t 以 (v/s) 为单位, 是以实际过程向模拟过程转换的时间比例尺。将所列的转换公式代入方程组, 并将第一个方程除以 μ_{ω_z}/μ_t , 第二个方程除以 μ_{ϑ}/μ_t 得

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega_z}{dt} + k_1 \mu_{f_1(t)} f_1(t) \omega_z + \frac{k_2 \mu_{f_2(t)} \mu_t f_2(t) \vartheta}{\mu_{\omega_z}} &= k_3 \frac{\mu_t}{\mu_{\omega_z}}; \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= k_4 \frac{\mu_{\omega_z} \mu_t}{\mu_{\vartheta}} \omega_z
\end{aligned} \quad (5.21)$$

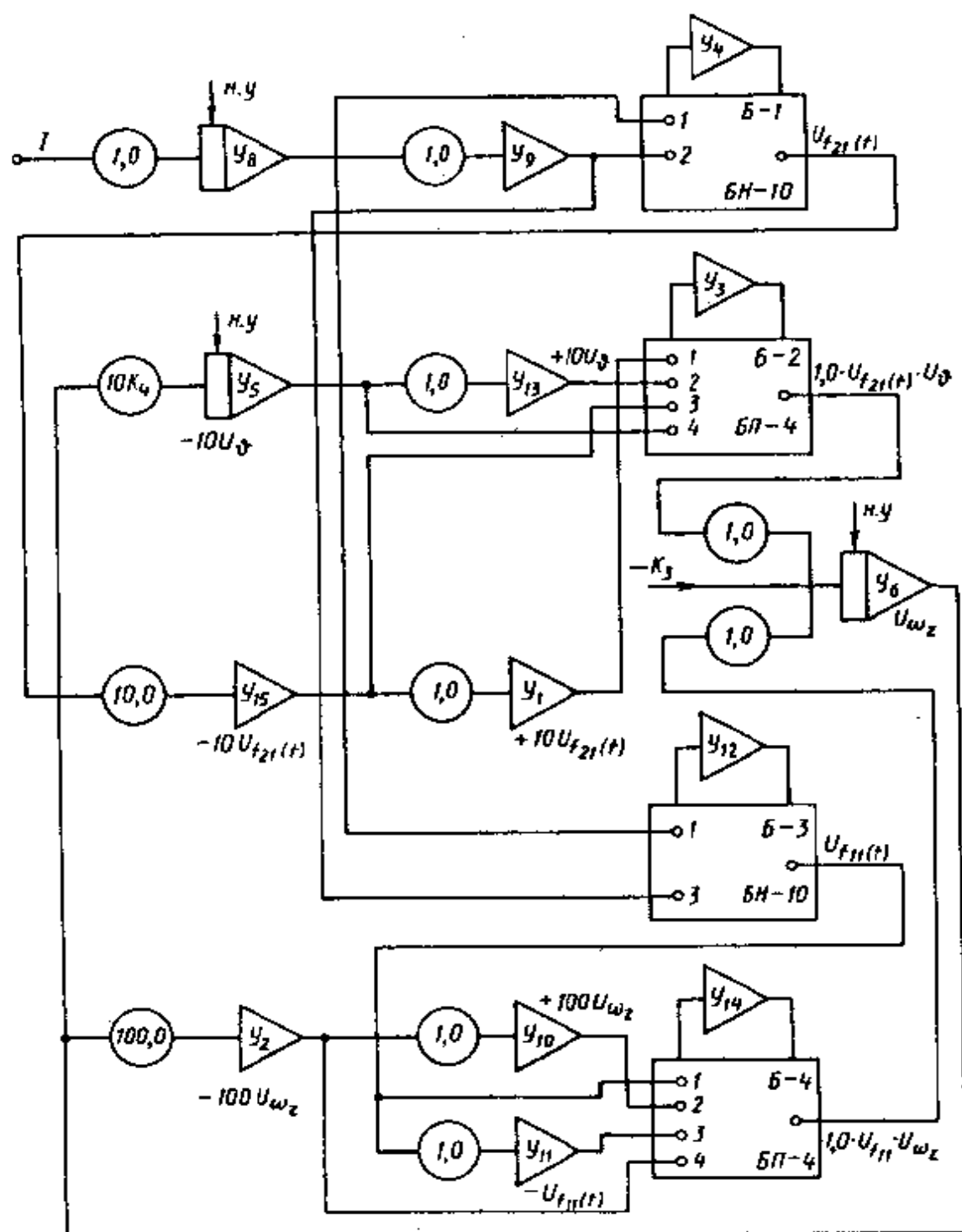


图 5.4 在模拟计算机上求解飞行器纵轴振动运动问题的结构框图

为了使方程组(5.21)和(5.19)成为模拟方程,必须用选择的比例尺算出系数

$$k_1 = \frac{a_1}{\mu_{f_1(t)} \mu_t} \quad k_2 = \frac{a_2 \mu_{\omega_z}}{\mu_{f_2(t)} \mu_\theta \mu_t};$$

$$k_3 = \frac{a_3 \mu_{\omega_z}}{\mu_t} \quad k_4 = \frac{\mu_\theta}{\mu_{\omega_z} \mu_t}$$

k_1, k_2, k_3, k_4 的量纲分别是 $1/V^2, 1/V^2, 1/1, 1/V$ 。

比例尺的数值要根据具体的机器来选择,务必使在放大器输出端的工作电压不超过该机器的最大值。

与前类似,记 $U_{f_{11}(t)} = k_1 U_{f_1(t)}$; $U_{f_{21}(t)} = k_2 U_{f_2(t)}$,并以小的有限量取代公式(5.20)中的无穷小量,则得到机器上直接采用的方程组

$$\Delta U_{\omega_z} / \Delta \tau + U_{f_{11}(t)} U_{\omega_z} + U_{f_{21}(t)} U_\theta = k_3;$$

$$\Delta U_\theta / \Delta \tau = k_4 U_{\omega_z} \quad (5.22)$$

求解上述问题的电路结构图如图 5.4 所示,解题时的自变量是时间。

在图 5.5

中,以 $U_\theta = f(t)$ 为例画出了它的记录曲线。在此例中代表扰动力矩并由量 k_3 确定的电压在曲线 $U_\theta = f(t)$ 第一个最大值瞬时被断开,如图所见,在扰动力

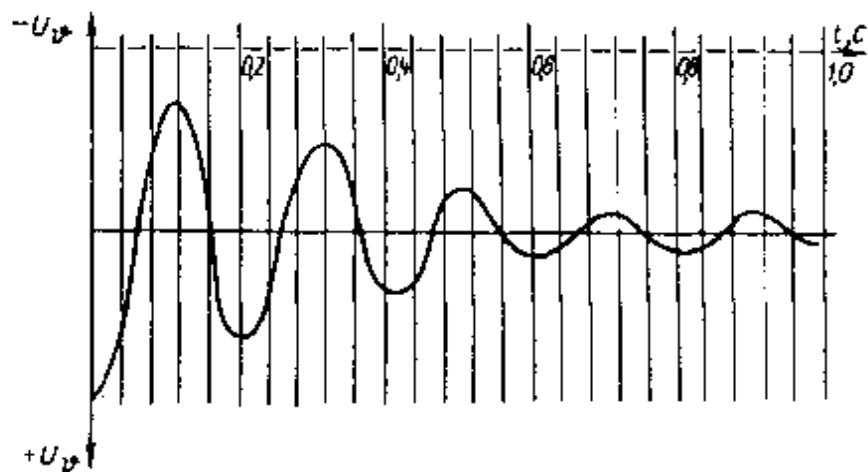


图 5.5 在模拟计算机上求解俯仰角 $\theta(t)$ 变化方程所得记录曲线的例子

矩作用停止后火箭纵轴的摆动迅速衰减。按坐标纵轴的比例尺对所记录的曲线进行判读,即可得到俯仰角对时间的变化规律 $\theta(t) = \mu_{\omega_z} U_{\theta(t)} / (\mu_\theta)$, 式中 μ_{ω_z} 是波形图的比例尺。

在判读出波形图上俯仰角度变化特征及最大值后就可以判断火箭运动的稳定性以及气动系数 m_1 和 m_z^a 设计的正确性,而在模拟机上求解时这两个系数包含在 a_1 和 a_2 中。当然,在求解更加复杂的飞行理论问题时就需要更加复杂的模拟结构图,在这种情况下所用的模拟机就应比上述最简单模拟机具有更大的功能。

第六章 外弹道问题的近似解法和表解法

利用数字计算机的数值计算可以以必要的精度积分上述任何一个微分方程组,但是这种方法是较费力的,故只有进行精确的弹道计算时才利用它们。在初步设计阶段,对弹道计算精度的要求并不高,这时就可利用各种解析解法或表解法来解决外弹道问题。

根据所采用的假设不同,外弹道问题的解析解法分成四大类:

第一类是忽略空气阻力的解法。

第二类是将阻力表示成质心速度某种解析函数的解法。在这种解法中通常只考虑 1~2 个气动力特征数,例如只考虑迎面阻力和升力,而它们之间的联系则以专门的函数——飞行器极限图的形式给出,这种函数关系一般选用解析表达式表示。

第三类是将基本运动微分方程变换成可分离变量形式的解法。但是变量分离之后并不是总能得到有限形式的解析解,在多数情况下还需要用到以表格或曲线形式表示的积分。这类变换通常不是十分严格准确的,因此常要引进一些符合系数和辅助表。

第四类是预先给定用于确定某种运动特性变化函数的解法,例如可以给定飞行器质心运动速度与时间的关系 $V(t)$ 。这类方法需要补充空气阻力规律或者在进行含有与空气阻力有关的函数的定积分数值计算时引进逐次逼近。

每种方法所适用的弹丸具体飞行条件应与根据此种方法组成运动微分方程时所采用的假设相接近。

§ 6.1 不考虑空气阻力的解析方法

6.1.1 抛物线理论

常质量弹丸在 $g = g_0 = \text{const}$ 的平行平面重力场中以及忽略空

气阻力的条件下运动时,其弹道用下面的微分方程组描述:

$$\frac{dx^2}{dt^2} = 0 \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

它的解由飞行起始条件 V_0 和 θ_0 确定。

将上面的方程积分两次得

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c_1 & x &= c_3 + c_1 t; \\ \dot{y} &= c_2 - gt & y &= c_4 + c_2 t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned}$$

由表达式 $\dot{x} = V \cos \theta = c_1$ 得知,所研究的弹丸的运动特点是速度的水平投影沿弹道固定不变。

根据条件 $t = 0$ 时, $y_0 = 0, x_0 = 0$, 求得各积分常数如下

$$c_3 = c_4 = 0 \quad c_1 = \dot{x}_0 = V_0 \cos \theta_0 \quad c_2 = \dot{y}_0 = V_0 \sin \theta_0$$

将这些积分常数代入 x 和 y 的表达式后,得到如下参数形式的弹道方程:

$$x = V_0 \cos \theta_0 t \quad y = V_0 \sin \theta_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

或者用变量替换 $t = x/(V_0 \cos \theta_0)$ 消去 y 方程中的参量 t 后得

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \theta_0} \quad (6.1)$$

将方程(6.1)与一般形式的二次曲线方程 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ 相比较可见,(6.1)式的判别式 $B^2 - AC = 0$,因而方程(6.1)所描绘的曲线是抛物线,故这种解法常称为抛物线理论。

下面求出计算抛物线弹道任意点上运动特征的关系式。将(6.1)式对 x 微分,得到确定速度矢量对水平面倾斜角的关系式

$$\operatorname{tg} \theta = y'_x = \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gx}{V_0^2 \cos^2 \theta_0} \quad (6.2)$$

弹丸在弹道任意高度上的速度由“活力”方程 $(mV^2/2) - (mV_0^2/2) = -mgy$ 确定,由此得

$$V = \sqrt{V_0^2 - 2gy} \quad (6.3)$$

由此公式可见,在弹道的升弧段和降弧段同一高度的两点上弹丸的速度是相同的。

弹丸运动的时间由下式确定:

$$t = \frac{x}{V_0 \cos \theta_0} \quad (6.4)$$

利用条件 $y_c = 0$, 即可得到弹丸在落点 c 处的运动特征值, 于是从方程 (6.1) ~ (6.4) 相应地得到全飞行距离

$$x_c = V_0^2 \sin 2\theta_0 / g \quad (6.5)$$

落角的正切 $\operatorname{tg} \theta_c = -\operatorname{tg} \theta_0$; 落速 $V_c = V_0$; 全飞行时间为

$$t_c = 2V_0 \sin \theta_0 / g \quad (6.6)$$

以上所求得的关系式表明, 对于抛物线弹道, 在落点处有 $|\theta_c| = \theta_0, V_c = V_0$ 。

由条件 $\operatorname{tg} \theta_s = 0$ (或 $\theta_s = 0$) 可求得弹道顶点处的运动特征, 这时由 (6.2) 式得

$$x_s = V_0^2 \sin 2\theta_0 / (2g) \quad (6.7)$$

也即 $x_s = x_c / 2$ 。

类似地从 (6.4) 式得到 $t_s = V_0 \sin \theta_0 / g$, 也即 $t_s = \frac{1}{2} t_c$ 。因为在弹道顶点处速度分量 $\dot{x}_s = V_0 \cos \theta_0, \dot{y}_s = V_0 \sin \theta_0 - gt_s = 0$, 则顶点处总速度 $V_s = \sqrt{\dot{x}_s^2 + \dot{y}_s^2} = V_0 \cos \theta_0$ 。将 x_s 的表达式代入基本方程 (6.1), 即求得弹道高 y_s 的表达式

$$y_s = V_0^2 \sin^2 \theta_0 / (2g) \quad (6.8)$$

对于 y_s 还可导出如下有用的表达式:

$$y_s = \frac{x_c}{4} \operatorname{tg} \theta_0 \quad (6.9)$$

对确定弹道顶点和落点的关系式的分析表明, 抛物线弹道是一条对称曲线。

在考虑大气阻力的弹道计算中, 常将空气密度随高度变化的函数取为平均值, 即 $H(y) = H(y_{cp})$ 。作为一级近似, 弹道平均高度可用抛物线理论得出:

$$y_{cp} = \frac{1}{x_c} \int_0^{x_c} y dx = \frac{1}{x_c} \int_0^{x_c} \left(x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \theta_0} \right) dx$$

经过积分和变换后即得

$$y_{cp} = \frac{2}{3} y_s \quad (6.10)$$

抛物线理论是确定弹丸在大气中运动的关系式当空气阻力趋于零时的极限。

抛物线理论可用于稠密大气层以外(高度超过 20 公里)弹丸运动特性的计算,但在计算较大弹道段时应注意,由于抛物线理论没有考虑地表弯曲和重力加速度 g 可变,这将会给计算带来明显的误差。

6.1.2 椭圆理论

外弹道学还研究在地球中心引力场中大长度区间段上常质量物体的运动,这时的弹道是开普勒椭圆轨道,它在数学上用方程组 (3.142) 来描述,此方程组有简单的解析解。该方程组中的第一个方程表达了在中心引力场中的动量矩守恒定律,积分此方程就得到被动段起点参数与弹道任意点参数之间的关系

$$C_1 = r^2 \dot{\gamma} = r_H V_H \cos \theta_H = r V \cos \theta \quad (6.11)$$

式中 $r_H = r_k$, 而 V_H 和 θ_H 是绝对运动中物体运动的起始参数, θ_H 和 θ 是矢量 V_H 和 V 对当地水平面(相应地垂直于 r_H 和 r) 的倾角。

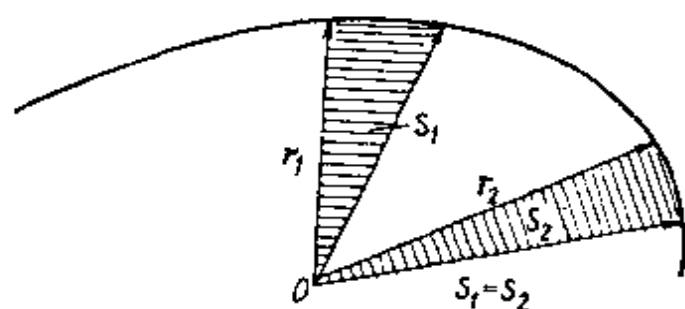


图 6.1 面积积分的概念

关系式 (6.11) 即为开尔文第一定理,取名为面积积分。这一概念的物理意义是在相同的时间间隔内矢径所扫过的面积相同(见图 6.1)。

积分方程组 (3.142) 中的第一个方程,并考虑到此方程组中的第二个方程,得

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\gamma}^2 = \frac{2K}{r} + C_2 \quad (6.12)$$

由此得

$$C_2 = V^2 - \frac{2K}{r} = V_H^2 - \frac{2K}{r_H} \quad (6.13)$$

表达式 (6.13) 称为能量积分或“活力”积分,对于弹道上的两个点有

$$V_1^2 - \frac{2K}{r_1} = V_2^2 - \frac{2K}{r_2} \text{。以 } \frac{m}{2} \text{ 乘此式的各项得}$$

$$\frac{mV_2^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{Km}{r_2} - \frac{Km}{r_1}$$

也即物体在第二个点上的动能等于它在第一个点上的动能再加上两点位置势能的改变量。

物体在中心引力场中的轨道方程可由运动方程(3.142)求得。由(6.11)式求出 \dot{r} 代入(6.12)式中,并注意到

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\gamma} \cdot \frac{d\gamma}{dt} = \frac{C_1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\gamma}$$

得

$$d\gamma = \frac{C_1/r^2}{\sqrt{C_2 - C_1^2/r^2 + 2K/r}}$$

此方程的最终解为

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(\varphi_s - \varphi)} \quad (6.14)$$

此关系式是极坐标形式下的圆锥曲线方程。在(6.14)式中 φ 和 φ_s 是自矢径 r_H 量起至轨道上某点以及至顶点相应的极角; $p = C_1^2/K$ 是圆锥曲线的焦点参数;

$$e = \sqrt{1 + C_2 \frac{C_1^2}{K^2}} \quad (6.15)$$

是偏心率。参数 p 也常用另一种形式表示 $p = \kappa_H r_H \cos^2 \theta_H$, 式中 $\kappa_H = \frac{r_H V_H^2}{K}$ 是弹道被动段起点处两倍动能与势能的无因次比值。

将 C_1 和 C_2 代入表达式(6.15)后得到以基本轨道参数表示的任意点速度公式 $V^2 = \frac{K}{r} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{1 - e^2}{\cos^2 \theta}} \right]$ 。

对位于圆锥曲线焦点轴上的轨道点,由于 $\theta = 0 (\cos \theta = 1)$, 上述方程具有如下形式:

$$V^2 = \frac{K}{r} (1 \pm e) \quad (6.16)$$

利用关系式(6.14)和(6.15)可以研究起始条件对轨道形状以及飞行器运动速度的影响,下面我们来研究一些可能的情况。

1) $e = 0$ 。在这种情况下由(6.14)和(6.16)式知物体将沿圆周运动,在极坐标系里此圆的方程为 $r = p = r_H$,速度 $V_1 = \sqrt{K/r}$ 称为圆周速度,也就是使物体成为地球卫星所必须的速度。在 $r = R_s = 6371$ 公里的特定标准情况下, $V_{01} = 7.906\text{km/s}$,这个速度称为第一宇宙速度。上面引进的参数 κ_H 可以用半径 r_H 相应的圆周速度的量值来表示,即

$$\kappa_H = \frac{V_H^2}{K/r_H} = \left[\frac{V_H}{V_{H1}} \right]^2$$

由此可见,物体沿圆周轨道运动与 $\kappa_H = 1$ 相应。

2) $0 < e < 1$ 。按照(6.14)式将有椭圆轨道,但因在(6.16)式中偏心率前有两个符号,故可有两种不同的情况:

a) 如果取 $V^2 = \frac{K}{r}(1+e) = V_n^2$,则引力中心与最接近速度 V_n 点的那个焦点一致,在此情况下这个轨道点是近地点。由于此椭圆不与引力体相交,故在近地点以此速度运动的物体将成为一颗卫星。

b) 如果取 $V^2 = \frac{K}{r}(1-e) = V_A^2$,则轨道也是一个椭圆,但引力中心与远焦点一致,速度 V_A 对应的点称为远地点。在此情况下轨道可以与引力体相交,也可以不相交。边界值 V_{AGP} 很容易求得,因速度 V_{AGP} 应等于在近地点与地表面相切的椭圆在远地点处的速度,利用条件 $V_n R_s = V_{AGP} r_{AGP} = C_1$,并将 V_n 和 V_A 代入。经变换后得

$$V_{AGP} = V_1 \sqrt{\frac{2R_s}{r_{AGP} + R_s}}$$

如果 $V_A > V_{AGP}$,则椭圆不与引力体相交;如果 $V_A = V_{AGP}$,则椭圆与引力体相切;如果 $V_A < V_{AGP}$,则椭圆与引力体相交(这种情况与远程弹道式火箭[БРПД]的弹道相应)。对于椭圆轨道,参数 $\kappa_H < 2$ 。

3) $e = 1$ 。轨道是抛物线,如果赋予火箭以抛物线速度,则它将克服地球的引力。由速度方程(6.16)得

$$V_1 = \sqrt{\frac{2K}{r}} = V_1 \sqrt{2}$$

当 $r = R_s = 6371\text{km}$ 时, $V_{01} = V_{01} \sqrt{2} = 11.80\text{km/s}$,这称为第二宇宙速度。抛物线轨道与参数 $\kappa_H = 2$ 相应。

4) $e > 1$ 。按照(6.14)式, 轨道将是双曲线, 此时 $\kappa_H > 2$ 。

为了直观地阐述所研究的这些情况, 画出了图 6.2, 图 6.3 和图 6.4。在图 6.2 上表明, 轨道的形状取决于参数 κ_H 的大小。图 6.3 上绘出了由 (6.16) 式得出的 $V/V_0 = (1 \pm e)^{1/2}$ 函数曲线, 可以看出, 物体的轨道型式取决于偏心率 e 与圆锥曲线焦点轴上弹道点速度 V 之间的关系。离引力中心距离为 r 的物体的轨道类型随物体速度(当 $V \perp r$ 时)的变化情况如图 6.4 所示。

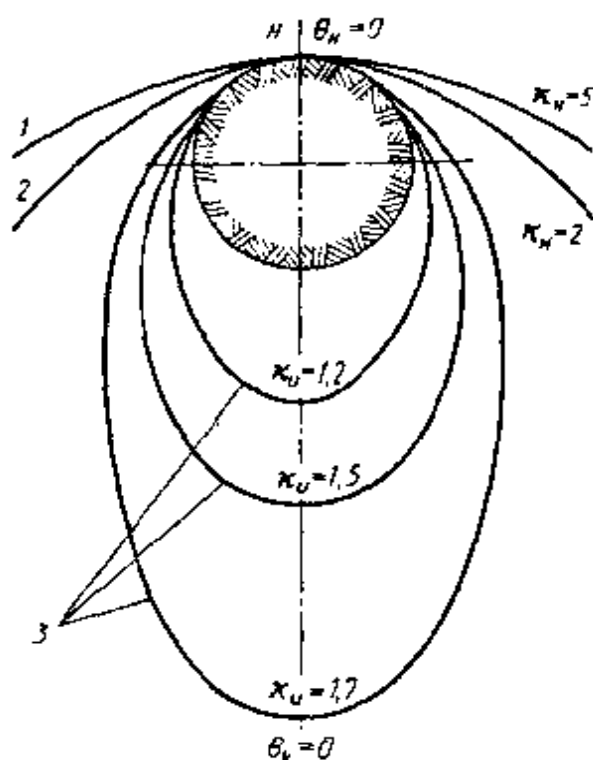


图 6.2 在大高度上飞行的特征轨道族

1. 双曲线 2. 抛物线 3. 椭圆

在引入“抛物线速度”这个概念后, 还可以给能量积分表达式中的分量 $(mK)/r$ 一个物理解释, 显然 $\frac{mK}{r} = \frac{2K}{r} \cdot \frac{m}{2} = \frac{m}{2} V_1^2$ 是在半径 r 处物体为克服地球引力场所必须具有的动能。

对于常数 C_2 类似地可以求得表达式 $C_2 = V_H^2 - V_{H1}^2$, 由此得出, 如果 $C_2 > 0$, 则 $r \rightarrow \infty$, 物体的轨道是开曲线(双曲线或抛物线); 如果 $C_2 < 0$, 则轨道是具有最大半径 $r_{\max} = r_A = \frac{2K}{C_2}$ 的闭曲线(椭圆或圆)。下面我们只研究 $C_2 < 0$ 和 $\kappa_H < 2$ 的椭圆轨道。

椭圆理论的关系式一般只用于以下基本问题的近似求解:

- 1) 根据被动段起点的已知运动特征确定轨道任意点上的运动参数。
- 2) 按照轨道被动段起点的给定参数求全射程。
- 3) 已知被动段起点处的 r_H 和 θ_H , 确定达到一定飞行距离所需

的初速 V_H 。

4) 根据给定的飞行距离和 r_H , 计算以最小速度 V_{Hmin} 达到给定射程的最优射角。

5) 在已知 r_H 和 V_H 值时求最大射程角 θ_{Hmax} 。

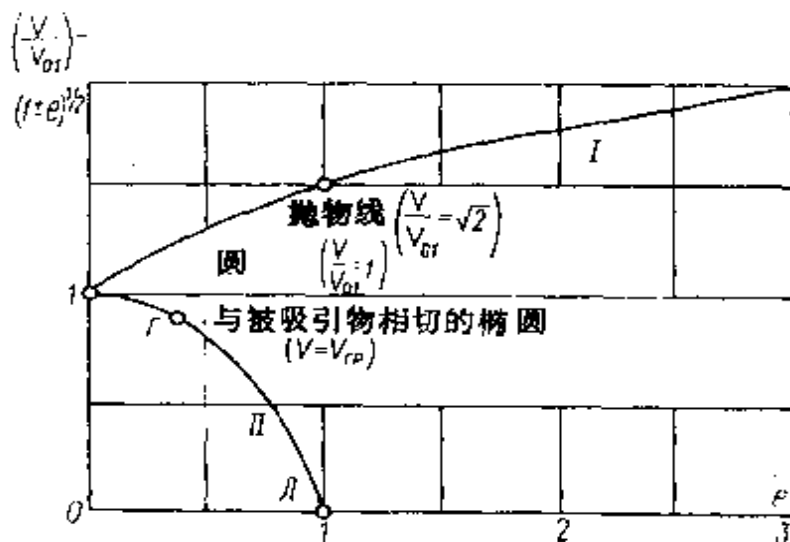


图 6.3 V/V_{01} 与偏心率 e 间的关系曲线

$$1 - \frac{V}{V_{01}} = (1 + e)^{1/2};$$

$$2 - \frac{V}{V_{01}} = (1 - e)^{1/2}.$$

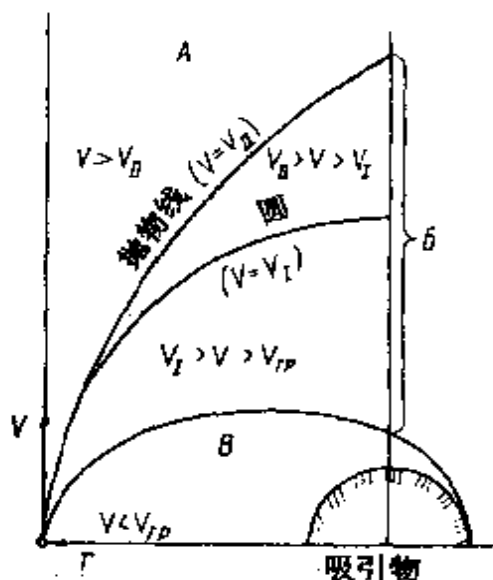


图 6.4 可能轨道域

A—双曲线轨道域;

B—与引力体不相交的椭圆轨道域;

C—与引力体相交的椭圆轨道域。

由于理想的远程弹道式火箭(БРПД)再入稠密大气层的最后一段弹道的长度小于全飞行距离的 5%, 故可假定在这一段上火箭仍是沿椭圆弹道飞行, 按这种假设可以给出飞行距离和脱靶量很好的一次近似。考虑到这一点我们将在图 6.5 中设 $H'\Pi$ 为椭圆弹道段的情况下研究物体的运动, 得出进一步的结论。

用下面的变换将微分方程中的自变量 t 变换成自变量 φ

$$\frac{d}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{r_H V_H \cos \theta_H}{r^2} \cdot \frac{d}{d\varphi}$$

再将 $\frac{1}{r}$ 以 ρ 代换, 则对于所研究的情况, 方程 (3.142) 的第一个方程改写成如下形式:

$$\frac{d^2 \rho}{d\varphi^2} + \rho = \frac{1}{\kappa_H r_H \cos^2 \theta_H}$$

积分常数由下面的初始条件确定:

$$\rho_H = \frac{1}{r_H}$$

$$\frac{d\rho_H}{d\varphi} = -\frac{1}{r_H} \operatorname{tg} \theta_H$$

显然所得方程的解为

$$r_H \rho = \frac{1 - \cos \varphi}{\kappa_H \cos^2 \theta_H} + \frac{\cos(\theta_H + \varphi)}{\cos \theta_H}$$

再经从 ρ 到 $1/r$ 的反变换, 得到椭圆弹道方程

$$r = \frac{\kappa_H r_H \cos^2 \theta_H}{1 - \cos \varphi + \kappa_H \cos \theta_H \cos(\theta_H + \varphi)} \quad (6.17)$$

虽然这种写法比通常的形式 (6.14) 式复杂一些, 但其优点是它直接和间接地将被动段起点的火箭能量和位置参数 V_H, θ_H 和 r_H 包括于其中。关系式 (6.17) 与前面导出的一些关系式一起就可以很简单地根据已知的起始数据确定弹道诸元。下面的任务是要解出以前曾给出过的那些关系式。

在确定火箭落点运动参数时, 必须注意到目标相对于火箭弹道被动段起点位置是由目标的角距离 2ψ 唯一确定的, 而角距离和线距离 L (对于球形地球模型) 之间的关系为

$$L = 2R_s \psi \quad (6.18)$$

式中 2ψ 是以弧度为单位的目标相对位置。下面列出在 $R_s = 6371 \text{ km}$ 条件下一系列角度 ψ 值和与其相应的飞行线距离值。

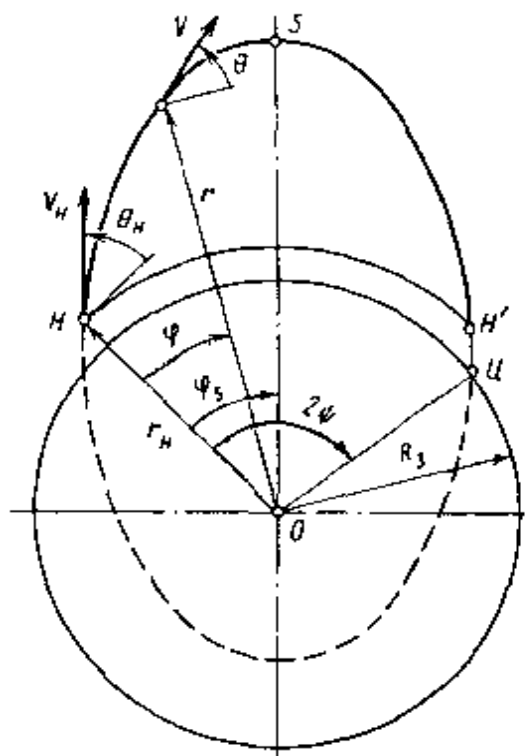


图 6.5 远程弹道火箭飞行轨道简图

$\psi(^{\circ})$	5	8	15	30	60	75	90
$L(\text{km})$	556	890	1668	3336	6672	8340	10008

命中目标的条件是当 $\varphi = 2\psi$ 时 $r = R_s$ 。将此条件代入(6.17)式中,得到角距离与被动段起点参数之间关系的方程

$$r_H = \frac{R_s[1 - \cos 2\psi + \kappa_H \cos \theta_H \cos(\theta_H + 2\psi)]}{\kappa_H \cos^2 \theta_H} \quad (6.19)$$

关系式(6.19)也可用于解逆问题,即在给定的 θ_H 和 r_H 条件下为达到所要求的距离,确定所必须的速度

$$V_H = V_{H1} \left[\frac{1 - \cos 2\psi}{\frac{r_H}{R_s} \cos^2 \theta_H - \cos \theta_H \cos(\theta_H + 2\psi)} \right]^{1/2} \quad (6.20)$$

当飞行距离很大时,在一级近似中可以采用火箭燃料在($r = R$)处瞬时燃尽的假设,这时

$$V_H = V_{01} \left[\frac{1 - \cos 2\psi}{\cos^2 \theta_H - \cos \theta_H \cos(\theta_H + 2\psi)} \right]^{1/2}$$

分析所得到的简化公式可得到如下结论:同一个角距离 2ψ 可以在不同的发动机关机瞬时值 V_H 和 θ_H 组合下获得。在计算远程弹道时,利用地球球形模型假设将会导致明显的误差,但是采用更完善的模型又会使计算方法大为复杂化,使它难于应用于教学实际。

实际上最重要的是要确定火箭自发射经某个时间间隔后在椭圆弹道上的位置。第一步是在考虑到弹道方程(6.17)的情况下将动量矩方程对时间积分,以求得原始关系式。经过复杂的解析求解^[32],得到最后的公式如下:

$$t = \frac{r_H}{V_H \cos \theta_H} \left\{ \frac{\operatorname{tg} \theta_H (1 - \cos \varphi) + (1 - \kappa_H) \sin \varphi}{[2 - \kappa_H] \left[\frac{1 - \cos \varphi}{\kappa_H \cos^2 \theta_H} + \frac{\cos(\theta_H + \varphi)}{\cos \theta_H} \right]} + \frac{2 \cos \theta_H}{\kappa_H \left[\frac{2}{\kappa_H} - 1 \right]^{3/2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\left[\frac{2}{\kappa_H} - 1 \right]^{1/2}}{\cos \theta_H \cot \frac{\varphi}{2} - \sin \theta_H} \right\} \quad (6.21)$$

将 $\varphi = 2\psi$ 代入方程(6.21)中,即可算出全飞行时间 t_c 。

$$t_c = \frac{r_H}{V_H \cos \theta_H} \left\{ \frac{\operatorname{tg} \theta_H (1 - \cos 2\psi) + (1 - \kappa_H) \sin 2\psi}{(2 - \kappa_H) \frac{r_H}{R_s}} + \frac{2 \cos \theta_H}{\kappa_H \left[\frac{2}{\kappa_H} - 1 \right]^{3/2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\left[\frac{2}{\kappa_H} - 1 \right]^{1/2}}{\cos \theta_H \cot \psi - \sin \theta_H} \right\} \quad (6.22)$$

在 $r_H = R_s$ 的条件下, 对于不同角距离, 沿弹道轨迹飞行时间与角 θ_H 的关系如图 6.7 中的曲线所示。

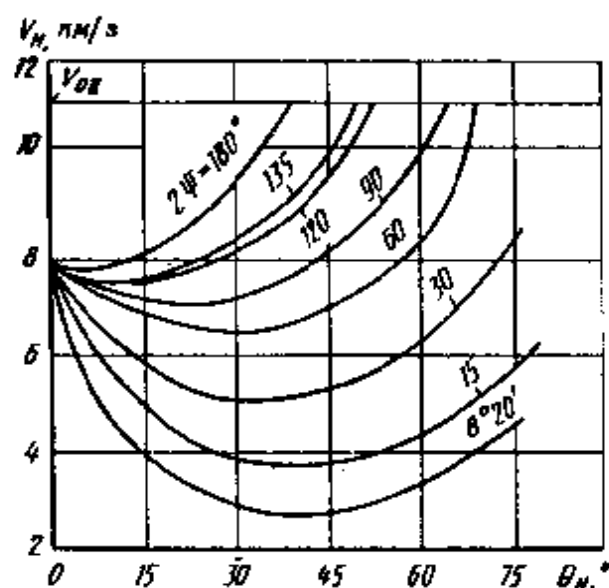


图 6.6 对于不同的角距离 2ψ (当 $r_H = R_s$ 时) 被动段起点速度 V_H 与角 θ_H 间的关系

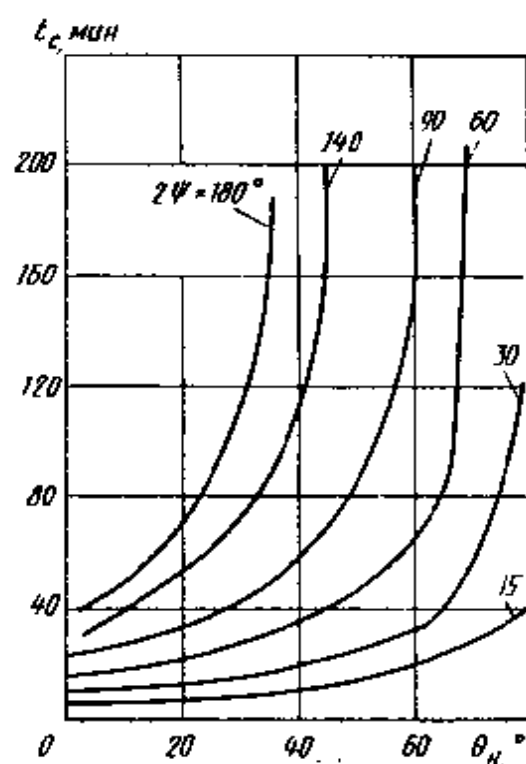


图 6.7 对于不同的角距离 (当 $r_H = R_s$ 时) 全飞行时间与角 θ_H 间的关系

6.1.3 计算火箭最大飞行速度的齐奥尔科夫斯基公式

在无空气阻力并且不考虑重力作用的假设下, 变质量飞行器的运动方程可以最简单地积分。

在这种情况下火箭直线运动方程具有如下形式:

$$m\dot{V} = P \quad (6.23)$$

将公式(1.154)和(3.25)表示的 P 和 m 代入(6.23)式中得

$$dV = W_e \frac{Q_{cek} dt}{Q_0 - \int_0^t Q_{cek} dt}$$

积分此方程即得在瞬时 t 火箭的速度

$$V = W_e \ln \frac{Q_0}{Q_0 - \int_0^t Q_{cek} dt} \quad (6.24)$$

$$\text{或} \quad V = W_e \ln \frac{m_0}{m} = V_u \quad (6.25)$$

式中 m_0 和 m 是火箭的初始质量和瞬时质量。公式(6.25)还可改写成另一种形式:

$$\frac{m}{m_0} = e^{-V/W_e} \quad (6.26)$$

考虑到 $\int_0^t Q_{cek} dt = Q_T$, 得到在不考虑重力和空气阻力作用时火箭所可能具有的最大速度

$$V_{\max} = W_e \ln \frac{Q_0}{Q_0 - Q_T} \quad (6.27)$$

如将火箭的重量表示成 $Q_0 = Q_n + Q_T$, 式中 Q_n 为火箭的被动段重量, 则

$$V_{\max} = W_e \ln \left(1 + \frac{Q_T}{Q_n} \right) \quad (6.28)$$

$$\text{或} \quad V_{\max} = -W_e \ln \left(1 - \frac{Q_T}{Q_0} \right) \quad (6.29)$$

对于实际计算可利用表格函数

$$k(\lambda) = -\ln(1 - \lambda)$$

式中

$$\lambda = \int_0^t Q_{cek} dt / Q_0$$

于是 $V = W_e k(\lambda)$ 。

公式(6.25)由 K. Э. 齐奥尔科夫斯基导出, 故以他的名字命名。

§ 6.2 常质量弹丸弹道的近似计算方法

6.2.1 采用解析函数表示空气阻力的解法

常质量炮弹空气弹道计算的解析方法一般建立在以 θ 为自变量的方程组基础上,而最主要的困难是确定弹丸质心运动速度,为此要积分速度矢端图方程(3.130)。将此方程表示成如下形式:

$$\frac{d(V\cos\theta)}{dt} = \frac{EV^2}{g} \quad (6.30)$$

式中 $E = \frac{X_a}{m_0 V}$, 如果 X_a 用(1.126)式来定义,则得

$$E = \frac{\rho V S}{2m_0} c_{x_a}(M) \quad (6.31)$$

如果用(1.129)式定义 X_a ,则有

$$E = \frac{c}{V} H(y) F(V) \quad (6.32)$$

在第一种情况下,由(6.30)式得

$$\frac{d(V\cos\theta)}{d\theta} = \frac{\rho(y)}{\rho_{ON}} \cdot \frac{\rho_{ON} V^3}{2m_0 g} S c_{x_a}(M) \quad (6.33)$$

将函数 $\rho(y)/\rho_{ON}$ 和 $c_{x_a}(M)$ 同时以解析关系式替代也不能使方程(6.33)中的变量分离,更不可能得到有限形式的解。甚至取 $c_{x_a}(M) \approx c_{x_a} = \text{const}$,使得空阻力成为二次函数式

$$X_a = \frac{S\rho V^2}{2} c_{x_a} \quad (6.34)$$

也同样不能使方程(6.33)中的变量分离,这是因为(6.34)式中还有函数 $\rho(y)$ 。

如果采用(6.32)式,则得到方程组(3.132)的第一个方程为如下形式:

$$\frac{d(V\cos\theta)}{d\theta} = c_1 \frac{VF(V)}{g} \quad (6.35)$$

式中 $c_1 = cH(y)$ 。

研究表明,为了保证必要计算精度的条件下近似积分方程(6.35),须取 $H(y) \approx H(y_c)$,而空气阻力函数可用如下解析关系式

之一来表示:

$$F(V) = a + bV^n \quad (6.36)$$

或 $F(V) = BV^n \quad (6.37)$

式中 a, b, B, n 是不变的试验系数。上面后一个关系式是由 H. B. 马也夫斯基和 H. A. 扎布茨基提出的, 对于不同的速度范围, 指数 n 的值不同, 如下表所示:

$V(\text{m/s})$	0	240	295	375	419	550	800
	240	295	375	419	550	800	1000
n	2	3	5	3	2	1.70	1.55

每个区段上系数 B_i 选择的原则是要使函数 $F(V)$ 连续。

将(6.36)式代入(6.35)式中, 并将方程左边的导数展开得

$$\frac{d(V \cos \theta)}{d\theta} = \frac{c_1 V}{g} (a + bV^n)$$

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{V}{g \cos \theta} (c_1 a + g \sin \theta) + \frac{c_1 b}{g \cos \theta} V^{n+1}$$

作代换 $V, V^n = 1$, 并由它微分得

$$dV = -\frac{dV_*}{nV_*^{n-1}} \quad (6.38)$$

经过代换和变换就得到一个一阶线性微分方程

$$\frac{dV_*}{d\theta} + nN(\theta)V_* = nc_1M(\theta) \quad (6.39)$$

式中

$$N(\theta) = \frac{a + g \sin \theta}{g \cos \theta} \quad M(\theta) = -\frac{c_1}{g \cos \theta}$$

根据求解此类方程的一般法则, 我们求得方程(6.39)如下形式的解:

$$V_* = nc_1 e^{-n \int_{\theta_0}^{\theta} N(\theta) d\theta} \left[\int_{\theta_0}^{\theta} e^{n \int_{\theta_0}^{\theta} N(\theta) d\theta} M(\theta) d\theta + k \right] \quad (6.40)$$

由此等式和(6.38)式, 对于初始条件 $\theta = \theta_0$ 和 $V = V_0$ 得 $k = \frac{1}{V_0^n}$; 在

确定了 V_* 后就可由(6.38)式求出未知速度

$$V = \frac{1}{\sqrt[n]{V_*}} \quad (6.41)$$

下面再对以公式(6.37) 确定函数 $F(V)$ 的情况求解析解。此时由方程(6.35) 得

$$\frac{d(V\cos\theta)}{d\theta} = \frac{c_1 B V^{n+1}}{g} \quad (6.42)$$

为了分离变量,将上式右边的分子分母同乘以 $\cos^{n+1}\theta$ 得

$$\frac{d(V\cos\theta)}{(V\cos\theta)^{n+1}} = \frac{c_1 B}{g} \cdot \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta}$$

积分后得

$$\frac{1}{n} \left[\frac{1}{(V_0 \cos\theta_0)^n} - \frac{1}{(V\cos\theta)^n} \right] = \frac{c_1 B}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^{n+1}\theta} \quad (6.43)$$

上式右边的积分结果为初等函数,在文献[33,52] 中就列出了直到 $n=5$ 的解。为了求得坐标和飞行时间,要用到方程组(3.131) 的后三个方程。由方程 $dy/d\theta = -V^2 \operatorname{tg}\theta/g$, 得

$$y = y_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{V^2}{g} \operatorname{tg}\theta d\theta \quad (6.44)$$

由方程 $dx/d\theta = -V^2/g$ 得

$$x = x_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{V^2}{g} d\theta \quad (6.45)$$

由方程 $dt/d\theta = -V/g\cos\theta$ 得

$$t = t_0 + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{V}{g} \cdot \frac{d\theta}{\cos\theta} \quad (6.46)$$

由于速度公式(6.40)、(6.41) 或(6.43) 十分复杂,使得(6.44)、(6.45) 和(6.46) 式右边的积分不可能取有限形式。

下面我们研究一下在以单项二次关系式 $F(V) = BV^2$ 逼近函数 $F(V)$ 时外弹道基本问题的解,这个解称为欧拉方法^[123]。

在方程组(3.131) 的第一个方程中记 $b = BcH(y_{cp})$, 于是速度方程就具有 $\frac{du}{d\theta} = \frac{b}{g} \cdot \frac{u^3}{\cos^3\theta}$ 的形式,积分后得

$$\frac{1}{2u_0^2} - \frac{1}{2u^2} = \frac{b}{g} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} \quad (6.47)$$

式中 $u_0 = V_0 \cos\theta_0$, 为了简化下面的解,常引进辅助函数 $\epsilon(\theta) =$

$\int_0^\theta d\theta/\cos^3\theta$, 于是得

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{u_0^2} - \frac{2b}{g} [\epsilon(\theta) - \epsilon(\theta_0)] \quad (6.48)$$

如果将与起始条件有关的量归在一起, 并记 $\epsilon(V_0, \theta_0) = \epsilon(\theta_0) + g/(2bu_0^2)$, 则得

$$u^2 = \frac{g}{2b} \cdot \frac{1}{\epsilon(V_0, \theta_0) - \epsilon(\theta)} \quad (6.49)$$

(6.49) 式中的函数 $\epsilon(\theta)$ 可写成如下解析关系式:

$$\epsilon(\theta) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} + \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

在求得了 u 之后, 弹丸的速度就可按公式 $V = u/\cos\theta$ 求得。

将(6.49)式代入方程组(3.131)其余几个方程中, 积分后分别得到

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2b} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\operatorname{tg}\theta d\theta}{[\epsilon(V_0, \theta_0) - \epsilon(\theta)] \cos^2\theta} \\ x &= \frac{1}{2b} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{[\epsilon(V_0, \theta_0) - \epsilon(\theta)] \cos^2\theta} \\ t &= \frac{1}{\sqrt{2bg}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{[\epsilon(V_0, \theta_0) - \epsilon(\theta)] \cos^2\theta}} \end{aligned} \quad (6.50)$$

方程(6.50)右边的积分得不出有限形式的结果, 但它们是同一个变量的函数, 故可利用专门的表^[21]作为计算它们的基础。

6.2.2 假速度法 主要函数和辅助函数

假速度方法属于第三类解析法, 因为它建立在对速度方程进行辅助变换的基础上。为了分离变量, 在速度方程中引入了函数 $F(U)$, 这里 U 是具有速度因次的量并称为假速度, U 的值根据图 6.8 确定如下:

$$U = \frac{V \cos\theta}{\cos\theta_0} \quad (6.51)$$

假速度矢量平行于初速并具有与实际速度相同的水平分速 u 。因为简单地以 $F(U)$ 代替 $F(V)$ 会带来显著的误差, 故在速度方程中引入了辅助修正系数, 这种替换的一般形式为

$$H(y)F(V) = kF(U) \quad (6.52)$$

式中 k 为补偿误差的修正因子。对于小射角和大初速低伸弹道, 弹道倾角 θ 沿弹道改变很小, 而 $H(y) \approx 1$, 这时取

$$k = 1/\cos\theta \quad (6.53)$$

就足够了。对于具有高初速的高射弹道, 沿弹道 $\cos\theta$ 变化也很小, 但 $H(y) \neq 1$, 因此要取另一种形式的替代, 即取

$$\begin{aligned} H(y)F(V) \\ \approx H(y_{cp}) \cdot F(U) \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta} \end{aligned} \quad (6.54)$$

也即

$$k = H(y_{cp}) \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta} \quad (6.55)$$

对于野战火炮系统弹丸的弹道, 具有中等的射角和初速, 这时就要取比上面更复杂一些的替换:

$$H(y)F(V) \approx \beta F(U) \frac{\cos^2\theta_0}{\cos\theta} \quad (6.56)$$

也即取

$$k = \beta \frac{\cos^2\theta_0}{\cos\theta} \quad (6.57)$$

式中 β 为辅助修正因子, 最后的这个替换也叫做西亚切替换。

在已知假速度的情况下, 真速度由等式(6.51) 确定

$$V = \frac{U \cos\theta_0}{\cos\theta} \quad (6.58)$$

而它的水平投影则为

$$u = U \cos\theta_0 \quad (6.59)$$

让我们在速度方程中引入代换(6.56), 记 $c' = c\beta$ 并且分离变量, 得

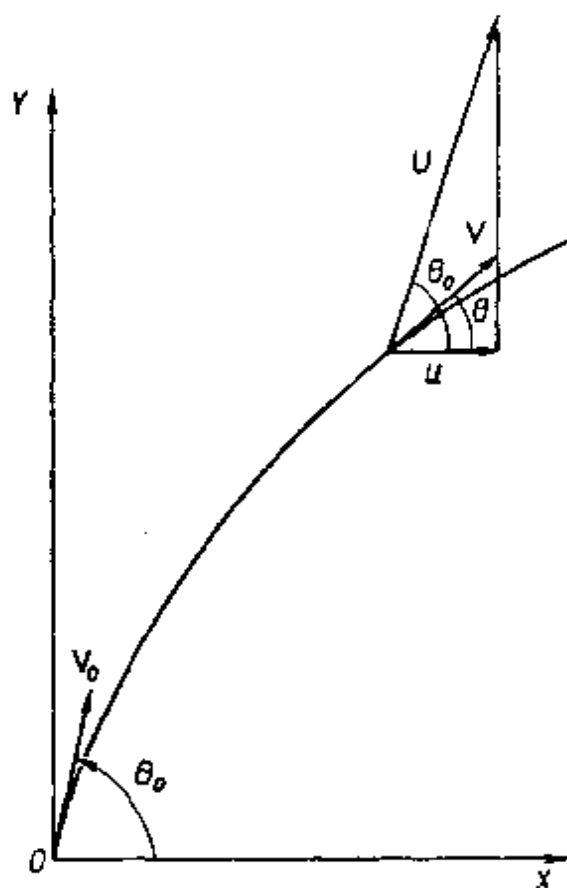


图 6.8 假速度矢量的构成

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{g}{c' \cos^2\theta} \cdot \frac{dU}{UF(U)} \quad (6.60)$$

经积分后得

$$\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\theta_0 = \frac{g}{c' \cos^2\theta_0} \int_{U_0}^U \frac{dU}{UF(U)} \quad (6.61)$$

上式右边只能取数值积分,实际上用假速度方法进行弹道计算时都是利用专门的函数表进行。为了便于编表和用它进行计算,引进下面的函数

$$I(U) = k_1 - \int_{U_H}^U \frac{2gdU}{UF(U)}$$

和
$$I(V_0) = k_1 - \int_{U_H}^{V_0} \frac{2gdU}{UF(U)}$$

式中 $V_0 = U_0$ 。方程(6.61)经变换后得

$$\operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}\theta_0 - \frac{1}{2c' \cos^2\theta_0} [I(U) - I(V_0)] \quad (6.62)$$

下面完成方程组(3.131)中其余几个方程的积分。先将方程

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{u}{g} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}$$

利用(6.60)式作变换,再积分得

$$t = \frac{1}{c' \cos\theta_0} \int_{V_0}^U \frac{dU}{F(U)}$$

引进函数

$$T(U) = k_2 - \int_{U_H}^U \frac{dU}{F(U)}$$

得

$$t = \frac{1}{c' \cos\theta_0} [T(U) - T(V_0)] \quad (6.63)$$

再取方程

$$\frac{dx}{d\theta} = -\frac{u^2}{g \cos^2\theta_0}$$

进行变量分离并考虑到(6.60)式,得

$$dx = -\frac{UdU}{c' F(U)} \quad (6.64)$$

积分后得

$$x = -\frac{1}{c'} \int_{V_0}^U \frac{UdU}{F(U)}$$

引进函数

$$D(U) = k_3 - \int_{U_H}^U \frac{UdU}{F(U)}$$

得

$$x = \frac{1}{c} [D(U) - D(V_0)] \quad (6.65)$$

再由一般的等式 $dy = \operatorname{tg} \theta dx$ 出发计算纵坐标。将 (6.62) 和 (6.64) 代入这个等式, 得

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{x}{2c' \cos^2 \theta_0} \left[\frac{A(U) - A(V_0)}{D(U) - D(V_0)} - I(V_0) \right] \quad (6.66)$$

式中

$$A(U) = k_4 - \int_{U_H}^U \frac{I(U)UdU}{F(U)}$$

为了按公式 (6.62), (6.63), (6.65) 和 (6.66) 计算 $\operatorname{tg} \theta, t, x, y$, 必须利用专门的函数表 $I(U), T(U), D(U)$ 和 $A(U)$ 。这些函数称为主要函数, 这些函数表格的入口变量为假速度 U , 表中函数值与对空气阻力所采用的关系 $F(U)$ 以及常数 U_H 和 k_i 有关, 其中 k_i 是考虑到函数的列表值在进行计算时应较为方便而选用的。为了简化主要函数的书写, 常只用第一个字母来表示, 字母的下标则表示所研究的点在弹道上的位置^[118]。

假速度方法可以用来计算弹道任意点上的运动特征, 其中包括顶点和落点。

对于弹道落点, 弹道纵坐标为零, 将 $y_c = 0$ 代入 (6.66) 式中, 经变换后得

$$\sin 2\theta_c = \frac{1}{c'} \left[\frac{A_c - A_0}{D_c - D_0} - I_0 \right] \quad (6.67)$$

想由此方程以显式给出落点假速度 U_c 显然是不可能的, 只能先给 U_c 一个大概值, 再用逐次逼近法对 U_c 求解, 在求得了 U_c 后就可得出落点的其它诸元

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{c'} (D_c - D_0) & t_c &= \frac{1}{c' \cos \theta_0} (T_c - T_0); \\ \operatorname{tg} \theta_c &= \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{1}{2c' \cos^2 \theta_0} (I_c - I_0) \end{aligned} \quad (6.68)$$

在弹道顶点 $\theta_s = 0$ 及 $\operatorname{tg}\theta_s = 0$, 则由 (6.62) 式经变换后得

$$I_s = c' \sin 2\theta_0 + I_0 \quad (6.69)$$

利用主函数表, 按 I_s 求得 D_s, T_s, A_s , 又按起始条件 $U_0 = V_0$ 求得 D_0, T_0, A_0 后就可应用公式 (6.63), (6.65), (6.66) 求得

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{1}{c' \cos \theta_0} (T_s - T_0) & x_s &= \frac{1}{c'} (D_s - D_0); \\ y_s &= x_s \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{x_s}{2c' \cos^2 \theta_0} \left[\frac{A_s - A_0}{D_s - D_0} - I_0 \right] \end{aligned} \quad (6.70)$$

在用逐次逼近法回避了直接解方程 (6.67) 后, 就可以求得落点诸元。根据等式 (6.65), 对于落点有 $D(U_c) = c' x_c - D(V_0)$, 故有 $U_c = f(c' x_c, V_0)$ 。注意到这一点, 可将方程 (6.67) 方括号内的表达式也看作这两个自变量的某个函数 f_0 , 即

$$\frac{A(U_c) - A(V_0)}{D(U_c) - D(V_0)} - I(V_0) = f_0(c' x_c, V_0)$$

于是等式 (6.67) 式为如下形式:

$$c' \sin 2\theta_0 = f_0(c' x_c, V_0) \quad (6.71)$$

函数 $f_0(c' x_c, V_0)$ 已编成了表, 根据起始条件可求得 $c' \sin 2\theta_0$, 再由这个值和 V_0 值查表即可得到 $c' x_c$, 然后计算出 x_c 。以类似的方式可以得到关于 $c' x_c$ 和 V_0 的其它几个函数^[119]

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\sin 2\theta_0 V_0^2}{x_c} & f_2 &= \frac{\operatorname{tg} |\theta_c|}{\operatorname{tg} \theta_0} & f_3 &= \frac{V_0 \sin \theta_0}{t_c}; \\ f_4 &= \frac{V_0 \cos \theta_0}{V_c \cos \theta_c} & f_5 &= \frac{x_s}{x_c} & f_6 &= \frac{y_s}{x_c \operatorname{tg} \theta_0} \end{aligned} \quad (6.72)$$

函数 f_0, \dots, f_6 称为辅助函数。除了 f_5 和 f_6 外, 这些函数可用于计算弹道任意点的运动特征, 这时乘积 $c' x$ 就没有下标。例如对于 x 的某个值, 坐标 y 就按下面的公式来计算:

$$y = x \operatorname{tg} \theta_0 \left[1 - \frac{f_0(c' x, V_0)}{f_0(c' x_c, V_0)} \right] \quad (6.73)$$

当 $\cos \theta$ 沿弹道变化很小并且可取 $H(y) \approx 1$ 时, 用函数 $F(U)$ 替代 $F(V)$ 对速度方程进行变换可以给出很好的弹道计算精度。对于近程高初速低伸弹道, 可取 $\cos \theta \approx \cos \theta_0 \approx 1$, 显然这时有 $\beta = 1, c' = c$ 和 $U = V$, 于是有

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{c} [D(V) - D(V_0)]; \\
y &= x \operatorname{tg} \theta_0 - \frac{x}{2c} \left[\frac{A(V) - A(V_0)}{D(V) - D(V_0)} - I(V_0) \right]; \\
t &= \frac{1}{c} [T(V) - T(V_0)] \quad (6.74)
\end{aligned}$$

在求解射角逆问题时,可根据条件 $y_c = 0$, 用下面的公式计算 θ_0 :

$$\sin 2\theta_0 = \frac{1}{c} \left[\frac{A(V) - A(V_0)}{D(V) - D(V_0)} - I(V_0) \right]$$

随着射角增大和初速减小,计算落点诸元的误差也增大。对误差的补偿用引入修正系数 β 的方法来实现。严格地讲,对于每一个弹道诸元应引进自己的修正系数 $\beta_x, \beta_y, \beta_\theta, \beta_z$, 等,但在实际计算中只用一个全射程补偿因子 β_x, β_z 应使得用假速度方法计算出的全射程与某个精确方法算出的全射程相等,这个系数 β 称为主要修正系数。

对于步兵武器和小口径火炮(在 $c > 1$ 的条件下)已就表头参数 $6^\circ, \dots, 30^\circ$ 和 $x_c = 1000, \dots, 7000\text{m}$ 编出了系数 β 值的表^[21, 119], 表中的系数在 0.97 到 1.06 的窄范围内变化。

对于大中口径火炮(在 $c < 1$ 的条件下), Я. М. 夏皮罗编出了表头参数为 $c = 0.2, \dots, 1.0; V_0 = 300, \dots, 1000\text{m/s}$ 和 $\theta_0 = 5^\circ, \dots, 60^\circ$ 的表。这些表是先利用数值积分计算弹道,再进行结果处理而编成的^[21, 29]。主要符合系数 β 实际上也是随速度和射角变化的(对于 $\theta_0 = 60^\circ$, 从 0.609 到 1.329 变化;对于 $\theta_0 = 5^\circ$, 从 0.984 到 1.039 变化), 在全射程准确符合的条件下,计算其它弹道诸元的误差为 5% (当 $\theta_0 = 30^\circ, \dots, 40^\circ$ 时)。

6.2.3 弹道相似和表解法

在实际弹道计算中常采用表解法,用此法可以求出弹道特征点,例如顶点和落点的弹道诸元。对于身管火炮弹丸的弹道诸元计算,弹道表的应用特别广泛,对于火箭的被动段弹道计算也可应用这些表。由方程组(3.129)和(3.131)可见,弹道诸元由三个参数确定:初速 V_0 , 弹道系数 c 和射角 θ_0 。经过大量计算,可编出以 V_0, c, θ_0 为表头的

弹道诸元表,表中通常有全射程 x_c 、弹道高 y_c 、全飞行时间 t_c 、落点速度 V_c 和落点弹道倾角 θ_c 。

为了计算高射弹道,除上述三个表头参数外还要补充第四个参数——飞行时间 t 。利用高射弹道表,对于确定的 V_0, c 和 θ_0 弹道,可求得相应于不同飞行时间 t_1, t_2, t_3 的弹道诸元 x_i, y_i, V_i 等。

弹道表用于计算标准气象条件下的弹道,如果利用弹道相似理论,则表的适用范围就可以扩大。法国学者 II. 郎日文建立了在弹道起点处气温、气压不相同的两条常质量弹丸弹道对应弹道诸元间的关系。假定气温与随高度线性变化的标准气温间恒相差一个常量,并且气压的变化服从大气铅直平衡假说,则可以证明,如果它们的三个参数 $c^* = c \frac{h_0}{h_{ON}}$; $V_{r0} = V_0 \sqrt{\frac{\tau_{ON}}{\tau_0}}$ 和 θ_0 相同,则两条弹道是相似的,这里 h_0 和 τ_0 分别是弹道起点处的气压和气温。两相似弹道的坐标 x 和 y 将与弹道起点处的气温 τ_{01} 和 τ_{02} 之比成比例,而飞行速度和时间则与弹道起点处气温比的方根成比例;弹道倾角相等;即

$$\begin{aligned} \frac{x_{i1}}{x_{i2}} &= \frac{\tau_{01}}{\tau_{02}} & \frac{y_{i1}}{y_{i2}} &= \frac{\tau_{01}}{\tau_{02}} & \frac{t_{i1}}{t_{i2}} &= \sqrt{\frac{\tau_{01}}{\tau_{02}}}; \\ \frac{V_{i1}}{V_{i2}} &= \sqrt{\frac{\tau_{01}}{\tau_{02}}} & \frac{\theta_{i1}}{\theta_{i2}} &= 1 \end{aligned} \quad (6.75)$$

郎日文公式常用于计算山地射击条件下身管武器系统弹丸的弹道,火箭被动段弹道等。“面对面”火箭被动段起点有时在很大的高度上,因此直接使用弹道表会带来很大的误差。我们将按弹道表查得的被动段水平距离用 x_2 表示,此段的起点诸元以下标 k 表示,而终点诸元以下标 k' 表示(见图 6.9)。根据弹道相似条件可得到如下公式:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\tau_k}{\tau_{ON}} \Phi_x(c^*, V_{rk}, \theta_k); \\ y_{i2} &= \frac{\tau_k}{\tau_{ON}} \Phi_y(c^*, V_{rk}, \theta_k); \\ \theta_{k'} &= \Phi_\theta(c^*, V_{rk}, \theta_k); \\ V_{k'} &= \sqrt{\frac{\tau_k}{\tau_{ON}}} \Phi_V(c^*, V_{rk}, \theta_k); \end{aligned}$$

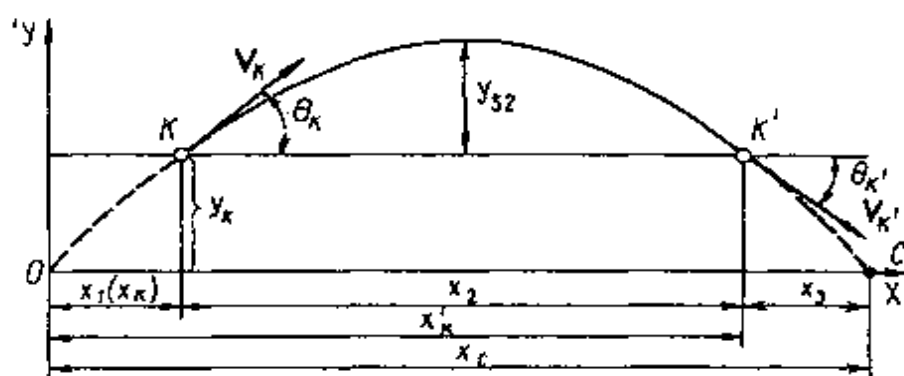


图 6.9 弹道划分成各计算段的示意图

$$t_k' = \sqrt{\frac{\tau_k}{\tau_{ON}}} \Phi_t(c^*, V_{rk}, \theta_k) \quad (6.76)$$

式中

$$c^* = c_n \frac{h_k}{h_{ON}} \quad V_{rk} = V_k \sqrt{\frac{\tau_{ON}}{\tau_k}}$$

在以上公式中,符号 V_k, θ_k, h_k 和 τ_k 分别表示弹道被动段起点(也即主动段末)处的速度、射角、气压和虚温。

对于被动段,弹道系数为 $c_u = \frac{id^2}{Q_0 - Q_r} \times 10^3$, 函数 $\Phi_x, \Phi_y, \Phi_\theta, \Phi_v$ 和 Φ_t 可根据表头参数 c^*, V_{rk}, θ_k 在通常的弹道表中查取。例如 $\Phi_x(c^*, V_{rk}, \theta_k)$ 就是对括号中指出的各量数值按弹道表查出的射程。弹道相似条件在气温随高度线性变化的范围内是严格正确的。

第七章 外弹道最优问题的求解

在一般情况下飞行器运动最优控制问题分成大致独立的两类子问题。

第一个问题是基准运动的最优规划问题,也就是在某些附加限制下确定飞行器满足某个预先给定要求的名义弹道问题。

第二个问题是确定最优控制问题。它的本质是通过数学研究找出某种意义上为最优的控制规律,而控制规律则将技术实现性条件所允许的控制作用与飞行器扰动运动的某些坐标联系起来,这些坐标应易于直接测出或者是可以作为任意时刻测量参数的函数。

基准弹道的最优规划问题如同最优运动状态的定量和定性分析、解的存在性和唯一性以及技术实现等问题一样,占据着外弹道学的中心位置,并且对于研究由火箭和炮弹对给定目标进行射击所得出的边值问题有明显作用。此时最一般的优化方法是经典的变分法。

经典变分法是基于以函数空间点表示极值曲线的方法。这个点的变分特性以欧拉方程来表征。为了求得在某种意义下的最优弹道,须在选择了拉格朗日乘子初值后求解边值问题。在多数情况下这是极为复杂的过程,所需的劳动强度与所得解的精度不相匹配。较简单合适的估计结果可用动态规划法求得,P. 别尔曼对这种方法作出了奠基性的贡献。这种方法就像苏联数学家流派的代表人物在Л. С. 庞德里雅金领导下、在类似于经典方法的一切条件下所详细研究过的“极大值原理”一样,属于非经典变分法。利用极大值原理求解的最优控制问题是综合问题的基础,也即属于飞行器运动最优控制的第二类问题。

外弹道优化属于单独一类问题,它是建立在寻找无约束、单变量光滑函数极值基础上的、最简单的基准运动规划极值问题。

§ 7.1 外弹道边值问题

7.1.1 外弹道两点边值问题

柯西问题(初值问题)的提出是以存在着满足 n 个初始条件的特解为前提的。与柯西问题不同,在两点边值问题中则是要将起点和终点的 n 个边界条件加到未知函数及其导数上。无控飞行器沿弹道轨迹飞行时,如果自炮弹或火箭与身管或定向器脱离力学联系的点开始的弹道准确击中了目标,则在大多数情况下就认为达到了飞行目的。尽管在这里讲的是无控飞行器的运动,但要实现两点边值仍然要求有相应的控制作用,适合于普通炮弹和无控火箭的这种控制是参数控制(也即控制运动的参数)。确切地说就是在这种情况下要得到所要求的弹道,需在弹道起点赋予弹丸必要的速度矢量。这个速度矢量可以以给定在选定的直角坐标系上的投影来确定,也可以以给定速度 V 的大小和矢量 V 对当地水平的倾角 θ (对于平面运动情况)来确定。带有参数控制的边值问题属于最简单的飞行力学两点边值问题。

对于用气动力控制的飞行器,除上述控制参数外还要补充空气舵的偏转角(控制函数)。后者的存在可使飞行器在飞行过程中实施机动,实现沿着与弹道学弹道不相同的弹道飞行。如果在飞行器上还安装有推进装置(如像在有控增程弹(V APC)的情况)并能进行调节(发动机推力增大或节流),则它与参数控制作用以及气动力控制机构所产生的作用一起可以实现任意的,理论上最复杂的基准运动最优方案。作为求解外弹道两点边值问题最简单方法的例子,我们研究一下常质量弹丸在抛物线理论假设下的运动。利用常质量质点在平面平行重力场中运动的标准方程,得到如下形式关系或表示的积分曲线族:

$$x = c_1 t + c_2 \quad y = c_3 t + c_4 - 0.5gt^2 \quad (7.1)$$

式中 $c_i (i = 1, \dots, 4)$ 为积分常数。由积分曲线族可以选出满足如下边界条件的曲线:

$$\begin{aligned} t = 0 \text{ 时} \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 0; \\ t = t_k = T \text{ 时} \quad x = x_k \quad y = y_k \end{aligned} \quad (7.2)$$

或中 T 取作参数。根据(7.1)和(7.2)式求得

$$x = x_k T^{-1} t \quad (7.3)$$

$$y = (y_k + 0.5gT^2)T^{-1}t - 0.5gt^2 \quad (7.4)$$

在按两点边值研究由(7.3)、(7.4)式描述的运动特性时,我们要注意到一个明显的性质,即通过这两个点可以作无数条抛物线弹道,其中每一条弹道都有它自己的、确定的特性。此时再注意到全飞行距离的表达式(6.5),显然,按照此式,同一距离 x_c 可以在满足 $V_0^2 \sin 2\theta_0 = \text{const}$ 的许多 V_0 和 θ_0 组合下达到,而其弹道特性则可在详细规定运动品质指标的条件下预先约定。例如,可以要求在保证最大或最小飞行高度(即弹道顶点的位置)、最小初速等条件下达到给定的射程 x_c 。判据的选择应由所要解决的应用问题的具体内容和目标约定来确定,随着其表达式的不同也就有各种不同的最终求解结果。

为了使下面的分析更加确定,我们从所研究的弹道族中选出一条能量消耗最小,也即初速最小的弹道^[35]。因为两点边值的两个端点被固定,故取作控制参数的唯一的量只能是运动时间 T 。在问题的这种提法下,利用时间 T 的任意性,将 V_0 看作是这个参量的函数。这样, V_0 作为 T 的函数可以表达成如下形式

$$V_0 = T^{-1}(x_k^2 + (y_k + 0.5gT^2)^2)^{1/2} \quad (7.5)$$

对于飞行时间有如下表达式:

$$T = \sqrt{2g^{-1}(x_k^2 + y_k^2)^{1/2}} \quad (7.6)$$

最小初速值则为

$$V_{0\min} = \sqrt{g(y_k + (x_k^2 + y_k^2)^{1/2})} \quad (7.7)$$

对于此速度,弹丸沿着满足边界条件(7.2)的两点弹道的运动规律具有如下形式:

$$x = t \sqrt{0.5gx_k^2(x_k^2 + y_k^2)^{-1/2}} \quad (7.8)$$

$$y = \frac{(y_k + (x_k^2 + y_k^2)^{1/2}) \sqrt{g}}{\sqrt{2(x_k^2 + y_k^2)^{1/2}}} t - 0.5gt^2 \quad (7.9)$$

这个运动是唯一的。

很自然地就产生了这样一个问题,是否对于描述飞行器状态的任何结构数学(微分)模型都可以得到边值问题的解呢?(也即满足给定性质的两点边值问题的解都存在和唯一吗?)

对这个问题的回答有如下著名的伯恩斯坦定理:如果微分方程

$$y'' = F(x, y, y') \quad (7.10)$$

的函数 $F, F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ 和 $F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}$ 对于任意有限的 y' 在每个有限点 (x, y) 上都是连续的,并且存在这样一个常数 $c > 0$ 和在平面 xy 的每一个有限部分上都是有界的函数

$$k_1 = k_1(x, y) \geq 0 \quad k_2 = k_2(x, y) \geq 0 \quad (7.11)$$

使得

$$\begin{aligned} F_{y'}(x, y, y') &> c; \\ |F(x, y, y')| &\leq k_1(y')^2 + k_2 \end{aligned} \quad (7.12)$$

则通过平面上具有不同横坐标($a \neq b$)的两个点 $A(a, a_1), B(b, b_1)$ 有一条也只有一条方程(7.10)的积分曲线 $y = \varphi(x)$ 。

7.1.2 在有控飞行边值问题中确定多点曲线问题的提法

对于有控飞行器,其飞行状态的数学模型一般是非线性的,其弹道是非弹道式(多点)曲线,相应的解的存在性与唯一性是更为复杂的问题。下述一种有控弹的弹道是这种曲线的典型例子:这种弹从运动着的运载器上起飞(这是起始点),在一个规定的中间点上转入水平弹道,作水平飞行直到另一个规定的点并在达到此点后俯冲到目标上(这是第四个规定的弹道点(终点))。

设已有描述此过程状态的数学模型,模型中采用广义坐标

$$q^{(n)} = f(t; q, q', q'', \dots, q^{(n-1)}) \quad (7.13)$$

边界条件为

$$x^{(r)}(a_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m; \quad r = 0, 1, \dots, r_k - 1) \quad (7.14)$$

式中

$$a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m < b$$

$$1 \leq m \leq n \quad \sum_{k=1}^m r_k = n$$

并设

$$b_{r_0+\dots+r_k+1} = b_{r_0+\dots+r_{k+1}+2} = \dots = a_k \quad (r_0 = 0)$$

在所研究的函数中引入

$$P_0(t) = 1, \dots, P_{n-j+1}(t) = \prod_{i=j}^n (b_i - t) \\ (j = 1, 2, \dots, n) \quad (7.15)$$

式中 \prod 为连乘号。

设

$$\varphi(t; y_1, \dots, y_n) = f[t; P_n(t)y_1, \dots, \sum_{i=1}^j c_{j-1}^{i-1}(b_i - \\ - t)P_{n-i}^{(i-1)}(t)y_1, \dots, \sum_{i=1}^n c_{n-1}^{i-1}(b_i - t)P_{n-i}^{(i-1)}(t)y_i] \quad (7.16)$$

则有在文献[15]中已证明了的如下定理成立：

设函数 $f(t, y, \dots, y_n)$ 在域 $a \leq t \leq b; -\infty < y_i < \infty (i = 1, 2, \dots, n)$ 中定义，函数(7.16)对时间 t 连续，并对变量 y_1, y_2, \dots, y_n 及系数 $L_1(t), \dots, L_n(t)$ 满足如下形式的李普希兹条件：

$$|\varphi(t, y_1, \dots, y_n) - \varphi(t; \eta_1, \dots, \eta_n)| \leq \sum_{i=1}^n L_i(t) |y_i - \eta_i| \\ (a \leq t \leq b, \quad L_i(t) \geq 0) \quad (7.17)$$

式中变量 η_i 像 y_i 一样定义在同一域中。如果满足不等式

$$\sup_{a \leq t \leq b} \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^n (i-1)! L_i(t) < 1$$

式中 \sup 表示函数的上界(即函数达到的极大值)，则边值问题(7.13)和(7.14)将有唯一确定的解。一系列与(7.13)和(7.14)条件相应的边值问题的解的存在性和唯一性定理都是此定理的结论。当 $m = 1$ 时它就变成了柯西问题。作为上述定理讨论的结尾我们指出，在许多情况下不是对函数 $\varphi(t, y_1, \dots, y_n)$ 检查李普希兹条件，而是直接对方程(7.13)的右边检查。

不难指出，上述定理可推广到定常系统情况。但飞行器、特别是

有控飞行器的数学模型是非定常的(见第2章),因此要在满足所述定理的提法下保证边值问题解的获得,在大多数情况下要采用系数“冻结”法或以某个平均值取代它。

利用方程右端函数对变量的连续性以及控制函数本身的连续性,可将定理的结论推广到系统模型系数变量值以及所取控制函数参数的足够小的邻域上。

§ 7.2 外弹道学逆问题

7.2.1 飞行动力学逆问题的概念

与在已知力系作用下确定弹道的基本(正面)问题不同,外弹道逆问题是按照给定的运动性质来确定力。这种提法下的力学逆问题概念早已由牛顿、拉格朗日、庞卡莱等人准确地表述过。

在火箭动力学的发展中曾需要解决变质量质点(物体)的动力学逆问题,最先在此领域内提出这个问题的当属于 Н. В. 密歇尔斯基。А. А. 柯斯莫杰米杨斯基(Космодемьянский)和 Д. Е. 阿哈茨门斯基(Охотимский)在此类问题的发展中作出了重要贡献。在柯斯莫杰米杨斯基的论述中,将变质量质点的动力学逆问题表述为按照给定的外力和运动规律,确定实现预定运动的质量变化规律。在一定意义下,А. А. 德米特里耶夫斯基在求解外弹道逆问题基础上确定常质量物体沿弹道轨迹运动的初条件的处理方法也可归结为柯斯莫杰米杨斯基论述的动力学逆问题^[35]。

在研究许多经典自动控制飞行理论问题时这个方向上的研究是极为有用的,巴尔巴钦(Е. А. Барбащин)、加利乌里(А. С. Галиуллин)、特别是克鲁吉柯(П. Д. Крутико)在解决此类问题方面作出了重大的贡献。逆问题的概念及其在分析力学、有控运动动力学以及在自动控制理论中的应用,从它们形成一门科学学科直到目前的状况在参考文献[58]中有详细的分析。在这里我们只限于讨论与火箭和炮弹直接有关的某些特殊问题。

7.2.2 基于逆问题概念的有控飞行动力学边值问题的求解

根据 B. T. 塔拉连科 (Тараненко) 按文献 [58] 方法所获得的结果, 我们研究如下边值问题: 取飞行器状态模型为如下形式:

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= mg(n_x - \sin\theta); \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= mg(n_y \cos\gamma - \cos\theta); \\ mV \cos\theta \frac{d\Psi}{dt} &= -mg n_y \sin\gamma; \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos\theta \cos\Psi; \\ \frac{dy}{dt} &= V \sin\theta; \\ \frac{dz}{dt} &= -V \cos\theta \sin\Psi; \\ m &= m_0 - |\dot{m}|t \end{aligned} \quad (7.18)$$

式中过载矢量的分量为 $n_x = \frac{1}{mg}[P \cos\alpha - X_a]$, $n_y = \frac{1}{g}[P \sin\alpha + Y_a]$ 。要求寻找控制函数 $P(t)$, $\alpha(t)$ 和 $\gamma(t)$, 使得飞行器从给定的起始 ($t = 0$) 状态

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 & y(0) &= y_0 & z(0) &= z_0; \\ \dot{x}(0) &= \dot{x}_0 & \dot{y}(0) &= \dot{y}_0 & \dot{z}(0) &= \dot{z}_0 \end{aligned} \quad (7.19)$$

在时间 $t_k = T$ 以内改变到所要求的终点 ($t_k = T$) 状态

$$\begin{aligned} x(t_k) &= x_T & y(t_k) &= y_T & z(t_k) &= z_T; \\ \dot{x}(t_k) &= \dot{x}_T & \dot{y}(t_k) &= \dot{y}_T & \dot{z}(t_k) &= \dot{z}_T \end{aligned} \quad (7.20)$$

在这种情况下, 利用标准的、按所选择的优化准则来取极值的方法, 上述问题是没有解析解的。但在动力学逆问题方法的基础上, 所讨论的边值问题的封闭形式解是可以获得的。

在以下的研究中引进某个满足边界条件的基准运动 (以上标 “*” 表示), 于是 $x^*(t)$, $y^*(t)$, $z^*(t)$ 就是对时间可两次微分的。设基准运动已给定, 我们对它要寻求控制函数 $P(t)$, $\alpha(t)$, $\gamma(t)$, 为此在原始方程 (7.18) 中以 $x^*(t)$, $y^*(t)$, $z^*(t)$ 取代 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, 然后消去中间变量。由于所有微分方程的右端表达式可以求得, 因而位于

方程左端的导数也就可以求得。注意到这一点,则可得到

$$\sin\theta = \frac{\dot{y}}{V} \quad \sin\Psi = \frac{-\dot{z}}{V\cos\theta} \quad V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad (7.21)$$

将速度的平方再对时间微分一次,得

$$\frac{1}{2V} \cdot \frac{d}{dt}(V^2) = \frac{1}{V}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) \quad (7.22)$$

由(7.21)式的前两个关系式得

$$\theta(t) = \arcsin(\dot{y}/V) \quad \Psi(t) = \arcsin(-\dot{z}/(V\cos\theta)) \quad (7.23)$$

这样,表达式(7.22)和(7.23)通过已知函数就确定了飞行器的三个状态变量,于是可认为 $\dot{V}(t)$, $\theta(t)$ 和 $\Psi(t)$ 已给定。

为确定过载分量和倾角 γ , 须先确定导数 $\dot{\theta}(t)$ 和 $\dot{\Psi}(t)$ 的值,而

$$\dot{\theta}(t) = \frac{V\ddot{y} - \dot{V}\dot{y}}{V^2\cos\theta} \quad \dot{\Psi} = \frac{(\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x})\cos^2\Psi}{\dot{x}^2} \quad (7.24)$$

在认为 $\dot{V}(t)$, $\dot{\theta}(t)$ 和 $\dot{\Psi}(t)$ 已知后,由方程(7.18)的头三个方程即得

$$\begin{aligned} n_x &= \sin\theta + \frac{\dot{V}}{g} & n_y &= \frac{1}{\cos\gamma} \left(\frac{V}{g} \dot{\theta} + \cos\theta \right); \\ \operatorname{tg}\gamma &= \frac{\dot{\Psi} \cos\theta}{\dot{\theta} + \frac{g}{V} \cos\theta} \end{aligned} \quad (7.25)$$

(7.25) 的最后一个关系式直接确定了一个未知函数 $\gamma(t)$, 另外两个未知函数 $P(t)$ 和 $\alpha(t)$ 就可由如下关系式求得:

$$\begin{aligned} P(t) &= \sqrt{(mgn_x + X_a)^2 + (mgn_y - Y_a)^2}; \\ \alpha(t) &= \operatorname{arctg} \frac{mgn_y - Y_a}{mgn_x + X_a} \end{aligned} \quad (7.26)$$

所导出的控制函数关系式原则上保证解决所提出的边值问题。在这种情况下,由于满足只进行有限次运算而不必积分飞行器运动方程的要求,故实际上就是得到了封闭形式的解^[58]。

7.2.3 在求解身管武器外弹道逆问题时射程参数控制的近似确定

经典的外弹道逆问题是要确定与弹道起点相应并在弹道终点满足给定值的运动的特征。特别是对于野战炮兵的弹道,作为基本特征

一般要给定全射程 x_c , 此外还有有效弹重(或全弹重)。落速 V_c 的模和落角 θ_c 通常要根据弹丸对目标具有必要的作用为条件来给定^[33]。对于常质量弹丸, 某些逆问题的近似解是已知的, 所有的这些解都以逐次近似法为前提。让我们来研究一下建立在假速度方法上的解(见第 6 章)。在这个方法中, 弹道的边界特征由四个基本方程相联系, 如果不去管飞行时间的确定, 则其余几个方程可写成如下形式:

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{1}{c'} [D(U_c) - D(V_0)]; \\ \sin 2\theta_0 &= \frac{1}{c'} \left[\frac{A(U_c) - A(V_0)}{D(U_c) - D(V_0)} - I(V_0) \right]; \\ \operatorname{tg} \theta_c &= \operatorname{tg} \theta_0 - (2c' \cos^2 \theta_0)^{-1} [I(U_c) - I(V_0)]\end{aligned}$$

应注意到 $c' = c\beta$; $U_c = V_c \cos \theta_c \cos^{-1} \theta_0$, 式中 β 为符合系数, 当 $c > 1$ 时按 x_c, θ_c 由已知表查得; 当 $c \leq 1$ 时则按 c, V_0, θ_0 查表求得。

如果给定 c, V_0, x_c 而要求确定 θ_0 , 可以得到一个最简单的解。在这种情况下在一次近似中必须取 $c' \approx c$ 并得到 $D(U_c) = cx_c + D(V_0)$, 根据 $D(U_c)$ 在表中查得 U_c , 再利用上面的第二个公式求 θ_0 。在二级近似中先按 c, V_0, θ_0 求得系数 β , 然后再求一次 θ_0 。

如果除了 c 和距离 x_c 外角度 θ_0 也给定而要求确定 V_0 , 这时为求解问题所必须的量也同样都有了。在这种情况下 V_0 可利用上列第一个和第二个公式用逐次逼近法求得。

如果除了 c 和 V_0 外, 还以 $x_c > x_{c\min}, V_c > V_{c\min}, \theta_c > \theta_{c\min}$ 形式的不等式给出弹道终点诸元 x_c, V_c 和 θ_c , 则确定 θ_0 的问题就要复杂一些。在这种情况下就要反复按第一和第二个公式用逐次逼近法确定 V_c , 并同时计算第一和第三个公式来检查不等式 $x_c > x_{c\min}, \theta_c > \theta_{c\min}$ 是否成立。与此类似的、由已知 c, V_0, θ_0, x_c 中的三个求另一个并确定 V_c, θ_c 值的问题, 利用辅助函数(6.71) 也很容易解决, 但此时在逐次逼近中应采用更准确一些的 c' 。

求解火炮系统外弹道逆问题的另一个方法就是利用含有落点参数 x_c, θ_c 和 V_c 的弹道表方法, 弹道表的入口参数为 c, V_0, θ_0 , 根据三个已知值 x_c, c 和 θ_0 或 V_0 (4 个量中的 3 个) 确定 V_0 或 θ_0 的问题就可以在表中利用线性反插值方法解决。

求解火箭增程弹(APC)的外弹道逆问题就要复杂得多。这时,确定最大射程角 θ_0 以及确定无控炮弹通过稠密大气层时弹道上火箭发动机的开车位置(H 点)是一个多参数复合问题。因为炮弹的全射程取决于 $V_0, \theta_0, c_0, V_H, \theta_H, y_H$ 、迎面阻力系数或弹道系数 c_{HK} 、推力 P 以及在 $H-K$ 段弹道上发动机工作的时间。从点 K 到与目标相遇的这一段弹道的距离取决于 V_K, θ_K, y_K 和 c_K ,因此总的距离将与十一个量以及两个函数 $c_x(M)$ 和 $P(y)$ 有关。显然,在这些条件下要选取一组确定最大射程的参数是极为困难的,解决此问题的唯一途径是计算弹道曲线族。

对于身管火炮武器,在射程不大的情况下全射程主要取决于弹道的第二段被动段,这就可使确定最大射程角的对比计算得到简化。计算中采用如下的假设:

$$V_K = V_H + V_{pu} \quad (7.27)$$

式中 V_{pu} 是按齐奥尔科夫斯基公式确定的速度; V_H 是发动机开车时的速度。而发动机开车瞬时是按弹道第二被动段具有最大射程角来选取,对于中大口径火炮以及不超过600m/s的速度 V_K ,取 $\theta_H = 45^\circ$ 不会有太大误差。

用

$$\alpha = \frac{Q_2}{Q_0} \quad (7.28)$$

表示火箭装药的相对重量,这里 Q_2 是火箭药重, Q_0 是起始弹重,则按齐奥尔科夫斯基公式有

$$V_{pu} = w \ln \left[\frac{1}{1-\alpha} \right] \quad (7.29)$$

如认为在火箭火药燃烧时弹形系数不变,则对于第二被动段有

$$c_K = c_0 \frac{1}{1-\alpha} \quad (7.30)$$

在所采用的假设下,最大射程角就可按下面的工作方法进行计算、再比较计算结果而求得:在给定的 c, V_0, α 下对不同的 θ_0 计算弹道的第一被动段直到倾角为 $\theta_H = 45^\circ$ 的点;再用起始条件 $V_K = V_H + V_{pu}$, $\theta_K = \theta_H = 45^\circ$ 和 c_K 计算第二被动段得到射程 x_c 。然后再改变 V_0, c_0 ,

α_0 重复进行这种计算。应用这种工作方法, A. A. 德米特里耶夫斯基编成了与发动机开车点相应的主要弹道诸元表, 在这些诸元下能获得接近于最大的射程^[33]。在此表中列有

火炮高角 —— θ_0 ;

发动机开车点的坐标 —— x_H 和 y_H ;

发动机开车的延迟时间或弹丸在第一被动段上运动的时间 —— t_H ;

发动机开车瞬时弹丸的速度 —— V_H 。

对以上每个量都编了一个独立的表, 而表中参量的范围: V_0 为 $50 \sim 600 \text{ m/s}$; c_0 为 $0.0 \sim 1.5$; α 为 $0.05 \sim 0.30$ 。

用于编表的支撑点是用数值积分法算出的, 表中列出的数据可用来作为比较不同弹道方案的出发点, 查表的工作简化为按三个表头参数进行线性插值。

需要指出的是, 在接近于表中所列射角的角度范围内, 曲线 $x_{c\max} = f(\theta_0)$ 只有慢坡极大值, 因此射角与表中给出的值有某些偏离是允许的, 因为这种偏离不会使射程明显减小。在 c_0, V_0 较小时 x_H, y_H 以及时间 t_H 的值都不大 (x_H, y_H 大约只有几十米或更小一些), 但为了统一起见, 在表中表头参数的全部范围内还是列出了这些数值。

§ 7.3 最简单的基准运动规划极值问题

7.3.1 弹道式轨道最优射角的确定

所研究的此类最优弹道的例子是具有最大射程或最小速度的弹道式轨道。以解析形式确定这种基准弹道的问题只有在常质量飞行器在同一平面或在中心引力场中不考虑外部介质阻力的初级运动模型条件下才能得以解决。

在对于抛物线弹道的第一种情况里, 这个问题已被最简单地解决。由公式(6.5)知, 最大射程 $x_c = x_{c\max}$ 在 $\sin 2\theta_0 = 1$ 时获得。由此条件求得的射角称为最大射程角 $\theta_{0\max}(\theta_0, x_{\max})$, 显然, 对于所研究的情

况它等于 45° 。

在椭圆理论里,在 $g \neq \text{const}$ 时对于中心角 φ_s 和起始矢径 r_H 有

$$\text{tg}\varphi_s = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_H V_H^2 \sin 2\theta_0}{g_{T_0} R_s^2 - r_H V_H^2 \cos \theta_H} \quad (7.31)$$

在取导数 $\frac{d}{d\theta_H}(\text{tg}\varphi_s)$ 并令它等于零后,就得到函数的极大值。经过不太复杂的变换,得

$$\sin \theta_{H\max} = \sqrt{\frac{g_{T_0} R_s^2 - r_H V_H^2}{2g_{T_0} R_s^2 - r_H}} \quad (7.32)$$

随着速度的增加,按(7.32)式确定的最大射程角将减小(相对于小初速情况下的 45° 而言),在第一宇宙速度的情况下将减至零(见图 7.1)。

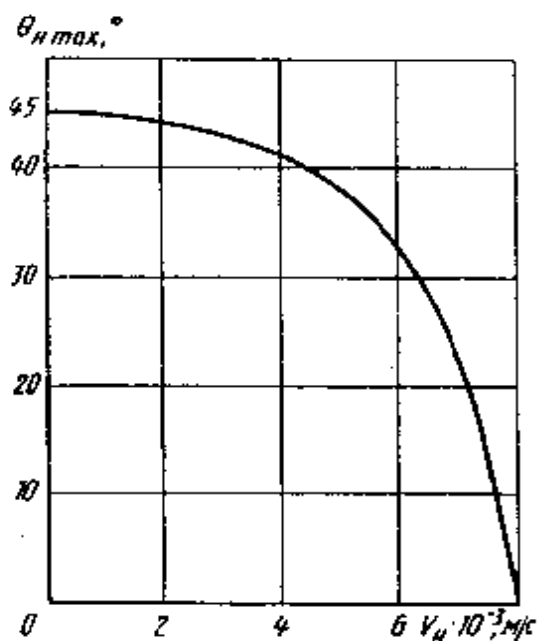


图 7.1 最大射程角 $\theta_{H\max}$ 与速度 V_H 间的关系

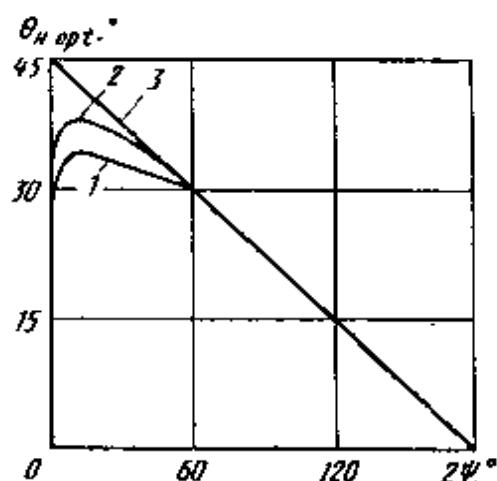


图 7.2 最佳起始角 θ_{Hopt} 与不同半径 r_H 值下距离角 ψ 间的关系
1— $r_H = 1.05R_s$;
2— $r_H = 1.02R_s$;
3— $r_H = R_s$ 。

已知 r_H , 要求解为达到给定飞行距离所必须的飞行器最小初速,这是一个很有趣的问题。在这种提法下此问题归结为寻找一个倾角 θ_{Hopt} , 以使速度 V_H 达到 $V_{H\min}$ 。

将方程(6.20)对 θ_H 求导,并令导数等于零,经变换后得

$$\theta_{Hopt} = \frac{1}{2} \arctg \left[\frac{\sin 2\psi}{r_H/R_s - \cos 2\psi} \right] \quad (7.33)$$

与倾角 $\theta_{H0\mu}$ 相应的弹道称为最小速度弹道。对于某个 r_H 值, 最优倾角 θ_0 与距离角 ψ 间的关系表示在图 7.2 上。

在考虑介质阻力的情况下要寻找相应的解就要采用搜索函数极值的数值方法, 最简单的方法就是对不同的 θ_0 值进行大量的弹道计算并画出 $x_c = f(\theta_0)$ 的图线。但应指出, 即使对于火炮武器, 由于弹丸在空气中运动, 最大射程角将不仅与初速有关, 还与包含在弹道系数中的口径、质量以及弹形有关。由图 7.3 知, 根据弹径的不同, 最大射程角可以在 $30^\circ \sim 55^\circ$ 的宽广范围内变化。对于有控和无控火箭增程弹 (APC) 以及火箭弹的复杂弹道, 要确定获得最大射程的参数组合还会遇到更大的困难。

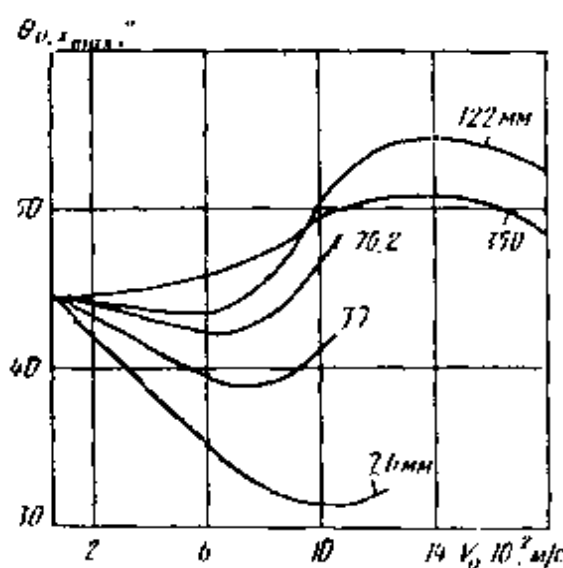


图 7.3 最大射程角 $\theta_{0,\max}$ 与初速及口径的大致关系

图 7.4 画出了一种复杂基准弹道主要特征变化规律的例子, 资料采自文献[131]。显然, 选择使这种情况下射程达到最大的参数、燃料消耗方式和弹道形状是极为困难的事。

7.3.2 有控尾翼弹水平滑翔的最大射程

在求解用有控弹来增大射程的问题时, 常要寻找保证被动段上水平或倾斜滑翔距离最大的条件。在这里主要根据文献[107]的结果和结论。八七二. 一种且第的品精四 即磁空如何确定弹方在整止(平

$$\frac{dy}{dt} = 0 \quad [y(t) = \text{const}] \quad (7.34)$$

在所研究的情况下, 弹丸在固定高度($y = \text{const}$)上运动的条件只有在 $d\theta/dt = 0$ 的情况下被满足, 由此得出在全部水平滑翔(ГП)时间内 $\theta = \theta_0 = \text{const}$ 。

于是由方程组的第二个方程(在 $\dot{\theta} = 0$ 时) 得出 $Y_a = mg$, 并因此而有

$$c_{y_a}^a \cdot a \frac{\rho V^2}{2} S = mg$$

在弹道被动段上由于飞行速度改变(减小), 为了满足这个等式就要调节空气舵的位置 $\delta(t)$ 来控制弹丸的角运动 $\alpha(t) \approx \vartheta(t)$ 。如果只研究稳定飞行状态, 则由

$$\begin{aligned} I_z \frac{d\dot{\theta}}{dt} &= M_z + M_{xyup} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.35)$$

得 $c_{y_a}^a \alpha_\sigma (x_T - x_n) = -c_{y_p}^p \delta (x_T - x_{n.p})$

由此得

$$\alpha_\sigma = - \frac{c_{y_p}^p}{c_{y_a}^a} \cdot \frac{(x_T - x_{n.p})}{(x_T - x_n)} \delta \quad (7.36)$$

式中 x_T 、 x_n 和 $x_{n.p}$ 分别为从弹尖算起的质心坐标、压心坐标和舵面压心坐标。将(7.36)式代入表达式 $c_{y_a}^a \cdot a \frac{\rho V^2}{2} S = mg$ 中, 不难获得速度 V 与俯仰舵偏转角之间的关系

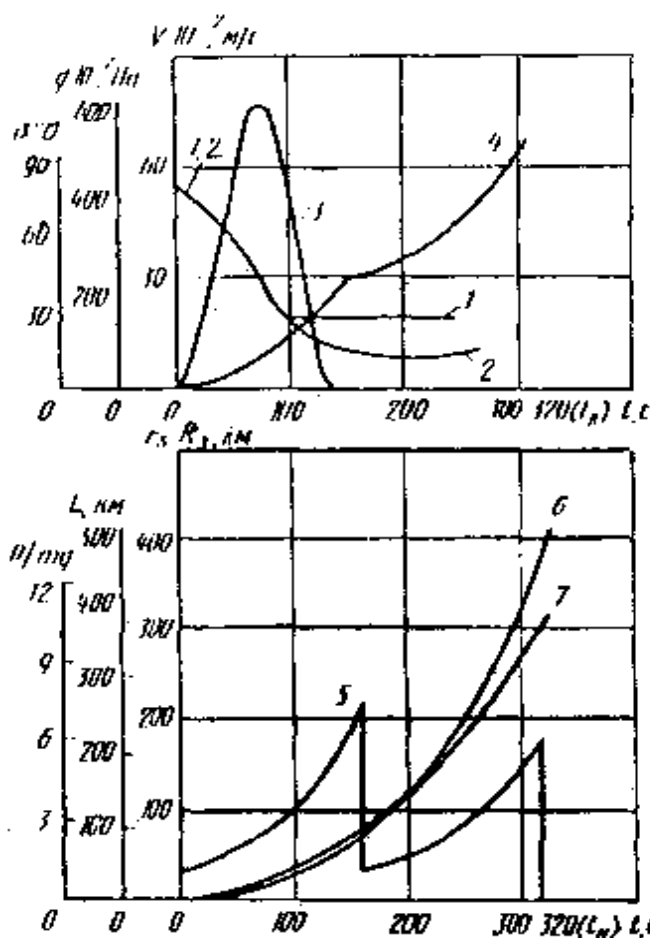


图 7.4 基准弹道主要特征变化的例子

1. 俯仰角 2. 弹道倾角 3. 速度头 4. 速度
5. 发动机工作产生的加速度 6. 射程

$$V^2 \delta = - \frac{2mgc_y^a}{\rho S c_{y_p}^b c_{y_a}^a} \cdot \frac{x_r - x_n}{x_r - x_{n,p}} \quad (7.37)$$

表达式(7.37)中的关系式 $c_y^a/c_{y_a}^b$ 是空气动力品质因素 K 和攻角的函数

$$\frac{c_y^a}{c_{y_a}^b} = 1 + \frac{1}{K} \alpha_a^2 \quad (7.38)$$

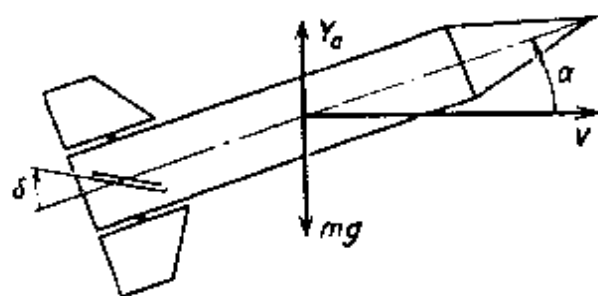


图 7.5 在弹道被动段上尾翼弹水平滑翔条件的确定

由于 α_a 随时间增大,这一比值

也随时间增大,但因 $K^{-1}\alpha_a^2 \leq 1$, 因此在一次近似中可将 $c_y^a/[c_{y_a}^b(x_r - x_n)]$ 取为常数。在速度变化较小的情况下, $c_{y_p}^b$ 和 $x_{n,p}$ 也可取为常量。因此

$$V^2 \delta = c_1 = \text{const} \quad (7.39)$$

注意到方程组(7.34)的第三个方程,积分得

$$x(t) = \int_0^t V dt \quad (7.40)$$

而由第一个方程又得

$$dt = - \frac{2m}{S \rho V^2 c_{x_a}} dV \quad (7.41)$$

取替代 $c_{x_a}(M) \approx c_{x_{acp}}, c_{x_{acp}}$ 为所研究水平飞行期间阻力系数的平均不变值,最后得

$$x_{r,n} = \frac{2m}{\rho S c_{x_{acp}}} \ln \frac{V_0}{V} \quad (7.42)$$

显然,舵偏角不是无限的,故在控制函数 $\delta(t)$ 上应加上 $\delta(t) \leq \delta_{np}$ 之类的限制。因此得

$$\begin{aligned} (x_{r,n})_{np} &= \frac{2m}{S \rho c_{x_{acp}}} \ln V_0 \sqrt{\frac{\delta_{np}}{c_1}} \\ &= \frac{2m}{S \rho c_{x_{acp}}} \ln c_2 V_0 \sqrt{\rho \delta_{np}} \end{aligned} \quad (7.43)$$

式中

$$c_2 = \sqrt{\frac{S c_{y_p}^b}{2mg} \cdot \frac{c_{y_a}^a}{c_y^a} \cdot \frac{x_r - x_{n,p}}{x_r - x_n}}$$

将(7.43)式对 ρ 微分,令导数等于零,得

$$1 - 2 \ln [c_2 V_0 \sqrt{\sigma_{\text{up}} \rho_{\text{opt}}}] = 0 \quad (7.44)$$

由此式不难求得量 ρ_{opt} 以及与之相应的最大水平飞行距离^[107]

$$(x_{r. n})_{\max} = \frac{2m}{S \rho_{\text{opt}} c_{x_{acp}}} \ln c_2 V_0 \sqrt{\rho_{\text{opt}} \delta_{\text{up}}} \quad (7.45)$$

§ 7.4 火箭动力学和外弹道学中的变分问题

7.4.1 变分计算和最优控制问题的提法和分类

对于任何经典变分计算或现代最优控制理论问题的提法都必须有三个要素:泛函(品质判据)、对于相坐标和控制的限制以及边界条件。

在所研究的问题中品质判据有三种可能的形式:

积分形式

$$J_1[x(t), u(t)] = \int_{t_0}^{t_k} f[t; x(t), \dot{x}(t), u(t)] dt \quad (7.46)$$

终端形式

$$J_2[x(t_k)] = f[t_0; x(t_0); t_k, x(t_k)] \quad (7.47)$$

混合形式(积分终端形式)

$$J_3[x(t), u(t)] = J_1[x(t), u(t)] + J_2[x(t_k)] \quad (7.48)$$

加在问题上的限制通常有两种可能的形式:一种是以等式或不等式表示的泛函关系式:

$$\begin{aligned} G_1[t; x(t), \dot{x}(t), u(t)] &= 0; \\ G_2[t; x(t), \dot{x}(t), u(t)] &< 0 \end{aligned} \quad (7.49)$$

而且(7.49)型式的泛函关系式与相坐标矢量以及控制矢量的导数无关,称为相位限制。

另一种型式是非泛函关系式

$$u(t) \in U \quad u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\max} \quad (7.50)$$

边界条件以在状态空间中划出某个数集的方式给出,弹道的两

个端点 $x(t_0)$ 和 $x(t_k)$ 当然应属于这个数集。在这种情况下通常区分为

固定边界条件:这时在区间 $[t_0, t_k]$ 两个端点上相应的值是固定的,并且区间本身也是固定的。

自由右端或左端:这时区间 $[t_0, t_k]$ 的两个端点是固定的,但对相轨迹不附加条件。

周期性边界条件:这时区间 $[t_0, t_k]$ 是固定的,而两终端上的相坐标值取为相等,即 $x(t_0) = x(t_k)$ 。

在最一般的提法下,大多数变分计算和最优控制问题的数学表述如下:

要求寻找泛函 J 的下(上)界

$$J[x(t), u(t)] \rightarrow \inf(\sup) \quad (7.51)$$

其中所有的 $x(t), u(t)$ 应满足限制条件

$$\begin{aligned} G_1[t; x(t), \dot{x}(t), u(t)] &= 0; \\ G_2[t; x(t), \dot{x}(t), u(t)] &\leq 0 \end{aligned} \quad (7.52)$$

$$u(t) \in U \quad (7.53)$$

以及边界条件

$$(t_0, x(t_0); t_k, x(t_k)) \in \Gamma \quad (7.54)$$

在这种情况下,如果泛函(7.51)是积分型的,则问题(7.51)~(7.54)称为拉格朗日问题;如果泛函(7.51)是终端型的,则称迈耶问题;如果泛函是混合型的,则相应的问题称为波尔兹问题。经典变分问题的主要特点是假定其中所有的函数都是光滑的。

但在最优控制问题中,对函数 $u(t)$ 作这样的假设在大多数情况下是不合法的,其中非泛函约束的存在起了极大的作用。例如,给出了约束(7.53)的集合 U 本身就是一个离散集。根据所述的原因,与变分计算问题不同,在最优控制问题中标准的假设是:对于所有的变量连续而对变量 t 和 x 光滑。

求解最优控制问题的主要方法是庞德里雅金的极大值原理和别尔曼的动态规划法,这两个方法都得到了广泛的应用。极大值原理的

本质在于,它在求解不等式型式约束的变分问题时,可在从 $x_0(t_0)$ 出发并通过点 $x(t_k)$ 的所有弹道中分离出一些特殊的、孤立的并满足优化条件的弹道。在利用极大值原理求解带活动终端的变分问题时,在许多情况下会碰到必须研究所谓的特解(非正则情况)问题,此特解相应于在由方程

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (7.55)$$

描述的空间 x 超曲面的某个点上,梯度矢量 $\text{grad} f(x)$ 变为零。

在最优控制理论中,与哈密顿-雅可比理论相类似的动态规划法的基础是别尔曼方程。推导别尔曼方程的基本原理是,无论系统的初始状态及与其相应的初瞬时解如何,随后的解相对于由前一次解得到的状态而言更满足优化条件。这个原理称为别尔曼最优化原理^[34]。最优化原理实际上断定了某个最优化弹道的一段也是最优弹道。这个论断与极小值的任何一部分也是某个问题的极小值是等价的,这在哈密顿-雅可比理论中已得到证明,根据这个论断可以认为,动态规划方法的基本原理对于许多波尔兹有限积分泛函极值问题都是正确的。

上述最优控制问题的现代求解方法无论是从它原则上能得到封闭解这个意义上讲,还是从根据它可用数值方法获得未知解这个意义上讲,都是一种解析方法。

由于飞行器原始的状态模型本质上是非线性的,因此在未作显著的简化时,在绝大多数情况下要想得到传统意义上的解析解是不可能的,因而就引起了广泛利用最优化数值方法的必要性。数值方法分成直接方法和间接方法,其中第一种方法要预先编出计算泛函 $J[x(t), u(t)]$ 连续变化(增大、减小)的迭代程序;第二种方法建立在利用所选泛函极值条件的基础上。在后一种情况里,就要将原始问题变化成含有 $2n + k$ 个方程的方程组的边值问题(式中 n 是方程组的阶数, k 是对相坐标引入限制的辅助函数的个数)。前面研究过的解析方法也属于间接方法,在利用这种方法的时候很自然地归结为必须求解边值问题。

7.4.2 基于经典变分法的基准运动最优规划

下面我们研究使飞行器沿倾斜直线通过的路程为最大的燃料随时间消耗(火箭质量变化)规律这个问题。在这个问题中,燃料(总质量为 m_T) 随时间消耗的规律即为控制函数,它不直接与飞行器通过的路程相联系。为了表述最优化泛函(积分品质指数)应预先完成下面的辅助变换。利用方程组(3.75)的第一个方程,令其中的 $\theta = \theta_0 = \text{const}$,将推力表示成如下的简化关系式 $P = -\frac{dm}{dt}W_e$,而将空气阻力以泛函关系式 $R_a(V, \rho)$ 给定,于是

$$m \frac{dV}{dt} = -\frac{dm}{dt}W_e - R_a(V, \rho) - mg \sin \theta_0 \quad (7.56)$$

令火箭质量按关系式 $m = m_0 u$ 变化,式中 u 是表征发动机工作过程中火箭质量变化(燃料消耗)的函数。在方程(7.56)中将 m 的值代之以 $m_0 u$,再将各项除以 m_0 ,得

$$u \frac{dV}{dt} = -\frac{du}{dt}W_e - \frac{R_a(V, \rho)}{m_0} - ug \sin \theta_0$$

引入火箭沿与水平面成 θ 倾角直线飞行的微元路程 ds , 将

$$\frac{dV}{dt} = V \frac{dV}{ds} \quad \frac{du}{dt} = u'_V V \frac{dV}{ds}$$

代入(7.56)式中,改写此方程为

$$uV \frac{dV}{ds} = -Vu'_V W_e \frac{dV}{ds} - \frac{R_a(V, \rho)}{m_0} - ug \sin \theta_0 \quad (7.57)$$

经整理和积分后得到如下泛函表达式:

$$J[x(t), u(t)] = s[u(V)] = \int_V^{V_0} \frac{(u + u'_V W_e)V dV}{ug \sin \theta_0 + m_0^{-1} R_a(V, \rho)} \quad (7.58)$$

下面求解的目标是寻找这样一个函数 $u(V)$, 它的积分值表达了火箭在运动过程中质量变化的规律,并且它使火箭的路程最大。对于所研究的例子,研究工作是在如下边界条件下进行的:在 $t = 0$ 时速度 $V = V_0$, 并且 $u = 1$, 也即质量 $m = m_0$; 在 $t = t_k$ 时相应地有 $V = V_k$, $m = m_k$ 。

上述变分计算问题可利用确定泛函极值条件的欧拉微分方程求解。如果函数 $y(x) = F[x, y(x), y'_x]$ 在 x_1 到 x_2 范围内是单值、三次可微的, 函数本身及其偏导数是连续的, 则要泛函的变分等于零, 未知函数必须满足如下欧拉方程:

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial y'_x} \right] = 0 \quad (7.59)$$

对于我们现在的情况, 上式中的 F 就是泛函(7.58)中的被积表达式, 这是必要条件。欧拉方程的积分曲线 $y = y(x, c_1, c_2)$ 称为极值曲线, 只有在极值曲线上才可能达到泛函的极值。为了确定可以获得极值的曲线就要积分欧拉方程, 而任意常数则由边界条件 $y(x_1) = y_1$ 和 $y(x_2) = y_2$ 确定。

实际求解的困难在于欧拉方程是一个二阶方程, 它的解并不总是可以以有限形式获得的。即使解具有有限形式, 那还要补充考察它的充分性。对于每一个具体问题, 都要预先规定或在某种程度上补充确定寻求极值的函数的类型。

对于含有独立变量的若干个函数的泛函, 求极值的工作就大为复杂化, 在这种情况下就要组成并求解方程个数等于函数个数的微分方程组, 根据以上所述, 我们来求泛函(7.58)的极值。对于现在所研究的情况, 被积函数具有如下形式:

$$F = \left[\frac{(u + u'_v W_c) V}{u g \sin \theta_0 + m_0^{-1} R_a(V, \rho)} \right] \quad (7.60)$$

为了将其代入欧拉方程中, 我们先来求

$$\frac{\partial F}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial u'_v} \quad \text{和} \quad \frac{d}{dV} \left[\frac{\partial F}{\partial u'_v} \right]$$

注意到 $V, R_a(V, \rho)$ 以及与 V 有关的函数 u 都是变量, 则有

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{V}{u g \sin \theta_0 + m_0^{-1} R_a(V, \rho)} - \frac{(u + u'_v W_c) V g \sin \theta_0}{[u g \sin \theta + m_0^{-1} R_a(V, \rho)]^2};$$

$$\frac{\partial F}{\partial u'_v} = \frac{W_c V}{u g \sin \theta + m_0^{-1} R_a(V, \rho)};$$

$$\frac{d}{dV} \left[\frac{\partial F}{\partial u'_v} \right] = \frac{W_c}{u g \sin \theta + m_0^{-1} R_a(V, \rho)} -$$

$$\frac{W_e V (m_0^{-1} \frac{\partial R_a(V, \rho)}{\partial V} - u'_v g \sin \theta)}{[u g \sin \theta + m_0^{-1} R_a(V, \rho)]^2}$$

将上面 n 个方程的右端代入(7.59)式中,经替换后再将各项乘以 $[u g \sin \theta + m_0^{-1} R_a(V, \rho)]^2$,得

$$u = u(V) = \frac{1}{m_0 W_e g \sin \theta_0} \left[(V - W_e) R_a(V, \rho) + V W_e \frac{\partial R_a(V, \rho)}{\partial V} \right] \quad (7.61)$$

将上式右端的第二个和数展开得

$$V W_e \frac{\partial R_a(V, \rho)}{\partial V} = \frac{V W_e S}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial V} \left[c_{x_a} \left[\frac{V}{a} \right] \rho V^2 \right]$$

注意到 ρ 仅仅是高度的函数,故经微分后得

$$V W_e \frac{\partial R_a(V, \rho)}{\partial V} = \frac{V^2}{2} W_e S \rho(y) \left[2 c_{x_a} \left[\frac{V}{a} \right] + V \frac{\partial c_{x_a} \left[\frac{V}{a} \right]}{\partial V} \right]$$

将此式代入(7.61)式中就得到确定产生路程极大值的函数 $u(V)$ 的极值方程:

$$u(V) = \frac{\rho(y) V^2 S}{2 m_0 W_e g \sin \theta_0} \left[c_{x_a} \left[\frac{V}{a} \right] (V + W_e) + V W_e \frac{\partial c_{x_a} \left[\frac{V}{a} \right]}{\partial V} \right] \quad (7.62)$$

所得到的关系式还不能直接用来解决我们的问题,这是因为所得到的函数取决于火箭的运动速度,而大多数方程组是以独立变量 t 来描述火箭运动的。

取变量代换 $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dV} \cdot \frac{dV}{dt} = u'_v \frac{dV}{dt}$, 对(7.56)式作相应的代换后得

$$(u + u'_v W_e) \frac{dV}{dt} = - [u g \sin \theta_0 + m_0^{-1} R_a(V, \rho)]$$

由此得

$$t = \int_V^{V_0} \frac{(u + u'_v W_e) dV}{u g \sin \theta_0 + m_0^{-1} R_a(V, \rho)} \quad (7.63)$$

为了求积分,必须将(7.61)和导数 u'_v 代入上式右边,而 u'_v 同样也可事先从(7.61)式获得:

$$u'_V = \frac{d}{dV}(u) = \frac{1}{m_e W_e g \sin \theta_0} \left[R_a(V, \rho) + V \frac{\partial R_a(V, \rho)}{\partial V} + VW_e \frac{\partial^2 R_a(V, \rho)}{\partial V^2} \right] \quad (7.64)$$

像过去一样,取 $g = \text{const}$, 由 (7.63) 式得 t 的表达式

$$t = \frac{V_0 - V}{g \sin \theta_0} + \frac{2W_e}{g \sin \theta_0} \int_V^{V_0} \frac{\left\{ (V + W_e) c_{x_a} \left[\frac{V}{a} \right] + \frac{1}{2} [V^2 + 4VW_e] (\alpha_{x_a} \left[\frac{V}{a} \right] / \partial V) + W_e \frac{V^2}{2} \left[(\partial^2 c_{x_a} \left[\frac{V}{a} \right]) / \partial V^2 \right] \right\} dV}{V(V + 2W_e) c_{x_a} \left[\frac{V}{a} \right] + W_e V^2 \left[\alpha_{x_a} \left[\frac{V}{a} \right] / \partial V \right]} \quad (7.65)$$

在给定了具体的空气阻力函数 $R_a(V, \rho)$ 后, (7.56) 式中的积分就可用数值积分法求得, 于是就确定了关系式 $t(V)$ 。将具体函数 $R_a(V, \rho)$ 的偏导数 $\partial R_a(V, \rho) / \partial V$ 代入 (7.61) 式中即可求得关系式 $u(V)$ 。有了 $u(V)$ 和 $t(V)$ 后就可确定待求的、使火箭飞行路程最长的火箭质量变化关系式 $u(t)$ 。

如果令 $\rho = \text{const}$ 并对 $R_a(V, \rho)$ 引进一个解析函数, 使表达式 (7.63) 可取积分, 则关系式 $t(V)$ 就可有具体的形式。例如在文献 [53] 中将空气阻力中的空气密度 ρ 和迎面阻力系数 c_{x_a} 取为常数, 则有

$$R_a(V) = \frac{1}{2} S \rho V^2 c_{x_a} = BV^2; \\ \frac{\partial R_a(V)}{\partial V} = 2BV \quad \frac{\partial^2 R_a(V)}{\partial V^2} = 2B$$

在 (7.63) 式的积分号下作函数替换, 则得

$$t = \frac{1}{g \sin \theta_0} \left[V_0 - V + W_e \int_V^{V_0} \frac{2(V + W_e)}{V(V + 2W_e)} dV \right] \quad (7.66)$$

积分上式后得到联系火箭运动速度与时间的著名公式

$$t = \frac{1}{g \sin \theta_0} \left[V_0 - V + W_e \ln \frac{V_0(V_0 + 2W_e)}{V(V + 2W_e)} \right] \quad (7.67)$$

通常假定, 边界点位于确定的线或确定的面上, 在这种情况下, 为在求解欧拉方程时确定任意常数, 就要补充条件, 这些条件称为贯

截条件。

泛函的极值可在带角点的极值曲线上达到,各角点之间隔开的光滑曲线是欧拉方程的积分曲线,角点的坐标应满足维尔斯特拉斯-埃特曼(Эрдман)附加条件。

如能将飞行器运动模型进行简化,则求得解析解的可能性也就自然地增加了。作为例子,我们来研究如何确定推力矢量对水平面最佳倾角 ϑ 的问题。这个问题可表述如下,寻找一个 ϑ 角变化的函数 $\vartheta(t)$,使火箭飞行时间最短。我们将此变分问题的求解归结为起点和终点两坐标 x_0, y_0 及 x_k, y_k 给定,或具有固定终端的迈耶型问题。

为便于求解,利用火箭质心纵向运动的简化模型,其运动微分方程组如下:

$$\begin{aligned}\dot{V}_x &= \frac{P}{m} \cos \vartheta & \dot{V}_y &= \frac{P}{m} \sin \vartheta - g; \\ \dot{x} &= V_x & \dot{y} &= V_y\end{aligned}\quad (7.68)$$

以上方程是在 $R_a(V, \rho) = 0$ 的假设下求得的。此外还认为 $P = \text{const}$, $g = g_0 = \text{const}$ 。与此方程组相应的约束方程为

$$\begin{aligned}G_1 &= \dot{V}_x - \dot{V}_T \cos \vartheta = 0 & G_2 &= \dot{V}_y - \dot{V}_T \sin \vartheta + g = 0; \\ G_3 &= \dot{x} - V_x = 0 & G_4 &= \dot{y} - V_y = 0\end{aligned}\quad (7.69)$$

式中, $V_T = P/m_0$ 。

根据所述的条件,我们写出一般问题的基本泛函

$$J[x(t), u(t)] = T[u[\vartheta]] = \int_0^t dt \quad (7.70)$$

利用熟知的求解方法,先列出辅助泛函 $\int_0^t F^* dt$ 的被积函数表达式

$$F^* = 1 + \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \lambda_3 G_3 + \lambda_4 G_4 \quad (7.71)$$

函数 $x, y, V_x, V_y, \vartheta, \lambda_i$ 是未知的。为了求得辅助泛函的极值,我们要建立欧拉方程,为此要先求得建立方程所需要的如下偏导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial F^*}{\partial x} &= 0 & \frac{\partial F^*}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial F^*}{\partial V_x} &= -\lambda_3 & \frac{\partial F^*}{\partial V_y} &= -\lambda_4; \\ \frac{\partial F^*}{\partial \dot{x}} &= \lambda_3 & \frac{\partial F^*}{\partial \dot{y}} &= \lambda_4 & \frac{\partial F^*}{\partial \dot{V}_x} &= \lambda_1 & \frac{\partial F^*}{\partial \dot{V}_y} &= \lambda_2;\end{aligned}$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \vartheta} = \dot{V}_T(\lambda_1 \sin \vartheta - \lambda_2 \cos \vartheta) \quad \frac{\partial F^*}{\partial \dot{\vartheta}} = 0 \quad (7.72)$$

按照(7.59)式,欧拉方程将具有如下形式:对于未知函数 $x(t)$, $\dot{\lambda}_3 = 0$;对于未知函数 $y(t)$, $\dot{\lambda}_4 = 0$;对于未知函数 $V_x(t)$, $V_y(t)$ 分别有 $\dot{\lambda}_1 = -\lambda_3$, $\dot{\lambda}_2 = -\lambda_4$;对于未知函数 $\vartheta(t)$, $\lambda_1 \sin \vartheta - \lambda_2 \cos \vartheta = 0$ 。求解这几个方程得到如下关系式:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= c_1 + c_3 t & \lambda_2 &= c_2 + c_4 t & \lambda_3 &= -c_3 & \lambda_4 &= -c_4; \\ \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{c_2 + c_4 t}{c_1 + c_3 t} \end{aligned} \quad (7.73)$$

记 $c_1^* = c_1/c_4$, $c_2^* = c_2/c_4$, $c_3^* = c_3/c_4$, 则得

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{c_2^* + t}{c_1^* + c_3^* t} \quad (7.74)$$

下面研究边界条件变化的两个特殊情况。如果在上述一般问题条件下对极值曲线的右端在 x 方向上无限制,则这种特殊问题可这样来表述:在给定的有限纵坐标 y_k 下,寻求推力矢量对水平的倾角变化函数。在这种情况下,极值曲线的起点与给定的 x_0, y_0 值相应,极值曲线的终点此时被纵坐标 y_k 所限制,显然 $V_{y_k} = 0$,但没有 $\dot{x} - V_x = 0$ 这个约束,因而 $\lambda_3 = -c_3 = 0$ 。由(7.73)式得到的未知函数 $\vartheta(t)$ 将有如下形式:

$$\operatorname{tg} \vartheta = c_2^{**} + c_4^{**}(t) \quad (7.75)$$

式中

$$c_2^{**} = c_2 c_1 \quad c_4^{**} = c_4 c_1$$

第二个特殊情况是 k 点的两个坐标都不固定,则(7.69)式中的两个约束 $\dot{x} - V_x = 0$ 和 $\dot{y} - V_y = 0$ 都是多余的;故量 $\lambda_3 = \lambda_4 = -c_3 = -c_4 = 0$,而由(7.73)得到的未知函数 $\vartheta(t)$ 则将有下面的形式:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\dot{\lambda}_2}{\dot{\lambda}_1} = \frac{c_2}{c_1} = \operatorname{tg} \vartheta_0 = \text{const} \quad (7.76)$$

下面再举一个问题求解的例子,此问题的条件表述如下:寻求一个 ϑ 角变化的函数 $\vartheta(t)$,使得弹道主动段终点的速度最大。显然,主

要的判据是弹道主动段终点的速度 V_k 。为了简化问题,通常取主动段终点速度的平方 $V_k^2 = V_{x_k}^2 + V_{y_k}^2$ 或者

$$J[x(t), u(t)] = - \int_0^{t_k} 2(V_x \dot{V}_x + V_y \dot{V}_y) dt = \int_0^{t_k} F dt \quad (7.77)$$

作为基本泛函。

考虑到约束(7.69),我们写出辅助泛函的被积函数如下:

$$F^* = -2(V_x \dot{V}_x + V_y \dot{V}_y) + \lambda_1(t)(\dot{V}_x - \frac{P}{m} \cos \vartheta) + \lambda_2(t)(\dot{V}_y - \frac{P}{m} \sin \vartheta + g) \quad (7.78)$$

组成欧拉方程所必须的各导数如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^*}{\partial V_x} &= -2\dot{V}_x & \frac{\partial F^*}{\partial V_y} &= -2\dot{V}_y & \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F^*}{\partial \dot{V}_x} \right] &= -2\dot{V}_x + \lambda_1; \\ \frac{\partial F^*}{\partial \dot{V}_x} &= -2V_x + \lambda_1 & \frac{\partial F^*}{\partial \dot{V}_y} &= -2V_y + \lambda_2 & \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial F^*}{\partial \dot{V}_y} \right] &= -2\dot{V}_y + \lambda_2; \\ \frac{\partial F^*}{\partial \vartheta} &= \frac{P}{m} (\lambda_1 \sin \vartheta - \lambda_2 \cos \vartheta) & \frac{\partial F^*}{\partial \dot{\vartheta}} &= 0 \end{aligned} \quad (7.79)$$

则欧拉方程则取如下形式:

$$\dot{\lambda}_1 = 0 \quad \dot{\lambda}_2 = 0 \quad \lambda_1 \sin \vartheta + \lambda_2 \cos \vartheta = 0 \quad (7.80)$$

解此方程,得

$$\lambda_1 = c_1 \quad \lambda_2 = c_2 \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_2}{c_1} = \operatorname{tg} \vartheta_0 = \text{const} \quad (7.81)$$

与(7.76)式相比可见,所得到的结果与在飞行时间优化并且自由右端极值弹道情况下的结果是一样的,其弹道形状如图 7.6 上所示。

7.4.3 根据极大值原理确定飞行器的最优控制运动

我们先讲如下一个简单的问题,即要求建立一个允许的控制 $u(t)$, $t_0 < t < t_k$ (也即要确定一个实现水平飞行的火箭燃料秒流量 $u(t) = -dm/dt$),使得在不固定 $t_0 - t_k$ 的条件下泛函 $J[x(t), u(t)]$

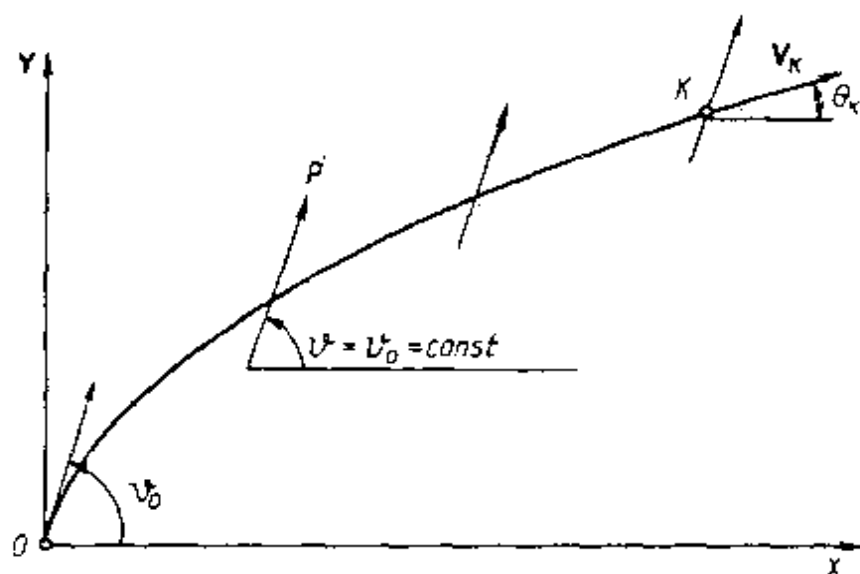


图 7.6 在飞行器推力矢量方向不变情况下的最优弹道

$= - \int_{t_0}^k V_x dt$ 达到极值。

作如下的假设：自由落体加速度不变； $\vartheta = \theta = \theta_0 = 0$ ；重力与旋翼产生的升力相抵消；飞行高度不变（ $\rho = \text{const}$ ）

空气阻力表示成如下形式：

$$\begin{aligned} R_a(V) &= (c_{x_{a0}} + A c_{y_a}^2) \frac{\rho V_x^2}{2} S \\ &= \frac{1}{2} c_{x_{a0}} \rho S V_x^2 + c_{y_a}^2 \frac{\rho^2 V_x^4}{4} S^2 \frac{2A}{\rho S} \cdot \frac{1}{V_x^2} = B V_x^2 + C \frac{Y_a^2}{V_x^2} \end{aligned} \quad (7.82)$$

式中 A 是一个系数，通常称为极线图“推开”系数^[9]，在超声速飞行条件下

$$A \approx [4 \sqrt{M^2 - 1}]^{-1}$$

而推力为

$$P = - \frac{dm}{dt} W_e = u W_e$$

于是状态方程将有如下形式：

$$m \frac{dV_x}{dt} = u W_e - X_a \quad \frac{dm}{dt} = -u \quad (7.83)$$

式中控制值 $u(t)$ 的集合 U 由下面的不等式给出：

$$0 \leq u \leq u_{\max} \quad (7.84)$$

并且 u_{\max} 是固定的常量。

在利用极大值原理时,寻求优化方程的算法可归结如下^[75]:除了依靠积分泛函变换扩展的基本状态模型

$$\frac{d}{dt}x_p(t) = f[t; x_p(t), u(t)] \quad (7.85)$$

外,在研究中还引入了关于辅助(共轭)变量的附加微分方程组

$$\frac{d}{dt}\psi_i = - \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_i(x_p, u)}{\partial x_{p_i}} \psi_i \quad (7.86)$$

再建立所谓的庞德里雅金函数 $(\psi, x_p, u) = \sum_{i=0}^n \psi_i f_i(x_p, u)$, 其上限等于哈密顿算子(哈密顿函数)

$$(\psi, u_p, u) = \sup_{u \in U} H(\psi, x_p, u)$$

并且总是将函数矢量 $\psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n]^T$ 规格化,例如令 $\psi_0 = -1$ ($\dot{\psi}_0 = 0$)。假定函数 \mathcal{H} 是关于 $u(t)$ 的凸函数,因而有优化方程存在,并且导数

$$\left. \frac{\partial(\psi(t), x_p(t), u(t))}{\partial u} \right|_{u=u(t)} = 0 \quad (7.87)$$

可以用解析形式表示,于是求解原始优化问题就变成求解如下哈密顿方程组的边值问题:

$$\frac{d}{dt}x_p(t) = \left[\frac{\partial}{\partial p} \right]^T \quad \frac{d}{dt}\psi(t) = - \left[\frac{\partial}{\partial x_p} \right]^T \quad (7.88)$$

在所研究的原始方程(7.83)中,控制 $u(t)$ 以线性方式处于状态方程之中,因此,在注意到方程组(7.83)和泛函表达式 $J[x(t), u(t)] = - \int_{t_0}^t V_x dt$ 后,重新写出

$$(\psi, x_p, u) = -\psi_0 V_x - \psi_1 X_a V_x^{-1} + (\psi_1 W_e m^{-1} - \psi_2)u \quad (7.89)$$

而共轭方程组为

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= 0; \\ \dot{\psi}_1 &= \psi_0 + \psi_1 \frac{\partial X_a / \partial V_x}{m}; \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_2 \left[\frac{u W_e - X_a}{m^2} + \frac{\partial X_a / \partial m}{m} \right] \end{aligned} \quad (7.90)$$

再注意到约束(7.84),则得出,如果 $u(t)$ 为极值形式的控制,则它将

根据由条件(7.87)确定的转换函数 $\sigma_k(t)$ 的符号取 $u(t) = u_{\max}$ 和 $u(t) = 0$ 值。就其物理意义而言, $\sigma_k(t)$ 是对第 k 个控制变量的转换函数, 是一个标量, 它确定了 $u_k(t)$ 从 $u_{k\min}$ 值转换到 $u_{k\max}$ 或相反情况下的条件。因为 $\sigma_k(t)$ 是连续的, 故当其符号每次改变时都要通过零点。注意到(7.90)式, $d\mathcal{H}/(du) = 0$, 则可写出

$$\sigma(t) = \psi_1(t) \frac{W_e}{m_0} - \psi_2(t) \quad (7.91)$$

以及

$$\begin{aligned} u(t) &= u_{\max} && \text{如果 } \sigma(t) > 0; \\ u(t) &= 0 && \text{如果 } \sigma(t) < 0 \end{aligned} \quad (7.92)$$

下面来研究在一个非零时间间隔上与 $\sigma(t)$ 变为零相应的特殊控制出现的可能性, 为此要算出导数 $[d\sigma(t)]/dt$ 在 $\sigma(t) = 0$ 时的值。此时我们将从对于极值 $u(t)$ 有 $\mathcal{H}(\psi(t), x(t), u(t)) = 0$ 出发, 由(7.91)式解出表达式 ψ_2 代入(7.90)式中, 得

$$-\psi_0 V_x(t) - \psi_1 X_a[t; V_x(t)] V_x^{-1} + \sigma(t) u(t) = 0 \quad (7.93)$$

从上面这个关系式得出, 如果 $\sigma(t) = 0$, 则在 $X_a[t; V_x(t)] > 0$ 时 $\psi_0 \neq 0$, 而当 $V_x(t) > 0, m(t) > 0, \psi_0 < 0$ 时按照(7.93)式有 $\psi_1(t) > 0$ 。再注意到

$$\left. \frac{d\sigma(t)}{dt} \right|_{\sigma(t)=0} = \psi_1(t) \Lambda[V_x(t), m(t)] \quad (7.94)$$

式中

$$\Lambda[V_x(t), m(t)] = \frac{3W_e + V_x}{V_x^2 m^2} \left[B \frac{W_e + V_x}{3W_e + V_x} V_x^4 - m^2 g^2 C \right]$$

则得出结论: 导数的符号与表达式 $\Lambda[V_x(t), m(t)] = 0$ 的符号是一致的。

特殊点都在满足

$$\Lambda[V_x(t), m(t)] = 0 \quad (7.95)$$

的曲线上, 这是因为只有在这条曲线上才可以在非零时间间隔上出现 $\sigma(t) = 0$ 。此曲线的方程为如下形式的关系式:

$$m = V_x^2 \sqrt{\frac{B}{cg^2} \cdot \frac{W_e + V_x}{3W_e + V_x}} \quad (7.96)$$

此曲线将 $V_x > 0, m > 0$ 的象限分成如下的两个域:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\sigma(t)}{dt} \right|_{\sigma(t)=0} &= 0 & (V_x(t), m(t)) &\in \Delta; \\ \left. \frac{d\sigma(t)}{dt} \right|_{\sigma(t)=0} &< 0 & (V_x(t), m(t)) &\in \text{域 I}; \\ \left. \frac{d\sigma(t)}{dt} \right|_{\sigma(t)=0} &> 0 & (V_x(t), m(t)) &\in \text{域 II} \end{aligned} \quad (7.97)$$

由于函数 $\sigma(t)$ 是连续的, 故在符号改变的情况下要通过零点, 而且也正是在该瞬时符号发生转换, 并且在每一个域内只有一种转换; 在域 I 中由 $u_{\max} \rightarrow 0$; 在域 II 中由 $0 \rightarrow u_{\max}$ 。在所研究的问题中, 与量 X_a 相比发动机的推力愈大, 则出现特殊控制的概率也就越大。

以上所研究的封闭解当然只有在极个别的、足够简单的情况下才有可能获得。在绝大多数主要的、具有普遍意义的实际问题中将只能建立数值计算方法, 根据电子计算机数值计算结果来寻找原始泛函的极值。

下面我们以例子来说明这一点。设要研究控制弹道式飞行器在大气中飞达最大和最小距离的问题, 而加在用于估计飞行器机动性的空气动力品质上的约束为 $c_{y_a}^{\min} < c_y(K_{\max}) < c_{y_a}^{\max}$ 。

现作如下假设: 设飞行器在中心引力场 $g = g_0 \left[\frac{R_s}{R_s + y} \right]^2$ 的铅直平面内运动, 空气密度沿高度按指数规律变化 ($\rho = \rho_0 e^{-\beta y}$), 迎面阻力系数由关系式 $c_{x_a} = c_{x_{a0}} + 0.25 M^{-1} c_{y_a}^2 \approx c_{x_{a0}} = \text{const}$ 确定。

要求确定控制参数 $\alpha(t)$ 的变化规律, 使得在约束

$$\frac{c_{y_a}^a \cdot a_{\min} \rho V^2 S}{2mg} < |n_y| \leq \frac{c_{y_a}^a \cdot a_{\max} \rho V^2 S}{2mg} \quad (7.98)$$

下, 泛函

$$J[x(t), u(t)] = \int_{t_0}^{t_k} \frac{R_s}{R_s + y} V \cos \theta dt \quad (7.99)$$

达到极小值。

引入如下的状态变量记号: $V = x_1, \theta = x_2, y = x_3, x = x_4$, 将一些常量合并成几个系数

$$k_1 = 0.5 c_{x_{a0}} \rho_0 S m^{-1} \quad k_2 = 0.5 \rho_0 S m^{-1}$$

则状态方程就取如下形式:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1 x_1^2 \exp(\beta x_3) - g \sin x_2 \\ \dot{x}_2 &= k_2 x_1 u \exp(\beta x_3) + \left[\frac{x_1}{R + x_3} - \frac{g}{x_1} \right] \cos x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1 \sin x_2 \\ \dot{x}_4 &= \frac{R}{R + x_3} x_1 \cos x_2\end{aligned}\quad (7.100)$$

式中控制量 $u = c_{y_a}^a \cdot \alpha = c_{y_a}$; 而 $R_s = R = 6371 \text{ km}$ 。

在所取的记号下, 泛函(7.99)改写成如下形式:

$$J[x(t), u(t)] = \int_{t_0}^{t_k} \frac{R}{R + x_3} x_1 \cos x_2$$

边界条件给定为如下形式:

$$t_0 = 0 \quad x_1(t_0) = x_{10} \quad x_2(t_0) = x_{20} \quad x_3(t_0) = x_{30} \quad x_4(t_0) = 0$$

t_k 是自由的, 而 $x_3(t_k) = R$; $x_1(t_k), x_2(t_k), x_3(t_k)$ 是可变的。

在一般情况下, 最优弹道可以既含有满足 $\partial n_y / \partial c_{y_a} \neq 0$ 这种通常条件的弹道段, 也可以含有特殊控制 $\partial n_y / \partial c_{y_a} = 0$ 的弹道段。

对于通常条件, 函数 \mathcal{H} 可写成如下形式:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \psi_0 \left[\frac{R}{R + x_3} x_1 \cos x_2 \right] - \psi_1 [k_1 x_1^2 \exp(\beta x_3) + g \sin x_2] \\ &\quad + \psi_2 \left[k_2 x_1 u \exp(\beta x_3) + \left[\frac{R}{R + x_3} - x_1^{-1} g \right] \cos x_2 \right] \\ &\quad + \psi_3 [x_1 \sin x_2]\end{aligned}\quad (7.101)$$

而与它相应的共轭方程组为

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_0 &= 0; \\ \dot{\psi}_1 &= -\psi_0 \frac{R}{R + x_3} \cos x_2 + \psi_1 k_1 x_1 \exp(\beta x_3); \\ &\quad - \psi_2 \left[k_2 u \exp(\beta x_3) + \left[\frac{1}{R + x_3} - x_1^2 g \right] \cos x_2 \right] \\ &\quad - \psi_3 \sin x_2 + 2k_2 g_0^{-1} x_1 u \frac{\partial \mathcal{H} / \partial c_{y_a}}{\partial n_y / \partial c_{y_a}} \exp(\beta x_3); \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_0 x_1 \frac{R}{R + x_3} \sin x_2 + \psi_1 g \cos x_2 \\ &\quad + \psi_2 \left[\frac{x_1}{R + x_3} - g x_1^{-1} \right] \sin x_2 - \psi_3 x_1 \cos x_2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_3 = & \psi_0 x_1 \frac{R}{(R+x_3)^2} \cos x_2 - \psi_1 \left[\frac{2g}{R+x_3} \sin x_2 \right. \\ & \left. + x_1^2 \beta k_1 \exp(\beta x_3) \right] + \psi_2 \left[\frac{x_1}{(R+x_3)^2} \cos x_2 - \frac{2g \cos x_2}{x_1(R+x_3)} \right. \\ & \left. + x_1 \beta k_2 u \exp(\beta x_3) \right] - \beta k_2 g_0^{-1} x_1 u \frac{\partial \mathcal{H} / \partial x_{y_a}}{\partial n_y / \partial x_{y_a}} \exp(\beta x_3)\end{aligned}\quad (7.102)$$

式中

$$\frac{\partial \mathcal{H} / \partial x_{y_a}}{\partial n_y / \partial x_{y_a}} = \psi_1 g_0 x_1^{-1}$$

注意到对于原始方程组的边界条件,写出

$$\psi_{1k} = \psi_{2k} = 0 \quad (7.103)$$

关系式(7.103) 现在就是方程(7.102) 的边界条件。

由条件 $\psi_{0k} = -1$ 和 $\dot{\psi}_0 = 0$ 就得出在全弹道上 $\psi_0 = -1$ 。因为终点时间不固定,故 $\mathcal{H} = 0$, 在给出了 ψ_{10} 和 ψ_{20} 并且令(7.101) 式等于零后就可以求得 ψ_{30} 。因而所提出的变分问题就变成对于常微分方程组(7.100) 和(7.102) 的边值问题,可以用逐次逼近法求解。此时最大飞行距离与 \mathcal{H} 取级小值 $\mathcal{H} \min_{x_{y_a}}$ 相应而最大飞行距离与 \mathcal{H} 取极大值 $\mathcal{H} \max_{x_{y_a}}$ 相应。最优控制函数 $u^0(t)$ 的符号取决于变量 $\psi_2(t)$ 的符号,也即

$$u^0(t) = c_{y_a}^a \alpha_{extr} \text{sign} \psi_2(t) \quad (7.104)$$

如果 $\alpha(t)$ 取零值,则 $c_{y_a} = 0$, 导数 $\partial n_y / \partial x_{y_a}$ 也等于零,那么这就成了 $|n_y| = |n_y|_{extr}$ 的特殊情况。在 $c_{x_{a0}} = \text{const}$ 的条件下这种特殊段就归结为有限个数具有特殊控制的孤立点,这是因为在这种情况下弹道学轨道不可能是等过载的。对于所讨论的问题,确定特殊情况下极值的必要条件以及寻找与它相应的最优控制的某些问题在参考文献[47] 中作了研究。

7.4.4 用动态规划法计算滑翔飞行器最大飞行斜距弹道

动态规划方法的基础是假设存在一个具有最优化泛函 $V[x(t)$,

$u(t)]$ 极值意义的函数 $V[x(t), t]$, 也即

$$V[x(t), t] = \min_{u(t) \in U} J[x(t), u(t)] \quad (7.105)$$

设将此泛函给定为(7.48)式类型的混合型泛函:

$$J_3[x(t), u(t)] = \int_t^{t_k} f[t; x(t), u(t)] dt + \varphi[t_k; x(t_k)]$$

则有

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{V}(x(t), t)}{\partial t} = & \min_{u(t) \in U} \{f[x(t), u(t), t] + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{V}(x(t), t)}{\partial x_i} F_i[x(t), u(t), t]\} \end{aligned} \quad (7.106)$$

或写成一般形式:

$$\min_{u(t) \in U} \left\{ H \left[\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}, V, u(t) \right] \right\} = 0 \quad (7.107)$$

这在形式上是哈密顿-雅可比方程的写法。符号 H 表示哈密顿函数, 并且对于以(7.46)形式给出的判据以及在以状态方程 $\frac{d}{dt}x(t) = F(x(t), u(t), t)$ 右边形式加上的约束下, 哈密顿函数具有如下形式:

$$H = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} F + f + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t}$$

式中 $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} F$ 是与(7.106)式中第二个被加数相等的标量积。

动态规划方法最有可能用于求解离散系统(时间离散系统)的最优控制实际问题。这个方法实际上是个多步(多级)计算过程, 它在复杂系统优化问题中的应用只是在现代计算技术广泛应用的基础上才成为可能。

在所研究的时间间隔上, 有控系统的运动应该用一组能以有限差分代替的微分方程来描述, 也就是跟通常数值积分时的情况一样, 导数值可用函数的一阶差分与有限小的自变量变化区间的比值来代替。这个方法归结为分步设计多步过程, 但在过程的每一步上要考虑到全过程的发展, 而只作出一步优化, 也就是在现在取解时要考虑到将来。但是任何控制过程都有最后的第 n 步, 在这一步上解的取法就与将来无关。因此在这一步上就应选择能获得最高效果的控制。设计了这一步后, 再接着它设计倒数第二的 $(n-1)$ 步, 同样再接续

设计第 $n-2$ 步等等。最后,这个从终点到起点的“拆开”过程要回到系统状态的起点 $x(t_0) = x_0$ 。

为了设计第 n 步,必须知道系统在第 $(n-1)$ 步上的状态,如果它是未知的,那么应以过程的特征为根据,对系统在这一步上的可能状态取这样或那样的假设,然后对每个假设在下一步上取最优控制,这种控制称为条件优化。

设有某个 n 步过程要设计,并设在 $(n-1)$ 步系统的可能状态为 $x_{n-1,1}, x_{n-1,2}, \dots, x_{n-1,m}$,而在最后的一步上对每一个状态可以找到 m 个条件优化控制 $u_{n,1}^*(x_{n-1,1}), u_{n,2}^*(x_{n-1,2}), \dots, u_{n,m}^*(x_{n-1,m})$ 。这样,第 n 步就可以认为已设计好了。在第 $(n-1)$ 步上也要作类似的处理,只不过必须先选好条件优化控制,然后在第 $(n-1)$ 步上考虑所选择的的条件优化控制等等。对于第一步(区别于其它所有各步)不作系统可能状态的假定,这是因为状态 $x(t_0)$ 是已知的,对于它的最优控制,要在考虑到对于第二步的所有条件最优控制的基础上进行选择。经过在自然的方向上,也即离开起始点的方向上从 x_0 向 $x(t_k)$ 的推移,就可以获得对整个过程的最优控制。

对于求解按飞行距离最优的滑翔弹道问题,与条件最优控制相应的可能弹道族可以用 VH 坐标平面上的曲线表示,这里 H 是飞行高度, V 是飞行速度。设从 x_0 开始的运动每一步在图上向右(V 增加)或向上(H 增加)移动一格,“方格步”的大小确定了飞行方案编制的精度。但必须强调指出,这里研究的标准格式数值算法需要大量的计算时间,如果利用文献[120]中详细研究过的处理方法,则可从本质上减小计算量,对于求解所讨论问题的进一步叙述将以该文献工作的结果为基础。

设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

那么,为了从位置 a_{m1} 依不同途径每一步向右或向上移动一格,逐渐

转到位置 a_{1n} , 并使路途中所遇到的所有元素之和最小, 则必须建立辅助矩阵 B , 其中的每个元素按如下的递推关系式算出:

$$b_{ij} = a_{ij} + \min[b_{i,j+1}, b_{i-1,j}] \quad (7.108)$$

因为矩阵 B 的行、列数应等于矩阵 A 的行列数, 则有

$$b_{1j} = a_{1j} + b_{1,j+1} \quad b_{0j} = 0 \quad (7.109)$$

$$b_{in} = a_{in} + b_{i-1,n} \quad b_{i,n+1} = 0 \quad b_{1n} = a_{1n} \quad (7.110)$$

(7.108) 的递归法则假定了在计算矩阵 B 时应从终点位置向起点位置移动。

在矩阵

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

中, 元素 b_{ij} 采用如下的迭代公式依次确定

$$b_{ij} = \min_{(\max)} \left[a_{i,j+1} + b_{i,j+1}, \beta_{ij} + b_{i-1,j} \right] \quad (7.111)$$

式中 a_{ij} 表示飞行器在固定高度上当 M 数改变 ΔM 时通过的距离; β_{ij} 为飞行器以不变的 M 数滑翔当高度改变 ΔH 时通过的距离。现设飞行器的运动满足如下的数学模型:

$$m \frac{dV}{dt} = -X_a - mg \sin \theta;$$

$$mV \frac{d\theta}{dt} = Y_a - mg;$$

$$\frac{dH}{dt} = V \sin \theta;$$

$$\frac{dx}{dt} = V \quad (\cos \theta \approx 1)$$

我们来分析一下所提出的、确定最优飞行方案的求解过程。此最优方案应保证在有控条件下, 考虑到 $c_{ya}^* \cdot \alpha$ 中攻角的变化获得最大滑翔斜距。为了表述极大化泛函, 必须先作如下的变换^[120]:

注意到 $dt = dH(V \sin \theta)^{-1}$, 将第一个方程取变量代换并作变换后得

$$\frac{dV}{dH} = gn_x \left[\frac{dH}{dt} \right]^{-1} - \frac{g}{V} \quad (7.112)$$

分离变量后积分之,得

$$x = \int_{V_0 H_0}^{V_k H_k} \left[\frac{V}{gn_x} dV + \frac{1}{n_x} dH \right]$$

于是

$$J[x(t), u(t)] = \int_{V_0 H_0}^{V_k H_k} \left[\frac{V}{gn_x} dV + \frac{1}{n_x} dH \right] \quad (7.113)$$

而要求寻找使泛函(7.113)达到极大值的曲线 $\varphi(V, H) = 0$ 。如所有可能的 $\varphi(V, H) = 0$ 曲线在域 V, H 中都以折线代替,而这种折线的每一段要么是 V 不变,要么是 H 不变,则最优弹道就处在逼近这种折线的一类曲线中。为了求得它,必须确定所有的 α_{ij} 和 β_{ij} 。为此要将整个 MH 域划分成两个边分别平行于 M 轴和 H 轴的小矩形,这里 $M = V/a$,算出每个小矩形的每个边上的增量 Δx 。在其水平边上 $H = \text{const}, \Delta H = 0$;

$$\alpha_{ij} = \Delta x = \frac{a^2 M \Delta M}{gn_x} \quad (7.114)$$

式中 a 是声速。

轴向过载的定义式为

$$n_x \approx \frac{-X_a}{mg} = - [c_{x_a^0} + A c_{y_a^2}] \frac{\rho V^2}{2mg} S \quad (7.115)$$

考虑到条件 $Y_a = mg$,得

$$c_{y_a} = \frac{2mg}{\rho V^2 S} = \frac{2mg}{\rho M^2 a^2 S}$$

作替换后得

$$n_x = - \left[c_{x_a^0} + A \left[\frac{2mg}{\rho M^2 a^2 S} \right]^2 \right] \frac{\rho M^2 a^2 S}{2mg} \quad (7.116)$$

于是

$$\alpha_{ij} = - \frac{2\Delta M mg}{gS\rho M \left[c_{x_a^0} + A \left[\frac{2m}{\rho M^2 a^2 S} \right]^2 \right]} \quad (7.117)$$

在矩形的垂直边上 $\Delta M = 0$,因此

$$\beta_{ij} = \Delta x = \frac{\Delta H}{n_x} \quad (7.118)$$

尽管这个表达式不是 θ 的显函数,但显然有 $\beta_{ij} = f(\theta)$,这是因为有

$$\frac{dV}{dt} = g(n_x - \sin\theta) = 0 \quad (7.119)$$

所讲的情况在补充了方程

$$mV \frac{d\theta}{dt} = Y_a - mg\cos\theta = 0 \quad (7.120)$$

的条件下很容易回避,因为此方程反映了飞行器在相应的折线段上滑翔时不仅具有不变的速度,而且速度矢量对当地水平面有个很小的、不变的倾斜角。由(7.119)和(7.120)式得 $n_x = \sin\theta, n_y = \cos\theta$;

$n_z = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1$ 。但另一方面又有

$$n_z = \sqrt{c_{x_a}^2 + c_{y_a}^2} \frac{\rho V^2 S}{2mg}$$

因此有 $1 = \sqrt{c_{x_a}^2 + c_{y_a}^2} \frac{\rho V^2 S}{2mg}$

由此得

$$V^2 = \frac{2mg}{\rho S \sqrt{c_{x_a}^2 + c_{y_a}^2}} \quad (7.121)$$

在(7.121)中代入

$$c_{x_a} = c_{x_a0} + A c_{y_a}^2 \quad \text{或即} \quad c_{y_a}^2 = \frac{c_{x_a} - c_{x_a0}}{A}$$

最后求得

$$V^4 = \frac{4m^2 g^2 / S^2}{\rho^2 [c_{x_a}^2 + A^{-1}(c_{x_a} - c_{x_a0})]} \quad (7.122)$$

由(7.122)式得出关系式

$$n_x = \frac{k_1}{2} - \sqrt{\frac{k_1^2}{4} - k_2} \quad (7.123)$$

式中

$$k_1 = \frac{\rho V^2 S}{2Amg}$$

$$k_2 = 1 + \frac{c_{x_a0}}{A} \left[\frac{\rho V^2 S}{2mg} \right]^2$$

现在,确定最优飞行方案的问题就归结为在多阶段过程的每一步上选择控制,此控制应与分阶段按(7.123)式算出的两个 n_x 值中最小的一个相应。在参考文献[120]中列举了说明所讲算法工作特点的计算结果。

第八章 火箭和弹丸的角运动

在研究弹丸的角运动时,假设弹丸的质心运动参数是已知的,并假设这些参数是在质心沿弹道平面运动、在全部飞行时间里弹轴与弹道切线一致的条件下算出的。

角运动分析最重要的问题是建立火箭和炮弹的飞行稳定性条件,由此就可顺利地解决保证弹丸稳定正确飞行的问题,以及在弹道上所要求的角运动状态是否已建起来了的问题,这既与射击精度有关,也与火炮和火箭系统总的作战效果有关。

§ 8.1 旋转稳定弹相对质心的运动

8.1.1 在仅有翻转力矩作用时弹丸的角运动

弹丸相对质心的运动方程可以从一般空间运动方程获得。在 4.3.1 节中已指出,从 B. C. 普加乔夫形式的一般方程组可以得到关于 δ_1 和 δ_2 角的转动运动方程(见图 3.12)。从以参量 z_1, z_2, z_3 表示的转动运动方程(4.5.1) 还可以转换成关于章动角 δ 和进动角 ν 的方程。根据(3.160) 式有

$$z_1 = \cos\delta \quad z_2 = \sin\delta\cos\nu \quad z_3 = \sin\delta\sin\nu$$

对时间微分两次得

$$\begin{aligned}\ddot{z}_1 &= -\ddot{\delta}\sin\delta & \ddot{z}_2 &= \ddot{\delta}\cos\delta\cos\nu - \dot{\nu}\sin\nu\sin\delta \\ \ddot{z}_3 &= \ddot{\delta}\cos\delta\sin\nu + \dot{\nu}\sin\delta\cos\nu & \ddot{z}_1 &= -\ddot{\delta}\sin\delta - \dot{\delta}^2\cos\delta \\ \ddot{z}_2 &= \ddot{\delta}\cos\delta\sin\nu - \dot{\delta}^2\sin\delta\cos\nu - 2\dot{\delta}\dot{\nu}\cos\delta\sin\nu \\ &\quad - \dot{\nu}^2\sin\delta\cos\nu - \ddot{\nu}\sin\delta\sin\nu \\ \ddot{z}_3 &= \ddot{\delta}\cos\delta\sin\nu - \dot{\delta}^2\sin\delta\sin\nu + 2\dot{\delta}\dot{\nu}\cos\delta\cos\nu \\ &\quad - \dot{\nu}^2\sin\delta\sin\nu + \ddot{\nu}\sin\delta\cos\nu\end{aligned}$$

将方程组(4.5.1) 的第一个方程乘以 $(-z_3)$, 第二个方程乘以 z_2 并相加,得

$$z_1(z_3^2 + z_2^2) + z_1(z_2 z_2 + z_3 z_3) - 2\alpha(z_3 \dot{z}_2 - z_2 \dot{z}_3) = f_4(z_3^2 + z_2^2) \quad (8.1)$$

将 $z_i, \dot{z}_i, \ddot{z}_i (i=1,2,3)$ 的表达式代入方程(4.55)和(8.1)中,经变换后就由方程(4.51)转变为角度 δ 和 ν 的方程组

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\nu \sin^2 \delta + 2\alpha \cos \delta) &= 0; \\ \delta - \nu \sin \delta \cos \delta + 2\alpha \nu \sin \delta &= f_4 \sin \delta; \\ \alpha = \frac{C}{2A} r = \text{const} &= \frac{C}{2A} r_0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

方程(4.63), (4.64)和(8.2)描述了弹丸在一段较短的弹道上的角运动,在此一段弹道上可忽略弹道的曲率。

由 B. C. 普加乔夫形式的全运动方程组也可获得弹道曲线段上的弹丸角运动方程。如果认为弹丸弹道是平面曲线($\dot{\Psi}_H = \ddot{\Psi}_H = 0$),也就是设方程(3.157)中有

$$f_2 = f_3 = f_5 = f_6 = f_7 = 0$$

则此方程组中的第四到第7个方程就可写成如下形式:

$$\begin{aligned} 1. \quad & z_3 \ddot{z}_1 - \ddot{z}_3 z_1 + 2\alpha \dot{z}_2 - (2\dot{z}_2 + z_1 \dot{\theta}) z_3 \dot{\theta} - z_2 z_3 \ddot{\theta} + 2\alpha z_1 \dot{\theta} \\ & = -f_4 z_3; \\ 2. \quad & z_1 \ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 z_2 + 2\alpha \dot{z}_3 - 2z_3 \dot{z}_3 \dot{\theta} - z_3^2 \ddot{\theta} + \ddot{\theta} = -f_4 z_2; \\ 3. \quad & \dot{\alpha} = 0; \\ 4. \quad & z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1 \end{aligned} \quad (8.3)$$

将方程组(8.3)的第一个方程乘以 $(1 - z_3^2)$, 第二个方程乘以 $z_2 z_3$ 并相加,得

$$\begin{aligned} & z_3(1 - z_3^2 - z_2^2) \ddot{z}_1 - z_1(1 - z_3^2) \ddot{z}_3 + z_1 z_2 z_3 \ddot{z}_2 \\ & + 2\alpha[(1 - z_3^2) \dot{z}_2 + z_2 z_3 \dot{z}_3] - 2\dot{\theta}[(1 - z_3^2) z_3 \dot{z}_2 + z_2 z_3^2 \dot{z}_3] \\ & - z_1 z_3(1 - z_3^2) \dot{\theta}^2 + 2\alpha z_1(1 - z_3^2) \dot{\theta} \\ & = f_4 z_3(z_2^2 + z_3^2 - 1) \end{aligned} \quad (8.4)$$

如果用 δ_1 和 δ_2 来给出弹丸纵轴在弹道坐标系中的方位,并将表达式(3.161)式对时间微分,就求得这种情况下的 $z_i, \dot{z}_i, \ddot{z}_i (i=1,2,3)$, 再

将它们代入方程(8.4)中,经变换后得

$$\begin{aligned} & -\ddot{\delta}_1 \cos^2 \delta_1 \cos \delta_2 - \dot{\delta}_2^2 \sin \delta_1 \cos^3 \delta_1 \cos \delta_2 + 2\alpha \dot{\delta}_2 \cos^3 \delta_1 \cos \delta_2 \\ & - 2\dot{\theta} \dot{\delta}_2 \sin \delta_1 \cos^3 \delta_1 \cos \delta_2 - \dot{\theta}^2 \sin \delta_1 \cos^3 \delta_1 \cos \delta_2 + 2\alpha \dot{\theta} \cos^3 \delta_1 \cos \delta_2 \\ & = -f_4 \sin \delta_1 \cos^2 \delta_1 \cos^2 \delta_2 \end{aligned} \quad (8.5)$$

类似地将 z_i 及其导数的表达式代入方程组(8.3)中的第二个方程中,得

$$\begin{aligned} & (\ddot{\delta}_2 + \ddot{\theta}) \cos^2 \delta_1 - 2(\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) \dot{\delta}_1 \sin \delta_1 \cos \delta_1 - 2\alpha \dot{\delta}_1 \cos \delta_1 \\ & = f_4 \sin \delta_2 \cos \delta_1 \end{aligned} \quad (8.6)$$

将方程(8.5)的两边同除以 $(-\cos^2 \delta_1 \cos \delta_2)$, 方程(8.6)的两边同除以 $\cos \delta_1$ 然后相加,得到描述仅有翻转力矩作用时在弹道曲线段上弹丸角运动的方程组

$$\begin{aligned} & \ddot{\delta}_1 + (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta})^2 \sin \delta_1 \cos \delta_1 - 2\alpha(\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) \cos \delta_1 = f_4 \sin \delta_1 \cos \delta_2 \\ & (\ddot{\delta}_2 + \ddot{\theta}) \cos \delta_1 - 2(\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) \dot{\delta}_1 \sin \delta_1 + 2\alpha \dot{\delta}_1 = f_4 \sin \delta_2 \\ & \alpha = \frac{C}{2A} r = \text{const} = \frac{C}{2A} r_0 \end{aligned} \quad (8.7)$$

方程(8.2)和(8.7)是在对 δ, δ_1 和 δ_2 角大小无任何限制情况下得到的。

在小章动角 δ 情况下, δ_1 和 δ_2 也相应地小,这时方程(8.2)和(8.7)就可以简化,由方程(8.2)的第一个方程得

$$\dot{\nu} \sin^2 \delta + 2\alpha \cos \delta = \text{const} = d \quad (8.8)$$

常数 d 与起始条件有关。在 $t=0$ 时 $\delta = \delta_0 = 0, \dot{\delta} = \dot{\delta}_0$ 的条件下,得

$$d = 2\alpha$$

这时(8.8)式就可写成如下形式:

$$\dot{\nu}(1 - \cos^2 \delta) = 2\alpha(1 - \cos \delta) \quad (8.9)$$

在小 δ 情况下 $\cos \delta \approx 1, \sin \delta \approx \delta$, 方程组(8.2)的头两个方程将是

$$\dot{\nu} = \alpha \quad \ddot{\delta} + \alpha^2 \delta - f_4 \delta = 0 \quad (8.10)$$

在小攻角 δ_1 和 δ_2 下,可认为 $\sin \delta_i \approx \delta_i, \cos \delta_i \approx 1 (i=1,2)$, 方程(8.7)的头两个方程就可简化,在忽略高阶小量 $(\dot{\delta}_2 + \dot{\theta})^2 \delta_1$ 和 $(\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) \dot{\delta}_1 \delta_1$ 后,得

$$\begin{aligned}\ddot{\delta}_1 - 2\alpha\dot{\delta}_2 - f_4\delta_1 &= 2\alpha\dot{\theta}; \\ \ddot{\delta}_2 + 2\alpha\dot{\delta}_1 - f_4\delta_2 &= -\ddot{\theta}\end{aligned}\quad (8.11)$$

在(8.10)式中记

$$\sigma = 1 - f_4/\alpha^2$$

此方程组的第二个方程就成为如下形式:

$$\ddot{\delta} + \alpha^2\sigma\delta = 0 \quad (8.12)$$

系数 f_4 和 σ 是时间的变量, 对于不大的时间间隔 $V \approx \text{const}$, 则可取 $f_4 \approx \text{const}$, $\alpha = \text{const}$, 因而 $\sigma \approx \text{const}$ 。

方程(8.12)的特征方程为 $\lambda^2 + \alpha^2\sigma = 0$, 当 $\sigma > 0$ 时得到人们熟知的解

$$\delta = C_1 e^{i\alpha\sqrt{\sigma}t} + C_2 e^{-i\alpha\sqrt{\sigma}t} \quad (8.13)$$

在确定了任意常数后就得到章动角的公式

$$\delta = \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha\sqrt{\sigma}} \sin \alpha\sqrt{\sigma}t \quad (8.14)$$

相当 $\sigma > 0$ 时章动角将以三角正弦函数表示, 弹丸纵轴的运动是周期为 $T = 2\pi/(\alpha\sqrt{\sigma})$ 、振幅为 $\delta_{\max} = \dot{\delta}_0/(\alpha\sqrt{\sigma})$ 的谐振动。按照(8.10)式, 进动运动是阻力面绕弹道切线以几乎不变的角速度 $\dot{\nu} = \alpha = \frac{C}{2A}r_0$ 旋转的运动。章动角在阻力面内的变化由方程(8.14)确定。在弹道直线段上旋转弹的纵轴相对于速度矢量 V 作复杂的空间运动, 对于起始条件 $\nu = 0, \delta_0 = 0, \dot{\delta}_0 \neq 0$ 的情况, 可以直观地用极坐标 $\delta = f(\nu)$ 里建立的图形来说明(见图 8.1)。

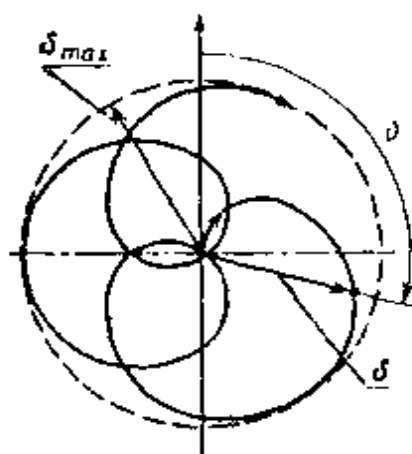


图 8.1 高速旋转弹当

$\delta_0 = 0, \dot{\delta}_0 \neq 0$ 时
在弹道直线段上的
 $\delta = f(\nu)$ 关系曲线

在该图中, 攻角 δ 的大小方向用矢径表示, 其方位由角度 ν 确定。如果要研究弹轴运动与时间的关系 $\delta(t)$ 和 $\nu(t)$, 可直观地画出其函数图形如图 8.2a 所示。但在处理实验数据时, 只考虑章动角 δ 的绝

对值要更方便些,因此 $\delta(t)$ 的图形将只画在正半平面上。此时 $\nu(t)$ 的图线具有阶梯形,因为在 δ 通过零点时角度 ν 立即改变 $\pm \pi$ 。以这种方式建立的 $\delta(t)$ 图线以及 $\nu(t)$ 在断开处改变 $\pm \pi$ 的图线如图 8.26 所示。当起始条件变化时, $\delta = f(\nu)$, $\delta(t)$ 和 $\nu(t)$ 的图形将与图 8.1 和 8.2 所示的图形有所不同。

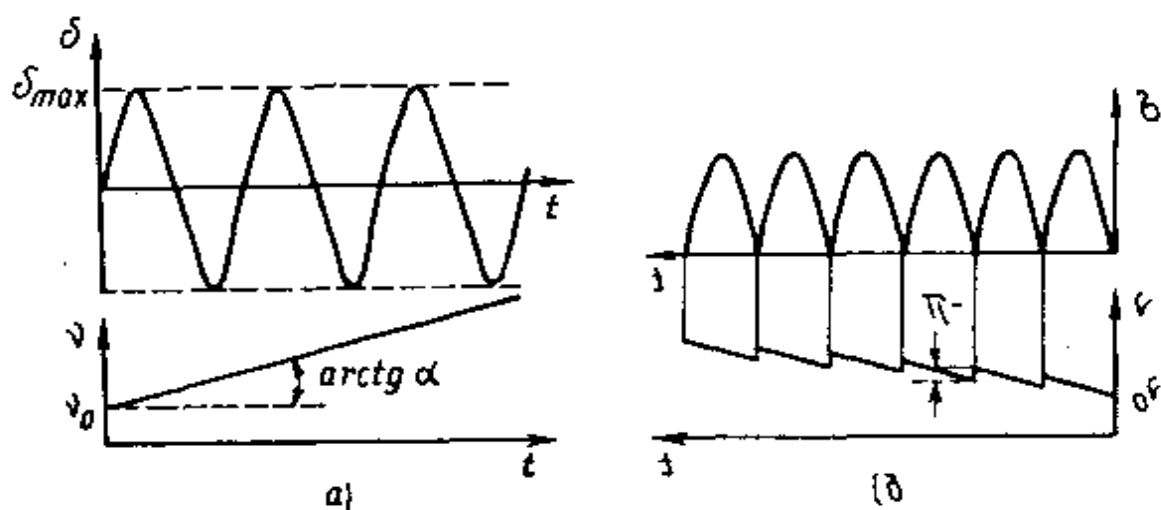


图 8.2 $\delta(t)$ 和 $\nu(t)$ 曲线

(a) 在阻力面内; (b) 在正半平面上。

方程(8.12)在 $\sigma > 0$ 时的积分结果为(8.13)式,它确定了弹丸纵轴以有限振幅作谐振运动。在 $\sigma < 0$ 时方程(8.12)的积分结果则为如下的关系式:

$$\delta = -C(e^{\alpha \sqrt{|\sigma|}t} + e^{-\alpha \sqrt{|\sigma|}t})$$

在确定了积分常数后,得

$$\delta = \frac{\dot{\delta}_0}{\alpha \sqrt{|\sigma|}} \text{sh}(\alpha \sqrt{|\sigma|}t)$$

因此在 $\sigma < 0$ 时章动角成为随时间无界增长的函数,这是运动不稳定的特征。故使旋转弹丸正确运动的条件可用如下不等式表示:

$$\sigma = 1 - f_4/\alpha^2 > 0 \quad (8.15)$$

此式中的系数 σ 称为弹道起始直线段上弹丸陀螺稳定性判别数。从 $\sigma > 0$ 出发,稳定性条件还可写成

$$f_4/\alpha^2 < 1 \quad (8.16)$$

在第四章里曾指出过,条件(8.15)是在弹道起始段上弹丸角运动稳定性的必要条件。因为 $f_4 = f[\alpha^2, V^2, A, l, H(y), m_M(\frac{V}{a})]$ 与弹丸的尺寸、用途以及质心运动特征等有关,故用选择 f_4 的办法来满足不等式(8.16)实际上是不可能的。在给定了 f_4 的条件下,用选择参量 α 或按(8.7)式选择转速 r_0 的方式来满足陀螺稳定性条件显然是十分简单的。

下面再利用方程组(8.11)并设在弹道初始段上 $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ 的条件下,研究在任意起始条件下弹丸的运动。引入复变量 $z = \delta_2 + i\delta_1$, 将方程(8.11)的第一个方程乘以 i 并与第二个方程相加,得

$$\ddot{\delta}_2 + i\ddot{\delta}_1 + 2\alpha(\dot{\delta}_1 - i\dot{\delta}_2) - f_4(\delta_2 + i\delta_1) = 0$$

考虑到 $i\dot{\delta}_2 - \dot{\delta}_1 = i(\dot{\delta}_2 + i\dot{\delta}_1)$, 得

$$\ddot{z} - 2i\alpha\dot{z} - f_4z = 0 \quad (8.17)$$

引入陀螺稳定性系数 σ , 此方程变为

$$\ddot{z} - 2i\alpha\dot{z} - \alpha^2(1 - \sigma)z = 0 \quad (8.18)$$

其特征方程 $\lambda^2 - 2i\alpha\lambda - \alpha^2(1 - \sigma) = 0$ 将有如下两个根:

$$\lambda_{1,2} = i\alpha \pm \sqrt{-\alpha^2 + \alpha^2(1 - \sigma)} = i\alpha \pm \alpha\sqrt{-\sigma} = i\alpha(1 \pm \sqrt{\sigma})$$

写出方程(8.18)的通积分如下:

$$z = C_1 e^{i\alpha(1+\sqrt{\sigma})t} + C_2 e^{i\alpha(1-\sqrt{\sigma})t} \quad (8.19)$$

式中 C_1, C_2 为由起始条件确定的复积分常数。

$$C_1 = \rho_1 e^{i\epsilon_1} \quad C_2 = \rho_2 e^{i\epsilon_2}$$

考虑到这一点,于是得

$$z = \rho_1 e^{i[\alpha(1+\sqrt{\sigma})t + \epsilon_1]} + \rho_2 e^{i[\alpha(1-\sqrt{\sigma})t + \epsilon_2]} \quad (8.20)$$

$$\text{记} \quad \omega_1 = \alpha(1 + \sqrt{\sigma}) \quad \omega_2 = \alpha(1 - \sqrt{\sigma}) \quad (8.21)$$

再利用公式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, 就可将(8.20)式写成如下形式:

$$\begin{aligned} z = & \rho_1 \cos(\omega_1 t + \epsilon_1) + \rho_2 \cos(\omega_2 t + \epsilon_2) \\ & + i[\rho_1 \sin(\omega_1 t + \epsilon_1) + \rho_2 \sin(\omega_2 t + \epsilon_2)] \end{aligned} \quad (8.22)$$

再注意到 $z = \delta_2 + i\delta_1$, 即得到 δ_1 和 δ_2 角的表达式

$$\begin{aligned} \delta_1 = & \rho_1 \sin(\omega_1 t + \epsilon_1) + \rho_2 \sin(\omega_2 t + \epsilon_2); \\ \delta_2 = & \rho_1 \cos(\omega_1 t + \epsilon_1) + \rho_2 \cos(\omega_2 t + \epsilon_2) \end{aligned} \quad (8.23)$$

设在起始 t_0 瞬时

$$\delta_1 = \delta_{10} \quad \delta_2 = \delta_{20} \quad \dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_{10} \quad \dot{\delta}_2 = \dot{\delta}_{20}$$

将这些值代入 δ_1 和 δ_2 的表达式(8.23) 及其导数式中得

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \rho_1 \sin(\omega_1 t + \epsilon_1) + \rho_2 \sin(\omega_2 t + \epsilon_2); \\ \delta_{20} &= \rho_1 \cos(\omega_1 t + \epsilon_1) + \rho_2 \cos(\omega_2 t + \epsilon_2); \\ \dot{\delta}_{10} &= \rho_1 \omega_1 \cos(\omega_1 t + \epsilon_1) + \rho_2 \omega_2 \cos(\omega_2 t + \epsilon_2); \\ -\dot{\delta}_{20} &= \rho_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \epsilon_1) + \rho_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \epsilon_2) \end{aligned} \quad (8.24)$$

对 $\rho_1, \rho_2, \epsilon_1, \epsilon_2$ 解方程组(8.24), 得

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{2\alpha \sqrt{\sigma}} \sqrt{(\dot{\delta}_{20} + \omega_2 \delta_{10})^2 + (\dot{\delta}_{10} - \omega_2 \delta_{20})^2}; \\ \rho_2 &= \frac{1}{2\alpha \sqrt{\sigma}} \sqrt{(\dot{\delta}_{20} + \omega_1 \delta_{10})^2 + (\dot{\delta}_{10} - \omega_1 \delta_{20})^2}; \\ \epsilon_1 &= -\operatorname{arctg} \frac{\dot{\delta}_{10} + \omega_2 \delta_{10}}{\dot{\delta}_{20} - \omega_2 \delta_{20}} \quad \epsilon_2 = -\operatorname{arctg} \frac{\dot{\delta}_{10} + \omega_1 \delta_{10}}{\dot{\delta}_{20} - \omega_1 \delta_{20}} \end{aligned} \quad (8.25)$$

在图 8.3 中画出了弹丸纵轴在 δ_1 和 δ_2 坐标系里运动的图形。图中 M 点是弹丸纵轴与单位半径球面交点的投影, 此单位半径系自弹丸质心引至 δ_1 和 δ_2 坐标平面。对于所研究的齐次方程(8.18) 的解, 弹丸质心速度矢量投影在直角坐标系 δ_1 和 δ_2 的原点上。 M 点在坐标平面上的运动可以表示成两个圆运动的几何和: 点 M 沿着半径为 ρ_1 的圆周相对于瞬时中心旋转而瞬时中心又沿半径为 ρ_2 的圆周作圆运动。角速度 ω_1 和 ω_2 由表达式(8.21) 确定, 显然 $\omega_1 > \omega_2$ 。

矢径在坐标轴 δ_1 和 δ_2 上的投影相应地为 $\delta_1 = \delta_{12} + \delta_{11}$; $\delta_2 = \delta_{22} + \delta_{21}$, 式中

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \rho_1 \sin(\omega_1 t + \epsilon_1) & \delta_{12} &= \rho_2 \sin(\omega_2 t + \epsilon_2); \\ \delta_{21} &= \rho_1 \cos(\omega_1 t + \epsilon_1) & \delta_{22} &= \rho_2 \cos(\omega_2 t + \epsilon_2) \end{aligned} \quad (8.26)$$

在坐标平面 δ_1 和 δ_2 上点 M 的合成运动轨迹是建立在半径为 $\rho_2 - \rho_1$ 的圆上的外摆线。矢径 ρ_1 和 ρ_2 的大小, 它们的比值以及决定矢径起始位置的常量 ϵ_1 和 ϵ_2 都由起始条件确定。对于一般起始条件, 在

确定了 δ_1 和 δ_2 后,章动角和进动角可以按下式求得:

$$\delta^2 = \delta_1^2 + \delta_2^2 \quad \operatorname{tg} \nu = \delta_1 / \delta_2$$

起始条件不同,弹轴相对于速度运动的形式也不相同。在给定 $\delta = \delta_0$ 的情况下,对于不同的 $\dot{\nu}_0$ 值,章动角 δ 作为进动角 ν 的函数的可能变化特征如图 8.4 所示。

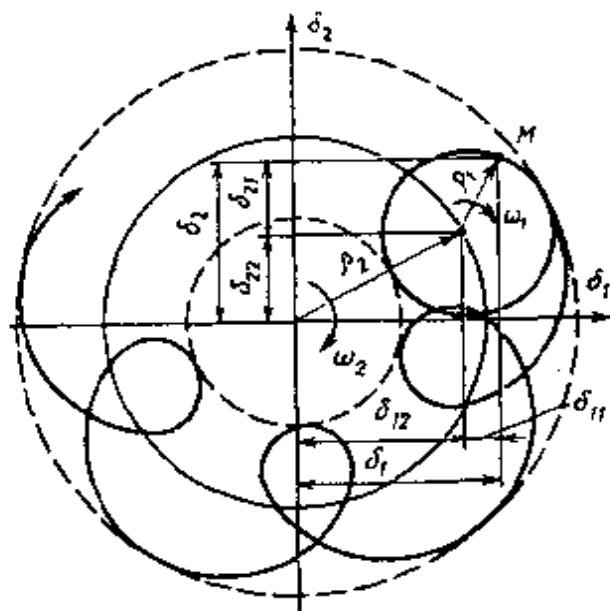


图8.3 弹道直线段上高速
旋转弹在 $\delta_0 = 0, \dot{\delta}_0 \neq 0$ 条件
下的 $\delta_2 = f(\delta_1)$ 关系图

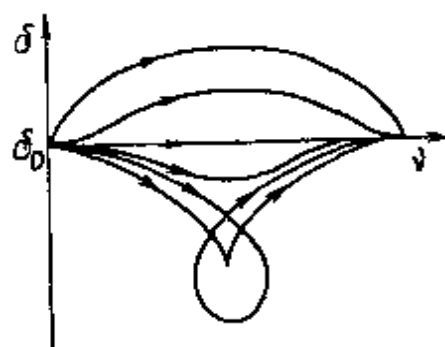


图 8.4 不同起始条件下
 $\delta(\nu)$ 图形的可能形式

为了确定弹丸纵轴在弹道曲线段上的运动特征,必须求出方程 (8.11) 的一般积分。在引入复变量 $z = \delta_2 + i\delta_1$ 后,就可将方程组 (8.11) 表示成如下复数方程的形式:

$$\ddot{z} - 2i\alpha\dot{z} - f_4 z = 2ia\dot{\theta} - \ddot{\theta} \quad (8.27)$$

像以前一样,设 α 和 f_4 为常数,我们来求非齐次方程 (8.27) 的特积分。通常将此解写成级数形式:

$$z_P = z_0 + \frac{1}{\alpha} z_{01} + \frac{1}{\alpha^2} z_{02} + \dots \quad (8.28)$$

研究表明, α 是一个大参数,故级数的项很快衰减,因而只需确定时间函数 z_0, z_{01}, z_{02} 即可。取导数 \dot{z}_P, \ddot{z}_P 并与 z_P 一起代入 (8.27) 式中,得

$$\ddot{z}_0 - 2i\alpha\dot{z}_0 - \alpha^2(f_4/\alpha^2)z_0 + \frac{1}{\alpha}\ddot{z}_{01} - 2iz_{01} - \alpha(f_4/\alpha^2)z_{01}$$

$$+ \frac{1}{\alpha^2} \ddot{z}_{02} - 2i \frac{1}{\alpha} \dot{z}_{02} - (f_4/\alpha^2) z_{02} + \dots = 2i\alpha\dot{\theta} - \ddot{\theta}$$

上述方程中的 $\frac{1}{\alpha} \ddot{z}_{01}$, $\frac{1}{\alpha^2} \ddot{z}_{02}$ 和 $2i \frac{1}{\alpha} \dot{z}_{02}$ 是二阶小量, 可将其忽略。再令上述方程左边和右边具有相同 α 阶次的项的系数相等, 则对于 α^2 项的系数有 $(f_4/\alpha^2) z_0 = 0$; 对于 α 项的系数有: $-2i\dot{z}_0 - (f_4/\alpha^2) z_{01} = 2i\dot{\theta}$; 对于 α^0 的系数则有

$$\ddot{z}_0 - 2i\dot{z}_{01} - \frac{f_4}{\alpha^2} z_{02} = -\ddot{\theta}$$

由以上三个方程得

$$z_0 = 0 \quad z_{01} = -\frac{2i\alpha^2}{f_4} \dot{\theta} \quad z_{02} = \frac{\alpha^2}{f_4} \ddot{\theta} - 2i \frac{\alpha^2}{f_4} \dot{z}_{01} \quad (8.29)$$

将方程组(8.29)的第二个方程对时间求导并将 \dot{z}_{01} 代入第三个方程, 经变换后得

$$z_{02} = \frac{\alpha^2}{f_4} \ddot{\theta} - 4 \frac{\alpha^4}{f_4^2} \dot{\theta} \left[\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} - \frac{\dot{f}_4}{f_4} \right]$$

将 z_0, z_{01}, z_{02} 代入(8.28) 式中, 得

$$z_P = -2i \frac{\alpha}{f_4} \dot{\theta} + \frac{\ddot{\theta}}{f_4} - 4 \frac{\alpha^2}{f_4^2} \left[\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} - \frac{\dot{f}_4}{f_4} \right] \quad (8.30)$$

考虑到复变量的一般形式, 记

$$z_P = \delta_{2P} + i\delta_{1P} \quad (8.31)$$

比较(8.30) 和(8.31) 式得

$$\delta_{1P} = -2 \frac{\alpha}{f_4} \dot{\theta} \quad (8.32)$$

$$\delta_{2P} = \frac{\ddot{\theta}}{f_4} - 4 \frac{\alpha^2}{f_4^2} \left[\frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} - \frac{\dot{f}_4}{f_4} \right] \quad (8.33)$$

计算表明 δ_{1P} 角比 δ_{2P} 大得多, 因而是 δ_P 角的主要分量。在弹道曲线段上旋转炮弹运动问题的解表明, 在这种情况下外摆线是相对于动力平衡轴(相对于图 8.5 上的 D 点) 建立的, 而 D 点是动力平衡轴与单位球面的交点在映象平面上的投影。在任何瞬时, 点 D 在坐标平面上的位置由式(8.32) 和(8.33) 算出的 δ_{1P} 和 δ_{2P} 确定。角 δ_{1P}

和 δ_{2P} 从坐标原点算起,而 O 则是弹道切线与单位球面的交点在映象平面上的投影。当动力平衡轴逐渐偏离速度矢量线时(即 D 点离开 O 点时),半径 ρ_2 描绘的曲线具有螺线形(不同于图 8.3 中的圆)。

于是得到了表征动力平衡轴位置的角度的表达式。又因为 $\delta_{1P} \gg \delta_{2P}$,故在一级近似中可以认为

$$\delta_P \approx \delta_{1P} = 2 \frac{\alpha}{f_4} |\dot{\theta}| \quad (8.34)$$

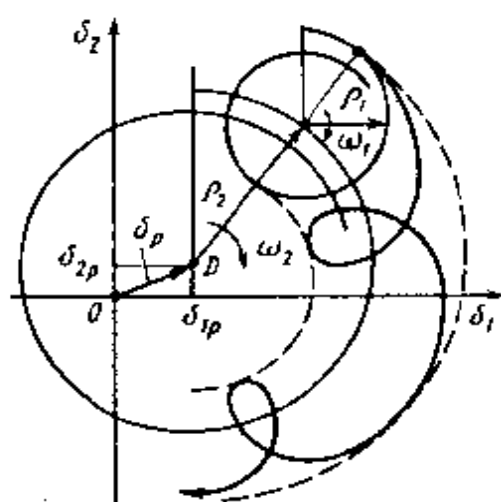


图 8.5 在高速旋转弹质心弹道曲线段上当 δ_P 增大时的 $\delta_2 = f(\delta_1)$ 关系

将方程(3.122)中的第二个方程代入上式中并作变换,得

$$\delta_P = k \frac{\cos \theta}{H(y)V^3 m_M \left[\frac{V}{a} \right]} \quad (8.35)$$

角度 δ_P 确定了动力平衡轴的位置,旋转弹的纵轴相对于该位置作周期性振荡运动。如果弹丸运动的弹道接近于直线,即 $\dot{\theta} \approx 0$,则根据(8.34)式有 $\delta_P \approx 0$,那么弹轴的振荡运动就相对于质心运动速度矢量进行。

前面已得到旋转弹在弹道直线段上运动的稳定条件,随着弹道曲率的增大,动力平衡轴逐渐偏离速度矢量 δ_P 角, δ_P 角由(8.35)式确定。

分析公式(8.35)中的量可以指出, δ_P 角沿弹道曲线段是变化的,并且在弹道顶点附近由于 $\cos \theta$ 接近于最大而 $H(y)V^3$ 接近于最小, δ_P 将达到最大值。当旋转弹的速度选择不正确时,在弹道顶点处 δ_P 可以变得很大,以至于使弹丸失去稳定性。因此, δ_P 角应视为估计旋转弹在弹道曲线段上稳定性的、独立的判据。比较稳定性判据 σ 和 δ_P 的关系式(8.15)和(8.35)表明,这二者是有矛盾的。

实际上为了提高旋转弹在初始弹道直线段上的稳定性,需要提高它的转速 $r = \dot{\phi}$, 而这就引起了 $\dot{\nu}$ 和 δ_P 相应地增大,因而导致弹

道顶点处弹丸稳定性的减小。

对于弹长为 5 ~ 6 倍口径的弹丸,这两个稳定性条件在射角直到 $50^\circ \sim 60^\circ$ 的情况下都结合得很好。在这种情况下,为了保证弹丸沿全弹道的稳定性,只要选择它在弹道起始段上的自转角速度,使稳定性判据数满足 $\sqrt{\sigma_H} = 0.60 \sim 0.66$ 就行了。

我们还要指出旋转稳定炮弹的一个弹道特点。由于 δ_F 角的存在,导致在大部分飞行时间里弹丸纵轴位于速度矢量的一侧,使弹丸从初始射击面偏向一侧。高速旋转弹的系统侧偏称为偏流,在右旋弹的情况下动力平衡轴偏向速度矢量的右侧(如果沿着运动方向看去),于是产生向右的偏流;在左旋弹的情况下将向左离开射击平面,也就是产生向左的偏流。弹丸的偏流可用试验方法或计算方法确定,在理论公式中著名的有 A. H 克雷诺夫公式, B. H. 奥斯塔波维奇, И. П. 别列斯列夫公式, Л. A. 范德柴里公式以及 B. H. 别尔什提出的计算方法。最有名的一个公式是克雷诺夫公式

$$z = f \frac{g}{Q} \cdot \frac{2\pi C}{hR\eta d} V_0 \int_0^t (\varphi - \varphi_0) dt \quad (8.36)$$

式中(除已知的量外) R ——弹丸半径; φ ——弹道切线与铅直线的夹角; C ——弹丸的轴向惯量矩。

此公式中含有须由试验确定的量:与弹丸质心至压力中心间距离成正比的未知量 h 以及对试验结果进行符合的系数 f 。对于同一类型的弹丸和弹道,此公式给出了满意的结果。更一般的公式是考虑了飞行期间转速衰减的 B. H. 别尔什公式。

下面研究偏流的计算确定。弹丸质心沿坐标系 $OX_g Y_g Z_g$ 的 OZ_g 轴运动的方程为

$$\frac{Q}{g} \ddot{z}_g = R_z - X_a \cos(\hat{V}_a; z_g) \quad (8.37)$$

式中 R_z 是由 δ_F 产生的侧力。作替换 $\cos(\hat{V}_a; z_g) = \dot{z}_g/V$, 则得

$$\ddot{z}_g = \frac{g}{Q} R_z - \frac{g}{Q} X_a \frac{\dot{z}_g}{V} \quad (8.38)$$

再作替换 $\frac{g}{Q} X_a = cH(y)F(V)$, 并注意到 $G(V) = F(V)/V$, 得

$$\ddot{z}_x = \frac{g}{Q} R_x - cH(y)G(V)\dot{z}_x \quad (8.39)$$

再考虑到由偏流产生的弹道曲率不大,所以可利用适合于平面弹道的关系式 $-cH(y)G(V) = \dot{u}/u$,则由(8.39)式可以写出

$$\ddot{z}_x - \frac{\dot{u}}{u}\dot{z}_x = \frac{g}{Q} R_x \quad (8.40)$$

$$\text{或} \quad u \frac{d}{dt} \left[\frac{\dot{z}_x}{u} \right] = \frac{g}{Q} R_x \quad (8.41)$$

积分(8.41)式得

$$z_x = \frac{g}{Q} \int_0^t u dt \int_0^t \frac{R_x}{u} dt \quad (8.42)$$

下面来消去 R_x 。通常假定使旋转弹偏离射击面的力正比于 δ_P 角,根据空气动力学一般理论则有

$$R_x = \frac{dl}{g} \times 10^3 H(y) V^3 c_N \delta_P \quad (8.43)$$

将(8.34)式的 δ_P 值引入(8.43)式中,再消去 α 和 f_1 , $|\dot{\theta}|$ 的值就像通常一样确定,此外还注意到 $\cos\theta = u/V$,于是在不考虑由表面摩擦力矩作用产生转速衰减的情况下,得到如下的计算偏流的表达式:

$$z = \frac{\pi g}{2} \cdot \frac{\mu l}{\eta h} V_0 \int_0^t u dt \int_0^t \frac{c_N}{m_M} \cdot \frac{dt}{V^2} \quad (8.44)$$

在有了试验空气动力特征数 $c_N \left[\frac{V}{a} \right]$, $m_M \left[\frac{V}{a} \right]$ 和对于平面弹道计算得到的 $V = V(t)$, $u = u(t)$ 值以后,就可数值方法计算(8.44)

式中 T 为弹丸的全飞行时间。

需要确定的是,弹从身管射出瞬时具有什么样的起始角扰动才能满足(8.45)式。

这个问题曾由 H. Γ 契塔耶夫对一些迫切的实际问题提出和解决过^[114]。根据给定的限制 δ_{non} 建立不破坏此限制的起始扰动变化范围的条件, H. Γ. 契塔耶夫称此条件为弹丸旋转运动稳定性的充分条件。

下面研究炮弹在弹道起始段上的运动,设其质心运动速度和绕纵轴的角速度是常量,在 4.3.1 节里曾指出过,弹丸相对质心的运动可以用 4 个首次积分来描述,其中的三个是如下形式:

$$\begin{aligned} z_2 \dot{z}_3 - z_3 \dot{z}_2 + 2\alpha z_1 &= h_1; \\ \dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + \dot{z}_3^2 + 2f_4 z_1 &= 2h_2; \\ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad (8.46)$$

由(8.46)式的第一个表达式得

$$(z_2 \dot{z}_3 - z_3 \dot{z}_2)^2 = (h_1 - 2\alpha z_1)^2$$

经平方自乘后得

$$z_2^2 \dot{z}_3^2 - 2z_2 z_3 \dot{z}_2 \dot{z}_3 + z_3^2 \dot{z}_2^2 = (h_1 - 2\alpha z_1)^2 \quad (8.47)$$

将(8.46)式的第二个首次积分对时间积分后得

$$z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 + z_3 \dot{z}_3 = 0$$

将此等式中的第二和第三项移到等号右边,平方自乘后经整理得

$$2z_2 z_3 \dot{z}_2 \dot{z}_3 = z_1^2 \dot{z}_1^2 - z_2^2 \dot{z}_2^2 - z_3^2 \dot{z}_3^2$$

将此式代入(8.47)式中,经变换后得

$$\dot{z}_2^2 + \dot{z}_3^2 = \dot{z}_1^2 \frac{z_1^2}{z_2^2 + z_3^2} + \frac{(h_1 - 2\alpha z_1)^2}{z_2^2 - z_3^2}$$

因为 $z_2^2 + z_3^2 = 1 - z_1^2$, 故有

$$\dot{z}_2^2 + \dot{z}_3^2 = \dot{z}_1^2 \frac{z_1^2}{1 - z_1^2} + \frac{(h_1 - 2\alpha z_1)^2}{1 - z_1^2} \quad (8.48)$$

将(8.48)式代入(8.46)的第二个表达式中,经变换后得

$$\dot{z}_1^2 = (2h_2 - 2f_4 z_1)(1 - z_1^2) - (h_1 - 2\alpha z_1)^2 \quad (8.49)$$

(8.49)式右边是关于 $z_1 = \cos \delta$ 的三次多项式,记

$$f(z_1) = (2h_2 - 2f_4 z_1)(1 - z_1^2) - (h_1 - 2\alpha z_1)^2 \quad (8.50)$$

多项式 $f(z_1)$ 在 $z_1 \rightarrow -\infty, z_1 = \pm 1$ 时是负的,而在 $z_1 \rightarrow +\infty, z_1 = z_{10} = \cos \delta_0$ 时是正的(因为按物理意义 z_1 应是实数)。由此知此多项式的三个根 z_{11}, z_{12}, z_{13} 为实数并相应地位于如下区间里:

$$z_{11} \in [-1, z_{10}] \quad z_{12} \in [z_{10}, 1] \quad z_{13} \in [1, \infty]$$

因此 $f(z_1)$ 可表示成

$$f(z_1) = 2f_4(z_1 - z_{11})(z_1 - z_{12})(z_1 - z_{13})$$

因为 $z_1 = \cos \delta$, 故永远在 $-1 \sim +1$ 区间取值。这样,对于我们的问题,区间 $[z_{11}, z_{12}]$ 是确定的,变量 $z_1 (z_1 \in [z_{11}, z_{12}])$ 只能在这个区间内变化。换句话说 δ 角将在 $\delta_{\max} = \arccos z_{11}$ 和 $\delta_{\min} = \arccos z_{12}$ 之间振荡,也即

$$\arccos z_{12} < \delta_{\min} < \delta < \delta_{\max} = \arccos z_{11}$$

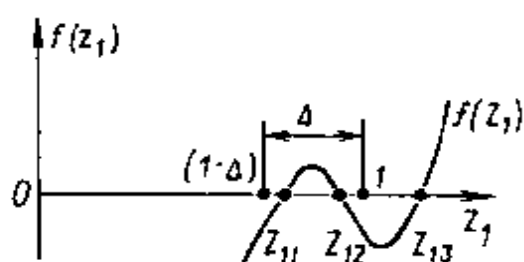


图 8.6 多项式 $f(z_1)$ 的图形

因而,如果多项式 $f(z_1)$ 的根 z_{11}, z_{12} 都接近于 1, 那么在整个飞行时间里章动角将保持很小。这是因为在这种情况下 $z_1 = \cos \delta$ 也接近于 1, 因而 δ 将取很小的值(见图 8.6)。我们来寻找章动角保持为小量的条件,也即寻找多项式之根 z_{11} 和 z_{12} 大于 $(1 - \Delta)$ 的条件,式中 Δ 为任意小量(见图 8.6),即要求

$$\cos \delta = z_1 > 1 - \Delta \quad (8.51)$$

如果

$$1 - \Delta - z_1 < 0 \quad (8.52)$$

则不等式(8.51)将被满足。如果多项式 $F(x) = -f(1 - \Delta - x)$ 所有的根是负的,则不等式(8.52)必将被满足。以这种方式引入的多项式具有如下形式:

$$F(x) = [h_1 - 2(1 - \Delta)\alpha + 2\alpha x]^2 - [2h_2 - 2f_4(1 - \Delta) + 2f_4 x] \cdot [1 - (1 - \Delta)^2 + 2(1 - \Delta)x - x^2]$$

展开括号,经整理后得

$$F(x) = 2f_4 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \quad (8.53)$$

式中

$$\begin{aligned}a_1 &= 2h_2 + 4\alpha^2 - 6f_4(1 - \Delta) \\a_2 &= 4\alpha[h_1 - 2\alpha(1 - \Delta)] - 2f_4(2\Delta - \Delta^2) \\&\quad - 2(1 - \Delta)[2h_2 - 2f_4(1 - \Delta)] \\a_3 &= [h_1 - 2\alpha(1 - \Delta)]^2 \\&\quad - [2h_2 - 2f_4(1 - \Delta)][1 - (1 - \Delta)^2]\end{aligned}$$

按照古尔维茨理论,多项式 $P(x)$ 的根为负的条件由以下形式的不等式获得:

$$a_1 > 0 \quad a_1 a_2 - 2f_4 a_3 > 0 \quad a_3 > 0 \quad (8.54)$$

将 a_1, a_2, a_3 的值代入(8.54)式中,得

$$\begin{aligned}2h_2 + 4\alpha^2 - 6f_4 + 6f_4\Delta &> 0; \\(2h_2 + 4\alpha - 6f_4)[4\alpha(h_1 - 2\alpha) - 2(2h_2 - 2f_4)] \\&\quad - 2f_4(h_1 - 2\alpha)^2 + \{2(2h_2 + 4\alpha^2 - 6f_4)^2 \\&\quad + 4f_4[4\alpha(h_1 - 2\alpha) - 2(2h_2 - 2f_4)]\}\Delta \\&\quad + 16f_4(2h_2 + 4\alpha^2 - 6f_4)\Delta^2 + 32f_4^2\Delta^3 > 0; \\(h_1 - 2\alpha)^2 + [4\alpha(h_1 - 2\alpha) - 2(2h_2 - 2f_4)]\Delta \\&\quad + (2h_2 + 4\alpha^2 - 6f_4)\Delta^2 + 2f_4\Delta^3 > 0\end{aligned} \quad (8.55)$$

如果对任何瞬时 $t \in [0, T]$ 不等式(8.55)都被满足,则在弹丸飞行的全部飞行时间内都可以保证章动角较小,这是因为此时条件

$$1 - \Delta < z_{11} < \cos \delta < z_{12} < 1 \quad (8.56)$$

将被满足,由此得

$$0 < \delta < \arccos(1 - \Delta) = \delta_{\max} \quad (8.57)$$

不等式(8.55)就是按照 H. Г. 契塔耶夫术语的章动角稳定性的充分条件。

我们来看一下这些条件如何应用于实际问题之中。(8.55)式中的首次积分 h_1 和 h_2 取决于起始条件。对于理想的火炮,在炮口断面处弹丸具有 $\delta_0 = \dot{\delta}_0 = 0$,如果马也夫斯基条件 $\alpha^2 - f_4 > 0$ 被满足,则(8.55)式中所有的不等式也都同时被满足而与 Δ 无关。事实上对于初瞬时可以写出

$$2h_z = \dot{z}_{10}^2 + \dot{z}_{20}^2 + \dot{z}_{30}^2 + 2f_4 z_{10}$$

$$h_1 = z_{20}\dot{z}_{30} - z_{30}\dot{z}_{20} + 2\alpha z_{10}$$

考虑到 \dot{z}_i 的表达式,得

$$2h_z = \dot{\delta}_0^2 + \dot{\nu}_0^2 \sin^2 \delta_0 + 2f_4 \cos \delta_0;$$

$$h_1 = \dot{\nu}_0 \sin^2 \delta_0 + 2\alpha \cos \delta_0 \quad (8.58)$$

如果 $\delta_0 = \dot{\delta}_0 = 0$, 则有 $2h_z = 2f_4, h_1 = 2\alpha$ 。将这些值代入(8.55)式的第一个积分中,则可将这些不等式变成如下形式:

$$4(\alpha^2 - f_4) + 6f_4 \Delta > 0;$$

$$32(\alpha^2 - f_4)^2 \Delta + 64f_4(\alpha^2 - f_4)\Delta^2 + 32f_4^2 \Delta^3 > 0;$$

$$4(\alpha^2 - f_4)\Delta^2 + 2f_4 \Delta^3 > 0 \quad (8.59)$$

因为按照问题的内容 f_4 和 Δ 为正数,故如果 $\alpha^2 - f_4 > 0$ 被满足,则所有的不等式也将被满足而与 Δ 无关。在这种意义下,马也夫斯基稳定性条件将是在无穷小弹道直线段上弹丸的稳定性条件。

对于实际武器,在发射时 δ_0 和 $\dot{\delta}_0$ 不等于零,则由不等式(8.55)就确定了满足它的最小的偏差值 Δ 。在实际中最常遇到的情况是 $\delta_0 = 0, \dot{\delta}_0 > 0$,按照(8.58)式首次积分则为:

$$h_1 = 2\alpha \quad 2h_z = \dot{\delta}_0^2 + 2f_4$$

于是不等式(8.55)就可改成如下形式:

$$\dot{\delta}_0^2 + 4(\alpha^2 - f_4) + 6f_4 \Delta > 0;$$

$$- 2[\dot{\delta}_0^2 + 4(\alpha^2 - f_4)]\dot{\delta}_0^2 + \{2[\dot{\delta}_0^2 + 4(\alpha^2 - f_4)]^2$$

$$- 8f_4 \dot{\delta}_0^2\} \Delta; + 16f_4[\dot{\delta}_0^2 - 4(\alpha^2 f_4)]\Delta^2 + 32f_4^2 \Delta^3 > 0;$$

$$- 2\dot{\delta}_0^2 \Delta + [\dot{\delta}_0^2 + 4(\alpha^2 - f_4)]\Delta^2 + 2f_4 \Delta^3 > 0 \quad (8.60)$$

分析此不等式后表明,如果

$$s = \alpha^2 - f_4 > 0$$

则其中第一个不等式即被满足而与 Δ 无关。如果在此时量 s 还满足条件

$$(s + \dot{\delta}_0^2)^2 - 2f_4 \dot{\delta}_0^2 \geq 0 \quad (8.61)$$

则

$$\Delta < 2\dot{\delta}_0^2 / (s + \dot{\delta}_0^2) \quad (8.62)$$

考虑到(8.56), 上式中的比值应选择得小于章动角的极限允许值。在给定了允许值 δ_{max} 和起始章动角速度 $\dot{\delta}_0$ 的情况下, 不等式(8.62)就确定了与绕纵轴旋转角速度($\alpha = \frac{Cr}{2A}$)有关的、必须的稳定性储备量 s 。反之, 在给定了稳定储备量 s 和最大偏离量 Δ 的情况下, 关系式(8.62)就确定了允许的初始扰动量 $\dot{\delta}_0$ 。

8.1.3 作用力的构成对旋转稳定弹运动稳定性的影响

在仅考虑翻转力矩作用的条件下, 对弹丸角运动的研究确定了弹丸运动的主要定性特征, 并且在一级近似中得到了弹丸角坐标的定量估值, 但这是不够的, 还必须研究其它的力和力矩对运动稳定性的影响, 首先是赤道阻尼力矩、马格努斯力矩和表面摩擦力矩的影响。

为了描述这种情况下的角运动, 可以利用方程组(3.166)的第3~5个方程

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_1 + V(\bar{c}_N + \bar{m}_D)\dot{\delta}_1 - 2\alpha(1 + \bar{c}_{Ma})\dot{\delta}_2 \\ - (4\alpha^2\bar{c}_{Ma} + V^2\bar{m}_M)\delta_1 + 2\alpha V(\bar{m}_{Ma} - \bar{c}_N)\delta_2 = -2\alpha V^{-1}g\cos\theta; \\ \ddot{\delta}_2 + V(\bar{c}_N + \bar{m}_D)\dot{\delta}_2 + 2\alpha(1 + \bar{c}_{Ma})\dot{\delta}_1 \\ - (4\alpha^2\bar{c}_{Ma} + V^2\bar{m}_M)\delta_2 - 2\alpha V(\bar{m}_{Ma} - \bar{c}_N)\delta_1 = \bar{m}_D g\cos\theta; \\ \ddot{\alpha} = -v\bar{m}_r\alpha \end{aligned} \quad (8.63)$$

引入矢量 $\delta = [\delta_1, \delta_2]^T$ 以后, 此方程组的前两个方程就可写成如下形式:

$$\ddot{\delta} + B\dot{\delta} + G\dot{\delta} + C\delta + P\delta = \Delta \quad (8.64)$$

式中

$$\begin{aligned} B = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & -g \\ g & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \\ P = \begin{bmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= V(\bar{c}_N + \bar{m}_D) & g &= 2\alpha(1 + \bar{c}_{Ma}) \\ c &= -(4\alpha^2\bar{c}_{Ma} + V^2\bar{m}_M) & p &= 2\alpha V(\bar{m}_{Ma} - \bar{c}_N) \\ \Delta_1 &= -2\alpha V^{-1}g\cos\theta & \Delta_2 &= \bar{m}_Dg\cos\theta \end{aligned}$$

方程(8.64)用于当在运动方程中引入广义作用力矩阵的形式时分析弹丸的角运动稳定性。

从作用力的组成和物理性质的观点来分析影响运动稳定性的各种扰动力是从托马斯和泰塔^[134]的工作开始的,他们讲述了许多一般理论,而这些理论在许多重要的实际情况下的严格证明则是由契塔耶夫给出的。这些结果可以加深各种力对运动稳定性影响的概念,获得某个因素对运动稳定性影响的定性估计。

根据作用在系统上的广义力的类型,拟采用第二类拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q, \dot{q}) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (8.65)$$

式中 T 为系统的动能。

我们来研究广义力 $Q = [Q_1, \dots, Q_n]^T$ 与广义坐标 $q = [q_1, \dots, q_n]^T$ 以及广义速度 \dot{q} 矢量成线性关系时的情况,此时

$$Q = -C_1 q - B_1 \dot{q} \quad (8.66)$$

式中的 C_1 和 B_1 是已知的 $n \times n$ 维矩阵,矩阵 C_1 和 B_1 可表示成对称部分 C_0 和 B_0 以及反对称部分 P_0 和 G_0 。

$$C_1 = C_0 + P_0 \quad B_1 = B_0 + G_0$$

于是广义力 Q 就可以表示成如下和的形式:

$$Q = K + R + D + F \quad (8.67)$$

式中 $K = -C_0 q$, $R = -P_0 q$, $D = -B_0 \dot{q}$, $F = -G_0 \dot{q}$ 。具有对称矩阵 $C_0 = \|c_{ij}\|$ 的力 K 称为有势力或保守力,而平方公式 $\Pi = \frac{1}{2} C_0 q \cdot q$ 确定了系统的势能,与坐标 q 线性相关并具有反对称系数矩阵 P_0 的力 $R = -P_0 q$ 的元素称为非保守势力。力 $D = -B_0 \dot{q}$ 称为耗散力,而平方公式 $F = \frac{1}{2} B_0 \dot{q} \cdot \dot{q}$ 当其非负时称为瑞利消散函数或耗散函数。如果平方公式 F 为正定的,则耗散称为完全的,反之则称为非完

全的。与 \dot{q} 线性相关并具有反对称系数矩阵 G_0 的力 $\Gamma = -G_0\dot{q}$ 称为陀螺力。

运动方程(8.66)归结为如下形式:

$$A\ddot{q} + B_1\dot{q} + C_1q = Q^{(2)} \quad (8.68)$$

式中 A 为正定矩阵, $Q^{(2)}$ 为含有一阶以上坐标 q 和 \dot{q} 的广义力向量。利用形如(8.67)的广义力 Q 的定义,得

$$A\ddot{q} + B_0\dot{q} + G_0\dot{q} + C_0q + P_0q = Q^{(2)} \quad (8.69)$$

利用变换 $q = Sz$, 这里 S 是正交变换矩阵, 可将方程(8.69)写成如下形式:

$$\ddot{z} + B\dot{z} + Gz + Cz + Pz = Z \quad (8.70)$$

式中 B 是对称矩阵, G 和 P 是反对称矩阵, 而 C 是对角线矩阵 ($B = S^T B_0 S$, $G = S^T G_0 S$, $P = S^T P_0 S$, $C = S^T C_0 S$, $Z = S^T Q^{(2)} S$)。

结果是有势力、耗散力、陀螺力和非保守位置力都转换成同样结构的力。在这里术语“力”的使用具有如下意义的条件(见文献[76]),即方程(8.65)中解释为力(广义力)的各项并不是真实的力,而是通过某些数学变换以后得到的力。

下面就来研究陀螺力、耗散力和非保守位置力[见方程(8.64)]对弹丸相对质心运动稳定性的影响。如果在炮弹上作用的仅为有势力(根据翻转力矩确定的广义力),也即弹丸不绕纵轴旋转,则运动方程将为

$$\ddot{\delta} + C\delta = \Delta \quad (8.71)$$

转到标量方程则有

$$\ddot{\delta}_1 = c_1\delta = \Delta_1 \quad \ddot{\delta}_2 + c_2\delta_2 = \Delta_2 \quad (c_1 = c_2 = c) \quad (8.72)$$

此方程组的特征根为

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-c_1} \quad \lambda_{3,4} = \pm \sqrt{-c_2}$$

因为 $c < 0$, 故 4 个根中有两个是正数, 因而按照李雅普诺夫第一次近似关于运动不稳定性的理论, 如下形式的未扰动运动

$$\delta_1(t) = \delta_2(t) = \dot{\delta}_1(t) = \dot{\delta}_2(t) \quad (8.73)$$

是不稳定的。

按照庞卡莱术语,在形如(8.72) 方程组中的数 c_i 称为系统的稳定性系数,而负值 c_i 的个数则称为不稳定性阶。但这些数的个数并不是本质的,个数的奇偶性才是本质的。这样,在方程组(8.72) 的情况下不稳定性阶就是偶数并且等于 2。现在提出这样一个问题,如将陀螺力加到有势力中去能否使不稳定运动稳定呢?

陀螺稳定的必要条件之一由托马斯 - 泰塔 - 契塔耶夫定理来表达^[76]:如果在单一有势力情况下系统孤立平衡状态的稳定性具有非偶阶,则在含任何高于一阶的坐标和速度的项时要想使平衡状态陀螺稳定是不可能的。

在现在所研究的情况下,不稳定性阶为偶数,所以平衡状态的陀螺稳定是不可能的。设弹丸绕纵轴旋转,则方程(8.64) 可写成如下形式:

$$\ddot{\delta} + G\dot{\delta} + C\delta = \Delta \quad (8.74)$$

或写成标量形式:

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_1 - g\dot{\delta}_2 + c_1\delta_1 &= \Delta_1; \\ \ddot{\delta}_2 + g\dot{\delta}_1 + c_2\delta_2 &= \Delta_2 \end{aligned} \quad (8.75)$$

此方程组的特征方程为

$$\lambda^4 + (g^2 + c_1 + c_2)\lambda^2 + c_1c_2 = 0$$

如果对 λ^2 而言它有负根,也即如果

$$\begin{aligned} g^2 + c_1 + c_2 &> 0; \\ (g^2 + c_1 + c_2)^2 - 4c_1c_2 &> 0 \quad c_1c_2 > 0 \end{aligned} \quad (8.76)$$

则特征方程就没有带正实部的根。

现在我们有 $c_1 = c_2 = c < 0$, 如果

$$g^2 + 4c > 0 \quad (8.77)$$

则不等式(8.76) 将被满足。

如果陀螺力是由绕纵轴的旋转形成的,而有势力仅由翻转力矩形成,则有 $g = 2\alpha, c = -V^2\tilde{m}_M = -f_4$, 于是不等式(8.77) 就归结为过去已得到的马也夫斯基条件: $\alpha^2 - f_4 > 0$ 。

现在在方程(8.74)中再加上具有矩阵 B 的完全耗散力, 该矩阵的元素由赤道阻尼力矩和升力的共同作用决定(相应地由系数 \bar{m}_D 和 \bar{c}_N 反映):

$$\ddot{\delta} + B\dot{\delta} + G\delta + C\delta = \Delta \quad (8.78)$$

对于方程组(8.78), 关于平衡状态(8.73)的稳定性问题由托马斯-泰塔-契塔耶夫第4定理给出了回答^[76]。该定理指出, 在有势力作用下的不稳定孤立平衡状态在加上陀螺力和耗散力, 而此耗散力是完全耗散力时, 它仍然是不稳定的。这时我们有如下的方程:

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_1 + b\dot{\delta}_1 - g\delta_2 + c\delta_1 &= \Delta_1; \\ \ddot{\delta}_2 + b\dot{\delta}_2 + g\delta_1 + c\delta_2 &= \Delta_2 \end{aligned} \quad (8.79)$$

耗散力减弱了炮弹的陀螺稳定性, 对于形如(8.79)的方程组契塔耶夫在建立了李雅普诺夫函数后严格地证明了这一点。下面将在忽略法向力、马格努斯力影响以及忽略角运动中质心速度改变的条件下确定在赤道阻尼力矩作用下弹丸角运动的特征。在方程组(8.79)中

$$b = V\bar{m}_D = f_7, \quad g = 2\alpha, \quad c = -V^2\bar{m}_M = -f_4$$

引入复攻角 $\delta = \delta_2 + i\delta_1$, 将 f_4 表示成 $f_4 = \alpha^2(1 - \sigma)$, 则方程(8.79)改写成如下形式:

$$\ddot{\delta} - 2[i\alpha - \frac{f_7}{2}]\dot{\delta} - \alpha^2(1 - \sigma)\delta = 0 \quad (8.80)$$

此方程的一般解为

$$\delta = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (8.81)$$

式中 C_1 和 C_2 是由起始条件决定的常系数; 而

$$\lambda_{1,2} = i\alpha - \frac{f_7}{2} + i\alpha \sqrt{\sigma} \left[1 - \frac{1}{\sigma} \left[\frac{f_7}{2\alpha} \right]^2 + i \frac{2}{\sigma} \left[\frac{f_7}{2\alpha} \right] \right]^{1/2} \quad (8.82)$$

是特征方程 $\lambda^2 - (2i\alpha - f_7)\lambda - \alpha^2(1 - \sigma) = 0$ 的根。考虑到量 $f_7/2\alpha$ 比 1 小得多, 故对于 λ_i 的表达式可取近似值, 令

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{1}{\sigma} \left[\frac{f_7}{2\alpha} \right]^2 + i \frac{2}{\sigma} \left[\frac{f_7}{2\alpha} \right] \right]^{1/2} &\approx \left[1 + i \frac{2}{\sigma} \left[\frac{f_7}{2\alpha} \right] \right]^{1/2} \\ &\approx \left[1 + i \frac{1}{\sigma} \left[\frac{f_7}{2\alpha} \right] \right] \end{aligned} \quad (8.83)$$

考虑到(8.83)式后改写 λ 的表达式如下:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= i\alpha(1 + \sqrt{\sigma}) - \frac{f_1}{2}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right]; \\ \lambda_2 &= i\alpha(1 - \sqrt{\sigma}) - \frac{f_1}{2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right]\end{aligned}\quad (8.84)$$

设 $C_1 = r_1 e^{i\epsilon_1}$, $C_2 = r_2 e^{i\epsilon_2}$, 可将一般解(8.81)表示成如下形式:

$$\delta = \rho_1 e^{i(\omega_1 t + \epsilon_1)} + \rho_2 e^{i(\omega_2 t + \epsilon_2)} \quad (8.85)$$

式中

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \alpha(1 + \sqrt{\sigma}) & \omega_2 &= \alpha(1 - \sqrt{\sigma}) \\ \rho_1 &= r_1 e^{-\frac{f_1}{2}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right]} & \rho_2 &= r_2 e^{-\frac{f_1}{2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right]}\end{aligned}$$

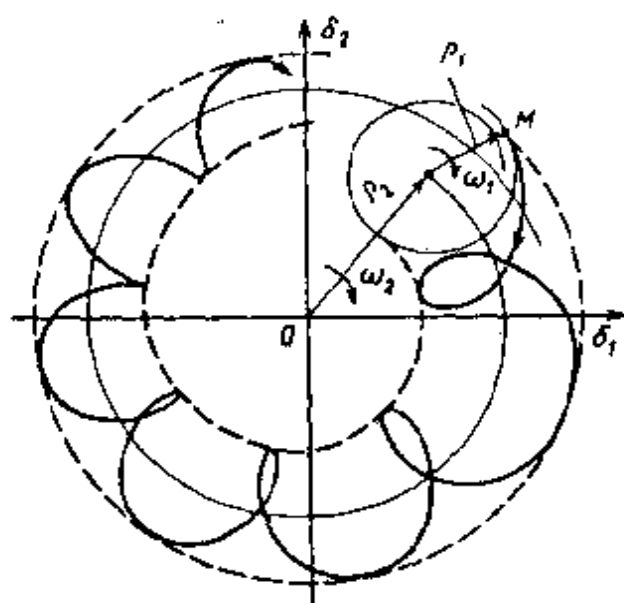


图 8.7 考虑赤道阻尼力矩时, 高速旋转弹在弹道直线段上的 $\delta = f(\nu)$ 关系曲线

量 ρ_1 和 ρ_2 分别是弹丸快运动和慢运动的振幅(见图 8.7)。因此, 弹轴慢圆运动的半径随时间增长而快圆运动的半径则随时间减小, 因而赤道阻尼力矩的影响首先表现为快运动振幅衰减而慢运动振幅增大。这样, 方程组(8.79)的渐近特性就由所得到的

的近似解定性地予以证实。

下面研究在线性有势力、耗散力、陀螺力和非保守位置力作用下弹丸运动的一般情况。我们指出, 最后的这个力是由马格努斯力矩以及弹丸旋转和升力的共同影响所造成的($p = 2\alpha V(\bar{m}_{Ma} - \bar{c}_N)$)。

这时方程组(8.64)的特征方程具有如下形式:

$$\lambda^4 + 2b\lambda^3 + (g^2 + b^2 + 2c)\lambda^2 + (cb - gp) \cdot 2\lambda + c^2 + p^2 = 0 \quad (8.86)$$

如果它满足古尔维茨定理的条件,则特征方程的根将具有负实部。在现在的情况下,此条件可写成如下形式:

$$\begin{aligned} 2b > 0 \quad g^2 + b^2 + 2c > 0 \quad cb - gp > 0; \\ c^2 + p^2 > 0; \end{aligned} \quad (8.87)$$

$2b(g^2 + b^2 + 2c)(c^2 + p^2) - (cb - gp)^2 - 4b^2(c^2 + p^2) > 0$
注意到 $b = V(\bar{c}_N + \bar{m}_D) > 0, g = 2\alpha(1 + \bar{c}_{Ma}) > 0, c = -(4\alpha^2\bar{c}_{Ma} + V^2\bar{m}_M) < 0$, 可以看出, 不等式组(8.87)的第一和第四个不等式是自然成立的, 而第三个不等式可写成如下形式:

$$-|c|b - gp > 0$$

它只有在 $p = 2\alpha V(\bar{m}_{Ma} - \bar{c}_N) < 0$ 时才能成立。首先, 当 $\bar{m}_{Ma} < \bar{c}_N$ (马格努斯力的作用点位于质心和弹顶之间) 时这是可能的(在右旋情况下), 或者当 $\bar{m}_{Ma} < 0$ (马格努斯力的作用点自弹丸头部起位于质心之后) 时也是可能的。

马格努斯力矩是系统(8.64)中存在非保守位置力的物理前提, 在满足上述条件时它有助于平衡状态(8.73)的稳定性, 如果不满足这些条件, 则马格努斯力矩可以破坏平衡状态的稳定性。对于系统(8.64)可以建立起李雅普诺夫函数, 用它来证明方程(8.73)的运动稳定性以及确定为使系统运动稳定应加在系统参数上的条件。

§ 8.2 尾翼弹和迫击炮弹相对质心的运动

8.2.1 尾翼式旋转弹的角运动

对于尾翼弹或无控火箭, 常令其绕纵轴旋转, 其目的是为了减小外形不对称和推力偏心对质心运动的影响, 也即为了减小由这些因素产生的散布, 带有这种旋转的火箭和炮弹称为低速旋转弹。

尾翼式旋转弹的运动方程就其构造来说与旋转稳定弹的运动方程是一样的, 只须将其中空气动力翻转力矩改为稳定力矩就行了, 改变方程中相应项的符号后得

$$\delta_1 + V(\bar{c}_N + \bar{m}_D)\dot{\delta}_1 - 2\alpha(1 + \bar{c}_{Ma})\dot{\delta}_2 -$$

$$\begin{aligned}
(4\alpha^2 \bar{c}_{Ma} - V^2 \bar{m}_M) \delta_1 + 2\alpha V (\bar{m}_{Ma} - \bar{c}_N) \delta_2 &= -2\alpha V^{-1} g \cos \theta; \\
\ddot{\delta}_2 + V(\bar{c}_N + \bar{m}_D) \dot{\delta}_2 + 2\alpha(1 + \bar{c}_{Ma}) \dot{\delta}_1 - \\
(4\alpha^2 \bar{c}_{Ma} - V^2 \bar{m}_M) \delta_2 - 2\alpha V (\bar{m}_{Ma} - \bar{c}_N) \delta_1 &= \bar{m}_D g \cos \theta; \\
\dot{\alpha} &= V^2 \bar{m}_{on} - V \bar{m}_I \dot{\alpha}
\end{aligned} \quad (8.88)$$

在方程组(8.88)的最后一个方程中增加了一项 $V^2 \bar{m}_{on} = \frac{\pi \Pi_{ON}}{2}$ 。

$\frac{d^2 l}{cg} V^2 H(y) m_{on}$, 此项表征了由斜置尾翼产生的力矩。必须注意的是, 气流对单个尾翼面的“撞击”角以及由此产生的力矩既与弹丸的平动速度有关, 也与它绕纵轴旋转的角速度有关。此外在有空间攻角时, 由于稳定尾翼的翼面有“迎风”和“背风”之分, 可以产生非对称(不相同)的力矩, 在详细分析斜置尾翼弹的角运动时, 这些因素都必须加以考虑。

下面研究仅有稳定力矩时旋转弹丸的运动, 方程(8.88)的头两个方程将有如下形式:

$$\ddot{\delta}_1 - 2\alpha \dot{\delta}_2 + f_4 \delta_1 = 0 \quad \ddot{\delta}_2 + 2\alpha \dot{\delta}_1 + f_4 \delta_2 = 0 \quad (8.89)$$

式中 $f_4 = V^2 \bar{m}_M$ 。就像解方程(8.11)一样解此方程组, 得

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \rho_1 \sin(\omega_1 t + \epsilon_1) + \rho_2 \sin(-\omega_2 t + \epsilon_2); \\
\delta_2 &= \rho_1 \cos(\omega_1 t + \epsilon_1) + \rho_2 \cos(-\omega_2 t + \epsilon_2)
\end{aligned} \quad (8.90)$$

式中 $\omega_1 = \alpha(\sqrt{\sigma_0} + 1)$, $\omega_2 = \alpha(\sqrt{\sigma_0} - 1)$, $\sigma_0 = 1 + f_4/\alpha^2$ 。积分常数 $\rho_1, \rho_2, \epsilon_1, \epsilon_2$ 由起始条件确定。在一般起始条件情况下 $t=0$ 时 $\delta_1 = \delta_{10}$, $\dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_{10}$, $\delta_2 = \delta_{20}$, $\dot{\delta}_2 = \dot{\delta}_{20}$, 这些常数将由如下的表达式求得:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \frac{1}{2\alpha \sqrt{\sigma_0}} \sqrt{(\dot{\delta}_{20} - \omega_2 \delta_{10})^2 + (\dot{\delta}_{10} + \omega_2 \delta_{20})^2} \\
\rho_2 &= \frac{1}{2\alpha \sqrt{\sigma_0}} \sqrt{(\dot{\delta}_{20} + \omega_1 \delta_{10})^2 - (\dot{\delta}_{10} - \omega_1 \delta_{20})^2} \\
\operatorname{tg} \epsilon_1 &= -\frac{\dot{\delta}_{20} - \omega_2 \delta_{10}}{\dot{\delta}_{10} + \omega_2 \delta_{20}} \quad \operatorname{tg} \epsilon_2 = -\frac{\dot{\delta}_{20} + \omega_1 \delta_{10}}{\dot{\delta}_{10} - \omega_1 \delta_{20}}
\end{aligned}$$

弹轴的运动为二圆运动(见图 8.8),慢圆运动的角速度为 $(-\omega_2)$,半径为 ρ_2 ;快圆运动的角速度为 ω_1 ,半径为 ρ_1 ,它们在坐标平面上具有相反的旋转方向。由于这两个运动的叠加,弹轴描绘出圆内摆线,根据不同的初始条件可以得到不同形状的圆内摆线(见图 8.9)。

在考虑赤道阻尼力矩的情况下可将运动方程组归结成一个复数方程

$$\ddot{\delta} + f_7 \dot{\delta} - 2ia\delta + f_4 \delta = 0 \quad (8.91)$$

像积分方程(8.80)一样积分此方程,得到如下的一般解:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \rho_1 \sin(\omega_1 t + \epsilon_1) + \rho_2 \sin(-\omega_2 t + \epsilon_2); \\ \delta_2 &= \rho_1 \cos(\omega_1 t + \epsilon_1) + \rho_2 \cos(-\omega_2 t + \epsilon_2) \end{aligned} \quad (8.92)$$

式中

$$\rho_1 = r_1 e^{-\frac{f_7}{2} \left[\frac{\sqrt{\sigma_0} + 1}{\sqrt{\sigma_0}} \right] t} \quad \rho_2 = r_2 e^{-\frac{f_7}{2} \left[\frac{\sqrt{\sigma_0} - 1}{\sqrt{\sigma_0}} \right] t}$$

由解可见,快、慢圆运动的振幅都随时间减小,在 $\delta_2 o \delta_1$ 平面上由映象点描出的曲线是内摆线类型的曲线(见图 8.9)。半径比 $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right) \exp[f_7 t / \sqrt{\sigma_0}]$ 随时间单调增加。为了分析其它扰动力对尾翼弹运动稳定性的影响,可将方程组(8.88)的头两个方程写成(8.64)式的形式,其中矩阵 B 、 G 和 P 的元素表达式保持不变,但矩阵 C 的元素改为

$$c = -(4\alpha^2 \bar{c}_{Ma} - V^2 \bar{m}_M)$$

也即在尾翼式旋转弹上也像在非尾翼弹上一样,作用着有势力、陀螺力、耗散力和非保守位置力,弹丸在单一有势力作用下的运动将是稳定的。

关于陀螺力和耗散力对平衡状态(8.73)稳定性的影响问题由托马斯-泰塔-契塔耶夫第二和第三定理给出了回答:如果系统的孤立平衡状态在单一有势力作用下是稳定的,则在加上任意陀螺力和耗散力后平衡状态的稳定性将保持不变;如果系统在单一有势力作用下的孤立平衡状态是稳定的,则在增加任意陀螺力和具有完全耗

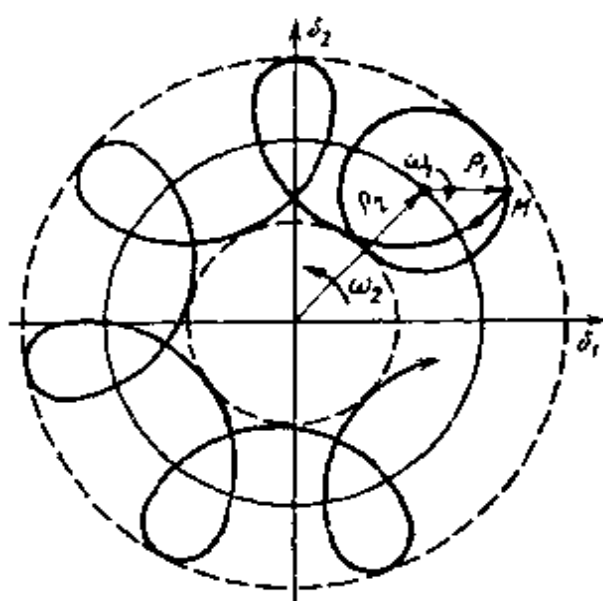


图 8.8 尾翼旋转弹的弹轴
在图面上的运动

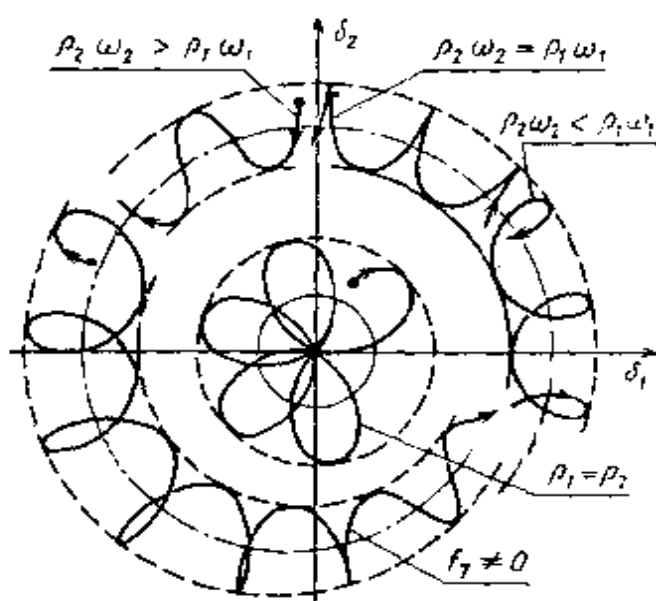


图 8.9 对于各种起始条件,不考虑
和考虑赤道阻尼力矩时平面
映象点的可能轨迹

散性的阻力后将变成渐近稳定的。

因此,对于静稳定弹,使其绕纵轴旋转在一定意义下有利于它的稳定,但要把下面将要研究的共振情况除外。非保守势力是由马格努斯力对尾翼旋转弹的作用以及自转和升力的共同影响所造成,这种力趋于破坏弹丸的角运动稳定性,在我们所研究的轴对称弹的情况下,这与矩阵 C 的系数等式($c_1 = c_2 = c$ 见(8.72)式)有关^[76]。

8.2.2 尾翼式非旋转弹的运动

对于常质量和变质量的尾翼式无控弹(迫击炮弹、航空炸弹、火箭等)。为了保证角运动的稳定性,都应有必要的稳定储备量。

尾翼式弹丸的角运动方程组可由空间运动一般方程组获得,但必须考虑到尾翼弹(迫击炮弹)沿着 $\theta(t)$ 很大的曲射弹道运动的可能情况,此时运动方程为

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_1 + V\overline{m}_D\dot{\delta}_1 + V^2\overline{m}_M\delta_1 &= 0; \\ \ddot{\delta}_2 + V\overline{m}_D\dot{\delta}_2 + V^2\overline{m}_M\delta_2 &= -\ddot{\theta} - \overline{m}_D V\dot{\theta} \end{aligned} \quad (8.93)$$

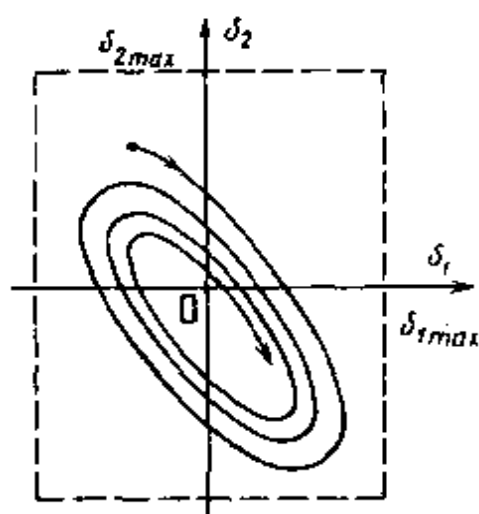


图 8.10 尾翼弹的 $\delta_2 = f(\delta_1)$ 关系曲线

在结构上为展开式尾翼的情况下,在计算 $\dot{\theta}$ 和 $\ddot{\theta}$ 时要考虑升力的影响:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -gV^{-1}\cos\theta + V\bar{c}_N\dot{\delta}_2; \\ \ddot{\theta} &= gV^{-1}\sin\theta \cdot \dot{\theta} + gV^{-2}\cos\theta\dot{V} \\ &\quad + \dot{V}\bar{c}_N\dot{\delta}_2 + V\bar{c}_N\ddot{\delta}_2\end{aligned}\quad (8.94)$$

注意到 $\dot{V} = -\bar{c}_TV^2 - g\sin\theta$, 将 (8.94) 代入到 (8.93) 的第二个方程中,经变换后得

$$\begin{aligned}\ddot{\delta}_2 + (\bar{m}_D + \bar{c}_N)V\dot{\delta}_2 + V^2[\bar{m}_M - \bar{c}_N(\bar{c}_T - \bar{m}_D)]\delta_2 \\ = g\cos\theta(\bar{m}_D + \bar{c}_T + 2gV^{-2}\sin\theta)\end{aligned}\quad (8.95)$$

式中的 $\bar{c}_N(\bar{c}_T - \bar{m}_D)$ 这一项通常不超过 $1\%\bar{m}_M$, 故可以不考虑它, 这样就得

$$\ddot{\delta}_2 + (\bar{m}_D + \bar{c}_N)V\dot{\delta}_2 + V^2\bar{m}_M\delta_2 = g\cos\theta(\bar{m}_D + \bar{c}_T + 2gV^{-2}\sin\theta)\quad (8.96)$$

在弹道曲线段上,尾翼弹纵轴的摆动是相对于动力平衡轴进行的,动力平衡轴的位置由方程 (8.96) 的特解确定:

$$\delta_{2P} = g(\bar{m}_MV^2)^{-1}\cos\theta(\bar{m}_D + \bar{c}_T + 2gV^{-2}\sin\theta)\quad (8.97)$$

在弹道起始段 δ_{2P} 角接近于零,在弯曲弹道的顶点它达到最大值。角 δ_1 和 δ_2 变化的特征如图 8.10 所示。角 δ_1 和 δ_2 的最大振幅由起始条件确定,其大小不应超过最大允许值 $\delta_{1\max}$ 和 $\delta_{2\max}$, 此二值由试验确定。则按照人们熟知的形式应有

$$A_1 < \delta_{1\max} \quad A_2 < \delta_{2\max}\quad (8.98)$$

这两个不等式称为在弹道起始段上振幅有限性条件。

§ 8.3 尾翼式旋转弹的共振

8.3.1 外形、质量轻微不对称及推力偏心对尾翼式旋转弹角运动的影响

在研究尾翼式旋转(低速旋转)弹稳定性时要注意的一个问题是,即使由加工误差产生的很小的非对称性,也可能导致攻角和侧滑角的共振增大,从而使静稳定弹丸变成动态不稳定的。弹丸质量分布以及外形的轻微不对称、还有推力偏心等将产生小的附加力,与理想加工的弹丸相比,它们将改变动力平衡轴的位置^[19,54,122,124,125,129]。

当弹丸相对于它的赤道轴振动的频率与弹丸绕纵轴旋转的频率达到一定的比值时,攻角和侧滑角的共振增大就显示出来。

为了研究共振现象,利用固连坐标系是较方便的,因为在此坐标系里可以简单地确定非对称性的方位。固连坐标系的原点位于弹丸质心,而 OY 和 OZ 轴的指向按等式 $I_{yz} = 0$ 来确定。由惯性张量的分量 $I_{xy} \neq 0, I_{xz} \neq 0$ 就可以考虑弹丸的动不平衡性。在以下书写转动运动方程时将考虑如下的力和力矩:轴向、法向和侧向空气动力;空气动力稳定力矩 M ;空气动力阻尼力矩 M_D ;马格努斯力矩 M_{Ma} ;压心中心偏离固连坐标系 OX 轴产生的力矩 M_Δ ;非对称气动力矩 M_0 ;推力偏心力矩 M_e 等。其中 M_0 由空气动力对称轴(零升力轴)在固连坐标系里转过 α_0, β_0 角来确定。

弹丸质心运动方程(2.48)的右边将有如下分力

$$\Sigma F = R + P = \begin{bmatrix} -qSc_x \\ qSc_y^a \alpha \\ -qSc_z^b \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \cos \epsilon \\ P \sin \epsilon \cos \varphi_1 \\ P \sin \epsilon \sin \varphi_1 \end{bmatrix} \quad (8.99)$$

式中 ϵ 和 φ_1 为确定矢量 P 在固连坐标系中方位的偏心角 ($\sin \epsilon \approx \epsilon$, $\cos \epsilon \approx 1$)。

在现在的情况下,在弹丸相对质心运动方程(2.55)中略去含有横向角速度(ω_y, ω_z)的平方以及乘积的小项后,将得到如下形式的方程:

$$\begin{aligned}
I_x \dot{\omega}_x - I_{xy}(\dot{\omega}_y - \omega_x \omega_z) - I_{xz}(\dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y) &= \Sigma M_{Rx}; \\
I \dot{\omega}_y - (I - I_x)\omega_x \omega_z - (I - I_x)h_\beta \dot{\omega}_x + (I - I_x)h_a \omega_x^2 &= \Sigma M_{Ry}; \\
I \dot{\omega}_z + (I - I_x)\omega_x \omega_y - (I - I_x)h_a \dot{\omega}_x - (I - I_x)h_\beta \omega_x^2 &= \Sigma M_{Rz}
\end{aligned} \quad (8.100)$$

式中 $h_a = I_{xz}/(I - I_x)$; $h_\beta = I_{xy}/(I - I_x)$ 确定了中心主轴在固连坐标系中的位置。

方程(8.100)右边的各分量是

$$\begin{aligned}
\Sigma M_R &= M + M_D + M_{Ma} + M_\Delta + M_0 + M_e \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -qSl \ m_y^\beta |\beta \\ -qSl \ |m_z^\alpha | \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -qSl^2 V^{-1} |m_x^\omega | \omega_x \\ -qSl^2 V^{-1} |m_y^\omega | \omega_y \\ -qSl^2 V^{-1} |m_z^\omega | \omega_z \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ qSl^2 V^{-1} m_{Ma}^\alpha \alpha \\ qSl^2 V^{-1} m_{Ma}^\beta \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} qSc_y^\alpha (\Delta z \alpha + \Delta y \beta) \\ qSc_x \Delta z \\ -qSc_x \Delta y \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} qSlm_{x0} \\ qSlm_{y0} \\ qSlm_{z0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P\epsilon d \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \\ Pdsin\varphi_2 + P\epsilon x_A \sin\varphi_1 \\ -Pdcos\varphi_2 - P\epsilon x_A \cos\varphi_1 \end{bmatrix} \quad (8.101)
\end{aligned}$$

式中 d 和 φ_2 确定了推力的线偏心及其在固连坐标系中的方位; x_A 是自固连坐标系的平面 YOZ 到矢量 P 的作用点之间的距离。力矩 M_0 沿 OX 轴的分量是 $qSlm_{x0}$, 它既可以是随机的、也可以是由故意制造的外形不对称所产生的, 例如由斜置尾翼的外形不对称产生的。

设 $c_y^\alpha = c_z^\beta$, $m_y^\alpha = m_z^\beta$, $m_y^\omega = m_z^\omega$, $m_{Ma}^\alpha = m_{Ma}^\beta$, 再引入复变量 $\delta = \beta + i\alpha$, $\omega = \omega_y + i\omega_z$, $h = h_\beta + ih_a$, 将方程组(8.100)的第二和第三个方程相加, 则转化为复数方程

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= -i[1 - \frac{I_x}{I}]\omega_x \omega + [1 - \frac{I_x}{I}]\dot{\omega}_x h + i[1 - \frac{I_x}{I}]\omega_x^2 h \\
&- i \frac{P}{I} [de^{i\varphi_2} + x_A \epsilon e^{i\varphi_1}] + qSlI^{-1} [m_{y0} + im_{z0} - |m_z^\alpha | \delta \\
&- \frac{l}{V} |m_z^\omega | \omega + \frac{l}{V} \omega_x m_{Ma}^\beta \delta + c_x I^{-1} (\Delta z - i\Delta y)] \quad (8.102)
\end{aligned}$$

如果认为 $\alpha = -V_y/V_x$, $\beta = V_z/V_x$, 经微分后得

$$\frac{\dot{V}_y}{V_x} = -\dot{\alpha} - (\alpha \dot{V}_x/V_x) \quad \frac{\dot{V}_z}{V_x} = \dot{\beta} + (\beta \dot{V}_x/V_x) \quad (8.103)$$

将由方程组(2.48)的第一个方程求得的表达式 $\dot{V}_x/V_x = -\omega_y\beta - \omega_z\alpha - qSc_x(mV_x)^{-1} + P(mV_x)^{-1}$ 代入(8.103)式中得

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}_y}{V_x} &= -\dot{\alpha} - [-\omega_y\beta - \omega_z\alpha - \frac{qS}{mV_x}c_x + \frac{P}{mV_x}]\alpha; \\ \frac{\dot{V}_z}{V_x} &= \dot{\beta} + [-\omega_y\beta - \omega_z\alpha - \frac{qS}{mV_x}c_x + \frac{P}{mV_x}]\beta \end{aligned} \quad (8.104)$$

将方程组(2.48)的第二和第三个方程除以 V_x , 考虑到(8.104)式, 经变换后略去 $\sim \alpha^2$, $\sim \alpha\beta$, $\sim \beta^2$ 等项并取 $V_x \approx V$, 得

$$\begin{aligned} \omega_y &= \dot{\beta} - \omega_z\alpha + [\frac{qS}{mV}(c_y^a - c_x) + \frac{P}{mV}]\beta - \frac{P\epsilon}{mV}\sin\varphi_1; \\ \omega_z &= \dot{\alpha} + \omega_x\beta + [\frac{qS}{mV}(c_y^a - c_x) + \frac{P}{mV}]\alpha + \frac{P\epsilon}{mV}\cos\varphi_1 \end{aligned} \quad (8.105)$$

将(8.105)式变成复数方程, 则得

$$\omega = \dot{\delta} + i\omega_x\delta + [\frac{P}{mV} + \frac{qS}{mV}(c_y^a - c_x)\delta + i\frac{P\epsilon}{mV}]e^{i\varphi_1} \quad (8.106)$$

将(8.106)式对时间微分再代入(8.102)式中, 得到描述弹丸角振动的方程

$$\ddot{\delta} + k_1\dot{\delta} + k_2\delta = k_3 \quad (8.107)$$

式中

$$k_1 = [P + qS(c_y^a - c_x)](mV)^{-1} + qSl(IV)^{-1}|m_z^a| + i(2 - \frac{I_x}{I})\omega_x;$$

$$k_2 = \omega_c^2[(1 - \lambda^2 + \Delta\lambda) + i\mu\lambda];$$

$$k_3 = \omega_c^2[(\beta_0 + \beta_p - \lambda^2 h_a + \nu h_\beta) + i(\alpha_0 + \alpha_p + \lambda^2 h_\beta + \nu h_a)];$$

$$\Delta\lambda = \frac{l}{V} \cdot \frac{|m_z^a|}{|m_z^a|} [\frac{P}{mV} + \frac{qS}{mV}(c_y^a - c_x)] + \frac{1}{\omega_c^2} \cdot \frac{d}{dt} [\frac{P}{mV} + \frac{qS}{mV}(c_y^a - c_x)];$$

$$\mu = \omega_{kp} \{ \frac{l}{V} \cdot \frac{|m_z^a| + |m_{Ma}^\beta|}{|m_z^a|} + \frac{1}{\omega_{kp}^2} [\frac{P}{mV} + \frac{qS}{mV}(c_y^a - c_x)] \} + \frac{\dot{\omega}_x}{\omega_c^2};$$

$$\nu = \frac{\dot{\omega}_x}{\omega_{kp}^2};$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{m_{z0} - c_x \Delta y l^{-1}}{|m_z^a|} = -\alpha_a - \frac{c_x \Delta y}{|m_z^a| l}; \\
\beta_0 &= \frac{m_{y0} + c_x \Delta z l^{-1}}{|m_z^a|} = -\beta_a + \frac{c_x \Delta z}{|m_z^a| l}; \\
\alpha_p &= \frac{P}{I \omega_c^2} (d \sin \varphi_2 + x_A \varepsilon \sin \varphi_1) + \frac{P \varepsilon}{m V} \left[\frac{\omega_x}{\omega_{kp}^2} \cos \varphi_1 + \frac{l}{V} \cdot \frac{|m_z^w|}{|m_z^a|} \sin \varphi_1 \right] \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{\omega_c^2} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{P}{m V} \right] \cos \varphi_1; \\
\beta_p &= \frac{-P}{I \omega_c^2} (d \cos \varphi_2 + x_A \varepsilon \cos \varphi_1) + \frac{P \varepsilon}{m V} \left[\frac{\omega_x}{\omega_{kp}^2} \sin \varphi_1 - \frac{l}{V} \cdot \frac{|m_z^w|}{|m_z^a|} \cos \varphi_1 \right] \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{\omega_c^2} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{P}{m V} \right] \sin \varphi_1
\end{aligned} \tag{8.108}$$

在系数 k_2 和 k_3 的表达式中引入了参数 $\lambda = \omega_x / \omega_{kp}$, 而其中

$$\omega_{kp} = \frac{\omega_c}{\sqrt{1 - I_x/I}} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{q S l |m_z^a|}{I}} \tag{8.109}$$

量 ω_c 常称为弹丸俯仰和偏航角振动的特征频率, 量 ω_{kp} 称为临界角速度, 通常火箭和弹丸的 $I_x/I \ll 1$, 因此 ω_c 与 ω_{kp} 的量值相近。

8.3.2 稳定共振旋转的研究

方程(8.107)是线性、非齐次变复系数方程, 它描述了在固连坐标系中空间攻角 δ 的变化, 为了定性分析此方程的稳态解, 我们认为它的系数在所研究的时间间隔上变化很小, 故而是常数, 则它的一般解有如下形式:

$$\delta = \rho_1 e^{\lambda_1 t} + \rho_2 e^{\lambda_2 t} + \delta_\sigma \tag{8.110}$$

式中 ρ_1, ρ_2 是与起始条件有关的复常数, 而

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k_1}{2} \pm \sqrt{k_1^2 - 4k_2} \tag{8.111}$$

是特征方程的根。 δ_σ 是空间攻角的稳定平衡值, $\delta_\sigma = k_3/k_2$ 。因为 $\delta_\sigma = \beta_\sigma + i\alpha_\sigma$, 考虑到(8.108)式, 则

$$\begin{aligned}
\delta_\sigma &= \frac{(\beta_0 + \beta_p - \lambda^2 h_\sigma + \nu h_\beta) + i(\alpha_0 + \alpha_p + \lambda^2 h_\beta + \nu h_\sigma)}{(1 - \lambda^2 + \Delta\lambda) + i\mu\lambda}; \\
\alpha_\sigma &= \frac{(\alpha_0 + \alpha_p + \lambda^2 h_\beta + \nu h_\sigma)(1 - \lambda^2 + \Delta\lambda) - \mu\lambda(\beta_0 + \beta_p - \lambda^2 h_\sigma + \nu h_\beta)}{(1 - \lambda^2 + \Delta\lambda)^2 + \mu^2\lambda^2};
\end{aligned}$$

$$\beta_e = \frac{(\beta_0 + \beta_p - \lambda^2 h_a + \nu h_p)(1 - \lambda^2 + \Delta\lambda) + \mu\lambda(\alpha_0 + \alpha_p + \lambda^2 h_\beta + \nu h_a)}{(1 - \lambda^2 + \Delta\lambda)^2 + \mu^2 \lambda^2} \quad (8.112)$$

复攻角的模为

$$|\delta_e| = \sqrt{\beta_e^2 + \alpha_e^2} = \sqrt{\frac{(\beta_0 + \beta_p - \lambda^2 h_a + \nu h_p)^2 + (\alpha_0 + \alpha_p + \lambda^2 h_\beta + \nu h_a)^2}{(1 - \lambda^2 + \Delta\lambda)^2 + \mu^2 \lambda^2}} \quad (8.113)$$

攻角和侧滑角与 λ 的大小有关,也即与弹丸绕纵轴的角速度与临界速度之比有关。 $|\delta_e|$ 随参数 λ 变化的特性曲线表示在图 8.11 上,可以证明函数 $\delta_e(\lambda)$ 的极大值在 $\lambda = \pm \sqrt{1 + \Delta\lambda}$ 处。因为 $\Delta\lambda$ 远小于 1,故共振峰的顶点与条件 $\lambda \approx \pm 1$ 相应,也即与 $\omega_x \approx \pm \omega_{kp}$ 相应。对于在弹丸上仅有空气动力不对称的特殊情况($I_{xy} = I_{xz} = \epsilon = d = 0$),得

$$|\delta_e|_{\max} = \frac{\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}}{\mu \sqrt{1 + \Delta\lambda - \frac{\mu^2}{4}}} \quad \text{当 } \lambda = \pm \sqrt{1 + \Delta\lambda - \frac{\mu^2}{2}} \text{ 时}$$

在仅有动不平衡的情况下($\alpha_0 = \beta_0 = \epsilon = d = 0$),则得

$$|\delta_e|_{\max} = \frac{(1 + \Delta\lambda) \sqrt{h_a^2 + h_\beta^2}}{\mu \sqrt{1 + \Delta\lambda - \frac{\mu^2}{4}}} \quad \text{当 } \lambda = \pm \frac{1 + \Delta\lambda}{\sqrt{1 + \Delta\lambda - \frac{\mu^2}{2}}}$$

考虑到通常 $\mu \ll 1$,对上述情况可应用近似关系,得

$$|\delta_e|_{\max} \approx \frac{\delta_0}{\mu \sqrt{1 + \Delta\lambda}} \quad \text{和} \quad |\delta_e|_{\max} \approx \frac{h_0}{\mu} \sqrt{1 + \Delta\lambda}$$

当 $\lambda = \pm \sqrt{1 + \Delta\lambda}$ 时

式中 $h_0 = \sqrt{h_a^2 + h_\beta^2}$; $\delta_0 = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}$ 。

$|\delta_e|$ 的极大值正比于 $1/\mu$,而 μ 的值主要与弹丸的阻尼力矩系数 $|m_z^w|$ 有关,如果 $|m_z^w| \rightarrow 0$,则 $|\delta_e|_{\max} \approx \delta_0/\mu \rightarrow \infty$ 。因 μ 的值通常很小,所以 $|\delta_e|_{\max}$ 的值在数量级上可以大大超过激励它的弱非对称值 (δ_0 或 h_0),因此在参考文献中称这种状态为旋转共振状态。

在进入旋转共振状态时,不仅是平衡攻角和侧滑角的大小发生改变,角运动的特征也将发生本质的变化。为了进行定性分析,我们

将 k_1 和 k_2 的表达式(8.108) 进行简化, 忽略其中升力、阻尼力矩、马格努斯力矩的影响, 并且只研究弹道被动段, 这时特征方程的根将具有如下形式:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}i\left[2 - \frac{I_x}{I}\right]\omega_x \pm \frac{1}{2}\omega_x \sqrt{-\left[2 - \frac{I_x}{I}\right]^2 - 4\bar{\omega}_c^2(1 - \lambda^2)}$$

式中 $\bar{\omega}_c = \omega_c/\omega_x$

在 $\lambda = \omega_x/\omega_{kp} < 1$ (“共振前旋转”) 的情况下

$$\lambda_1 = i\omega_x \left[\frac{1}{2} \sqrt{\left[2 - \frac{I_x}{I}\right]^2 + 4\bar{\omega}_c^2(1 - \lambda^2)} - \frac{1}{2} \left[2 - \frac{I_x}{I}\right] \right] = i|\lambda_1|$$

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -i\omega_x \left[\frac{1}{2} \sqrt{\left[2 - \frac{I_x}{I}\right]^2 + 4\bar{\omega}_c^2(1 - \lambda^2)} + \frac{1}{2} \left[2 - \frac{I_x}{I}\right] \right] \\ &= -i|\lambda_2| \end{aligned}$$

由此二表达式可见, $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, 根的虚部符号相反表明空间攻角的高频分量 $\rho_2 e^{i\lambda_2 t}$ 和低频分量 $\rho_1 e^{i\lambda_1 t}$ 在坐标平面上(见图 8.12) 具有相反

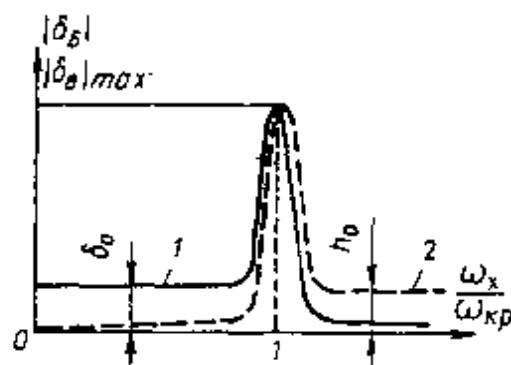


图 8.11 平衡攻角 $\delta_0(\lambda)$ 的变化曲线
1— 有空气动力不对称;
和质量不对称时;
2— 有动不平衡时。

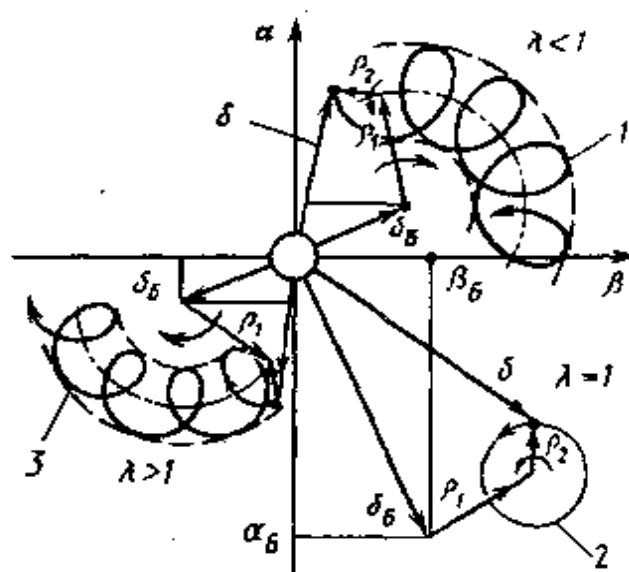


图 8.12 非对称尾翼旋转弹攻角
和侧滑角的变化
1— “共振前旋转” $\lambda < 1$;
2— 共振时 $\lambda \approx 1$;
3— 超共振旋转 $\lambda > 1$ 。

的旋转方向。

在 $\lambda = \omega_x / \omega_{kp} = 1$ (共振旋转) 的情况下, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -i[2 - \frac{I_x}{I}] \omega_x$, 因而 $\delta = \rho_1 + \rho_2 e^{\lambda_2 t} + \delta_0$ 。这也就是说在共振旋转的情况下攻角的变化是具有频率 $|\lambda_2|$ 的单一频率的振动(见图 8.12), 因而速度矢量(点 M) 以及阻力面在固连坐标系中的位置就像固定了一样(精确到振幅 ρ_2)。在再入大气层飞行器上^[36, 22], 这种旋转状态就导致飞行器单侧烧焦。

在 $\lambda = \omega_x / \omega_{kp} > 1$ (“超共振旋转”) 情况下,

$$\lambda_{1,2} = [-\frac{1}{2}i[2 - \frac{I_x}{I}] \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\bar{\omega}_c^2(\lambda^2 - 1) - [2 - \frac{I_x}{I}]^2}] \omega_x$$

这时角运动的特征也表示在图 8.12 上。

8.3.3 共振旋转状态的稳定性

共振可以发生在各个飞行弧段上, 例如在利用斜置尾翼或其它方法使弹丸逐渐旋转起来的情况下, 弹丸绕纵轴旋转的角速度将连续地从零而达到某个稳定值, 在这种情况下就可能穿过临界值, 从而产生大的攻角, 破坏弹丸的绕流状态(直到它失去稳定性)。

但运动方程参数的改变也可以是这样的: 两频率的共振重合只是短时间的, 以致于不会产生大的平衡攻角, 也就是说 $\omega_x \approx \omega_{kp}$ 只是共振的必要条件, 而不是共振现象发生的充分条件。最危险的情况是频率的重合“保持”很长一段时期, 在这种情况下就可以说发生了稳定的共振旋转, 因此最重要的工作是确定共振时发生旋转“俘获”并建立起稳定共振旋转的条件。

下面简单地从物理上解释一下静稳定飞行器在共振时失去稳定性的情况(参见文献[19])。当飞行器相对于与惯量主轴不一致并且与速度矢量 V 构成某个角度的轴旋转时, 作用于其上的除了空气稳定力矩外, 还有离心力产生的惯性力矩 $M_{y_{\text{ин}}} \approx (I - I_x)^2 \omega^2 \beta$ (见图 8.13), 这个力矩(以及与它相类似的力矩 $M_{x_{\text{ин}}}$) 正比于偏差角 β 并力图增大它。

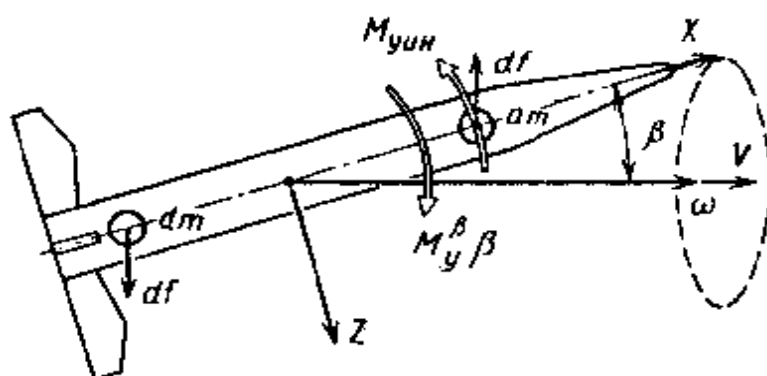


图 8.13 尾翼旋转弹共振时失去稳定性的情况

因此当弹丸以常值倾斜角速度 $\omega = \omega_x = \text{const}$ 旋转时,在其上除了有空气稳定力矩作用外,还有附加的不稳定力矩的作用,此不稳定力矩与倾斜角速度的平方成正比,它减小了静稳定性的有效作用。中立稳定性的条件为

$$\frac{d}{d\beta}(M_{yUH} + M_y) = 0 \quad \text{或} \quad (I - I_x)\omega^2 - qSl|m_y^\beta| = 0$$

由此就得出了临界倾斜角速度的近似公式(8.109)。

旋转共振现象的本质就在于俯仰、偏航和倾斜角运动的相互作用,因此就像分析非线性动力系统的运动一样,必须分析共振条件下弹丸的旋转运动。

以下分析在弹道被动段上当仅有气动非对称时弹丸的运动。在这种情况下,运动方程(8.107)和方程组(8.100)的第一个方程就可写成如下形式:

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \omega_c^2 \nu_1 \dot{\beta} + \omega_c^2 (1 + \Delta\lambda - \lambda^2) \beta - [2 - \frac{I_x}{I}] \omega_{kp} \lambda \dot{\alpha} - \omega_c^2 \mu \lambda \alpha &= \omega_c^2 \beta_0; \\ \ddot{\alpha} + \omega_c^2 \nu_1 \dot{\alpha} + \omega_c^2 (1 + \Delta\lambda - \lambda^2) \alpha + [2 - \frac{I_x}{I}] \omega_{kp} \lambda \dot{\beta} + \omega_c^2 \mu \lambda \beta &= \omega_c^2 \alpha_0; \\ \dot{\lambda} + \bar{m}_x^\omega \lambda &= \omega_{kp}^{-1} (\bar{m}_x + \bar{c}_y^\omega \Delta z \alpha + \bar{c}_y^\omega \Delta y \beta) \end{aligned} \quad (8.114)$$

在以上几个方程中已将变量 ω_x 换成变量 $\lambda = \omega_x / \omega_{kp}$ 并且已记

$$\begin{aligned} \nu_1 &= k_1 / \omega_c^2 & \bar{m}_x^\omega &= qSl^2(I_x V)^{-1} |m_x^\omega| \\ \bar{m}_x &= qSlI_x^{-1} m_{x0} & \bar{c}_y^\omega &= qSI_x^{-1} c_y^\omega \end{aligned}$$

方程组(8.114)对于相坐标 $\beta, \dot{\beta}, \alpha, \dot{\alpha}, \lambda$ 是5阶变系数非线性方程,如果认为在共振现象发展的时间内方程组的系数变化很小,从而

可以当作常数,则由方程(8.114)给出的动力学系统属于莫尔斯-斯米伊尔(Морс-Смейл)一类系统^[5,7,81],故在弹道上其相空间的分类结构由奇点的数量、位置和类型确定,这些奇点将由描述该系统稳定运动(平衡状态)的如下代数方程的解求得:

$$\begin{aligned}(1 + \Delta\lambda - \lambda^2)\beta - \mu\lambda\alpha &= \beta_0; \\ (1 + \Delta\lambda - \lambda^2)\alpha + \mu\lambda\beta &= \alpha_0; \\ \bar{m}_x^{\omega}\lambda &= \omega_{kp}^{-1}(\bar{m}_x + \bar{c}_y^a\Delta z\alpha + \bar{c}_y^a\Delta y\beta)\end{aligned}\quad (8.115)$$

为明确起见,我们研究共面非对称情况: $\Delta y = \alpha_0 = 0; \beta_0 \neq 0; \Delta z \neq 0$ (见图 8.14)。

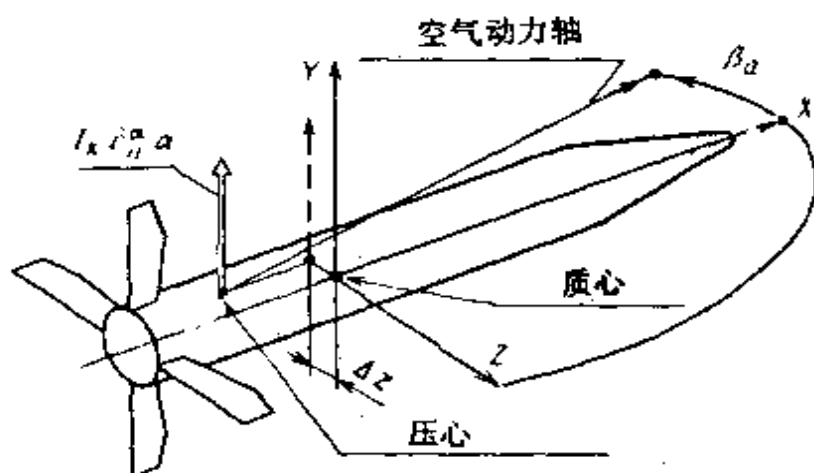


图 8.14 在共面气动非对称的情况下坐标轴方位图

对 α 和 β 求解方程(8.115)得

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{(1 + \Delta\lambda - \lambda^2)\beta_0}{(1 + \Delta\lambda - \lambda^2)^2 + \mu^2\lambda^2}; \\ \alpha &= \frac{-\mu\lambda\beta_0}{(1 + \Delta\lambda - \lambda^2)^2 + \mu^2\lambda^2} = F_1(\lambda); \\ \alpha &= \frac{\bar{m}_x^{\omega}\omega_{kp}}{\bar{c}_y^a\Delta z}\lambda - \frac{\bar{m}_x}{\bar{c}_y^a\Delta z} = F_2(\lambda)\end{aligned}\quad (8.116)$$

对 λ 求解方程 $F_1(\lambda) = F_2(\lambda)$ 得

$$\frac{\bar{m}_x^{\omega}\omega_{kp}}{\bar{c}_y^a\Delta z}\lambda - \frac{\bar{m}_x}{\bar{c}_y^a\Delta z} = \frac{-\mu\lambda\beta_0}{(1 + \Delta\lambda - \lambda^2)^2 + \mu^2\lambda^2}\quad (8.117)$$

并将所得到的实根 λ , 分别代入 α 和 β 的表达式中即求得方程(8.114)的各个奇点。

方程(8.117)是关于 λ 的 5 次多项式,根据参数的不同它可以有

1~5个根,故方程(8.117)的奇点数也相应是可变的。在图8.15中表明了系统存在与 $\lambda_i (i=1,2,3)$ 相应的三个奇点的情况。函数 $F_2(\lambda)$ 可以看作是取决于非对称参数 Δz 的单参数直线族(见图8.15a),在 Δz 改变时它的斜率也随之改变。在每个奇点邻域内相空间的局部结构和相轨迹的性态特征取决于奇点的类型。在系统每个奇点的邻域里线性化根的分布以及当 Δz 减小时它们在(Re-Im)平面上移动的方向表示在图8.15中。因为相空间的维数和方程的阶数等于5,所以要描述奇点邻域里相轨迹的性态是很困难的。在图8.15中表示了系统参数实际可实现的一种情况,这时系统有三个奇点,其中第一和第三个奇点是广义焦点,第二个位于共振峰的外斜面上,它是不稳定的,按照多维系统奇点分类法(见[82])它是广义鞍点。图8.15上给出了三阶系统在广义焦点和鞍点邻域内的局部相轨迹图画以及相轨线性态特征的概念。

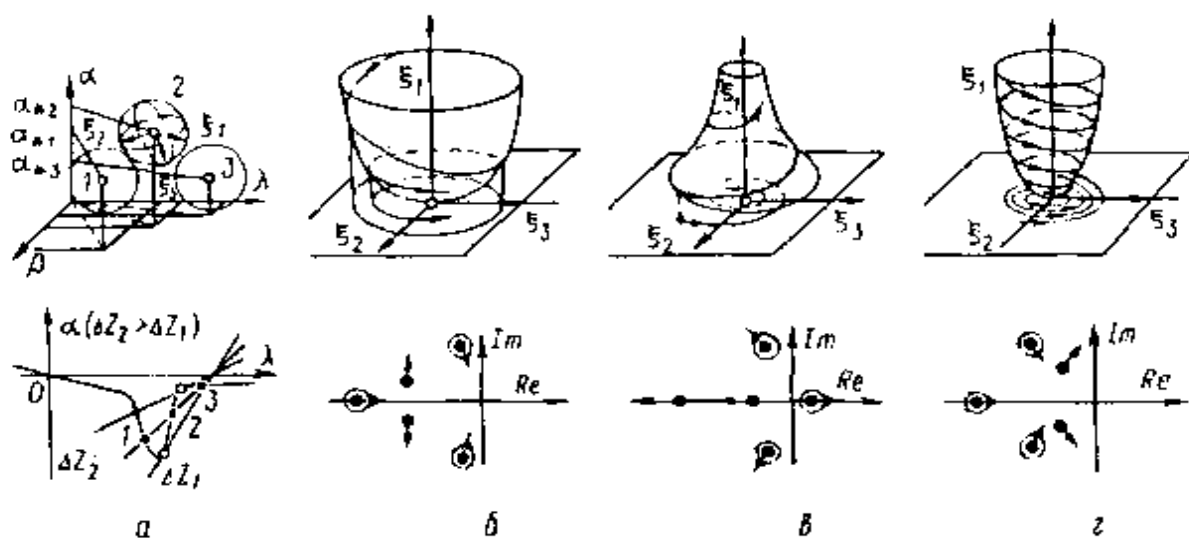


图8.15 在方程(8.114)奇点的邻域内相轨迹的性态特征

a—3个实奇点的情况; b—在第一个奇点邻域里的相轨迹特征; c—在决定共振的第二个奇点邻域里的情况; d—在第三个奇点邻域里的情况。

上述结构与位于区间 $\Delta z_2 < \Delta z < \Delta z_1$ 的参数值相应,这里 Δz_1 和 Δz_2 是参数 Δz 的分叉值,与以直线 $F_2(\lambda)$ 切关系式 $F_1(\lambda)$ 的共振峰情况相应(见图8.15a)。稳定共振旋转状态由位于共振峰内侧面上的稳定奇点1确定(见图8.15a)。

图8.16说明了在以斜置尾翼使弹丸绕纵轴加快旋转的情况下,

尾翼式非对称弹在被动段上、在稳定共振旋转中的“俘获”效应。如果弹丸的倾斜运动与俯仰和偏航运动不相互作用,则 ω_x 的稳定值要大大超过 ω_{xp} (见图 8.16 中的曲线 I)。

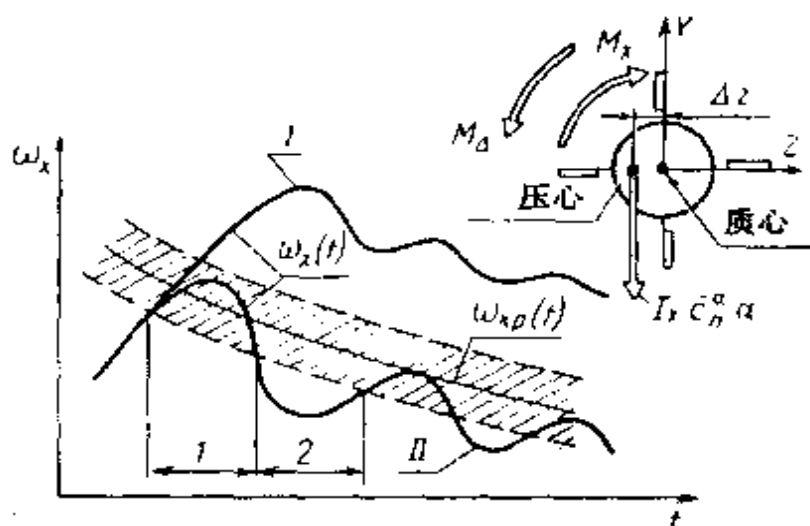


图 8.16 在以斜置尾翼导转时尾翼弹的共振“俘获”

由于运动的交连就出现了下述情况:当在非对称力矩作用下 ω_x 达到临界值时就发生了攻角和侧滑角的共振增大,于是产生了倾斜附加力矩 $M_\Delta = I_x \ddot{\alpha} \Delta z$ (见图 8.16),此力矩的指向与斜置尾翼 ($\alpha_0 < 0$) 产生的力矩 $M_x = I_x \ddot{\alpha}$ 方向相反 (见图 8.15a),从而使倾斜角速度减小 (见图 (8.16) 的第 1 段)。

在 ω_x 远离临界值以后 (见图 8.16 第 2 段) 攻角减小,而由斜置尾翼产生的力矩又开始增大倾斜角速度 ω_x 一直到临界值。以下的一切又重复这个过程。

因此,在轻微不对称力矩作用下,俯仰、偏航和倾斜运动的交连会导致共振条件在长时间里被“保持”。这种稳定共振旋转状态 (图 8.16 中的曲线 I) 就意味着相轨线落入了决定共振的稳定奇点的吸引域中。

稳定共振旋转状态可发生在如下一些情况里:首先是要弹丸参数 $\bar{m}_x, \bar{m}_y, c_y, \mu, \Delta \lambda$ 和非对称性 β_0 和 Δz 的组合使得在共振峰斜面上存在稳定奇点 (见图 8.15)。因此,如果 $\Delta z > \Delta z_1$ 或 $\Delta z < \Delta z_2$,则在系统里保证不存在共振。其次是运动的起始条件 $(\beta_0, \dot{\beta}_0, \alpha_0, \dot{\alpha}_0, \lambda_0)$ 应使

相轨线落入决定共振的奇点的吸引域里。当参数 Δz 之值减小并接近于分叉值时,稳定的和不稳定的奇点都趋于共振峰的顶点,广义焦点(图 8.17a)变形为退化的结点(图 8.17б),然后是简单的结点(见图 8.17в)。稳定的焦点和稳定的结点是拓扑等价的。在 $\Delta z = \Delta z_1$ 时二奇点重合,形成复杂的“鞍结点”型奇点(见图 8.17г)。这也是一种退化奇点,系统表现为结构不稳定。当参数 Δz 再减小时,奇点消失,矢量场变得平直(见图 8.17д)。

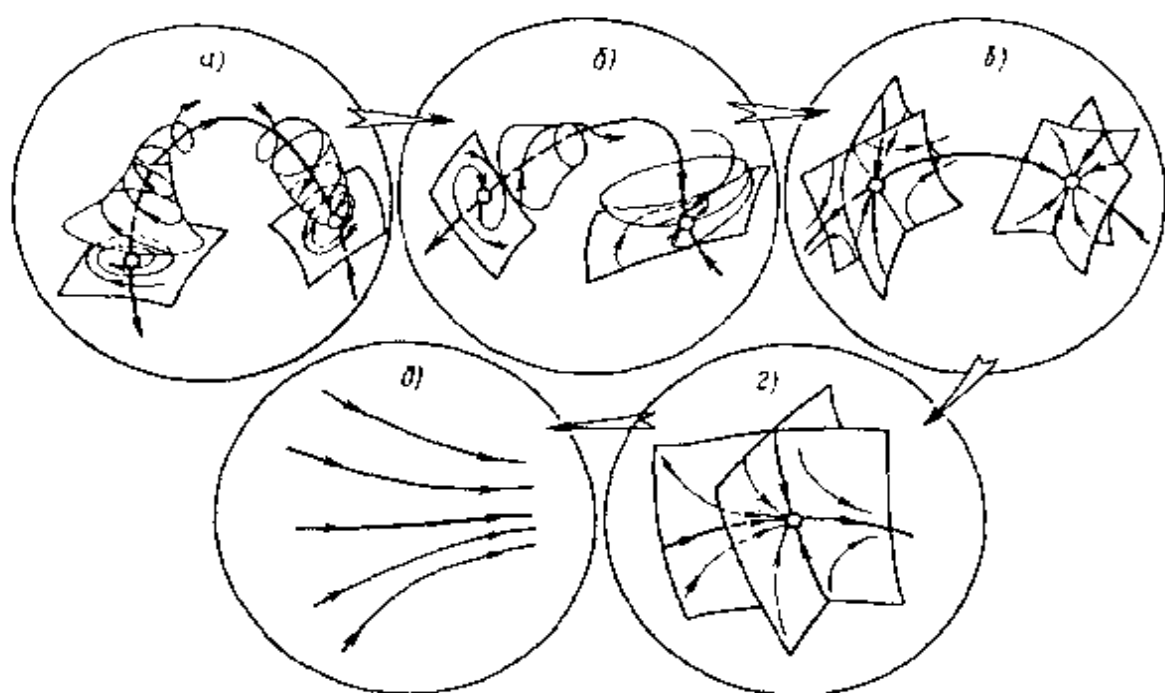


图 8.17 在非对称参数 Δz 改变时系统相空间分解结构的改变

§ 8.4 沿弹道降弧段的自由飞行

8.4.1 飞行器再入大气层的运动

在弹道降弧段上无控飞行器的运动有时会变得杂乱无章,好像存在很强的扰动一样,这就使我们必须研究在各种预先未知的起始条件下飞行器的运动问题。

飞行器降落时,其攻角、侧滑角以及质心运动特征都会发生重大的变化,静稳定飞行器在稠密大气层中运动时相对质心的转动运动将逐渐变成攻角和侧滑角不断减小的振动。

描述飞行器运动的、完整的矢量形式方程组具有如下形式:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M} \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V} \quad (8.118)$$

这里如同第一章一样, \mathbf{Q} 为动量矢量, \mathbf{K} 为动量矩矢量, \mathbf{r} 为矢径。

旋转运动和平移运动的特征时间间隔为

$$t_a = 1/\Omega \quad t_v = \Delta r/V \quad (8.119)$$

式中 Ω 为飞行器相对于质心的特征角速度。

我们用 Δr 和 ΔV 分别表示在时间间隔 t_v 内质心运动矢径和速度的特征改变量,并在方程(8.118)中按下面的式子引入无因次变量

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= m\Delta V\tilde{\mathbf{Q}} & \mathbf{K} &= ml^2i_x\Omega\tilde{\mathbf{K}} & \mathbf{r} &= \Delta r\tilde{\mathbf{r}}; \\ \mathbf{M} &= |m_{z^n}^c|lF\tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{F} &= F\tilde{\mathbf{F}} & \mathbf{V} &= V\cdot\tilde{\mathbf{V}} \end{aligned} \quad (8.120)$$

式中, $\tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{Q}}, \tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{F}}$ 和 $\tilde{\mathbf{V}}$ 是无因次变量; i_x 是无因次惯性矩; m 是飞行器的质量; $m_{z^n}^c$ 是飞行器的稳定储备量; l 是飞行器的特征长度; F 是力系主矢的模。

在大气中自由飞行时,空气动力的作用超过其它所有力的作用,故可写出

$$F = (mV\Delta V)/\Delta r \quad (8.121)$$

在研究飞行器相对于质心的运动时,取 t_a 作为时间的尺度,则无因次时间为 $\tilde{t} = t/t_a$ 。

在(8.118)式中引入无因次时间并利用(8.119)式,则可将方程组(8.118)改写成如下无因次形式:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\mathbf{K}}}{d\tilde{t}} = \left[\frac{V}{\Omega\Delta r}\right]^2 \frac{m_{z^n}^c}{i_x} \cdot \frac{\Delta V}{V} \cdot \frac{\Delta r}{l} \tilde{\mathbf{M}}; \\ \frac{d\tilde{\mathbf{Q}}}{d\tilde{t}} = \left[\frac{V}{\Omega\Delta r}\right] \tilde{\mathbf{F}} & \frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tilde{t}} = \left[\frac{V}{\Omega\Delta r}\right] \tilde{\mathbf{V}} \end{cases} \quad (8.122)$$

比较(8.122)式和(8.119)式,可以写出

$$V/(\Omega\Delta r) = t_a/t_v$$

对方程(8.122)中 $\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{F}}, \tilde{\mathbf{V}}$ 前的系数数值进行分析表明,对于飞行器

在大气中降落的弹道段, \tilde{M} 前的系数有 1 的量级, 而 \tilde{F} 和 \tilde{V} 前的系数有 $\epsilon = t_a/t_V$ 的量级, 远远小于 1。这就意味着, 在飞行器相对质心运动的特征时间间隔内, 质心本身的运动特征只改变了 ϵ 量级大小。根据这个结果就可将方程组(8.122) 写成如下形式:

$$\frac{dK}{dt} = M \quad \frac{dQ}{dt} = \epsilon F \quad \frac{dr}{dt} = \epsilon V \quad (8.123)$$

式中 ϵ 是小参数。对此方程组我们将用渐近法来研究^[40, 61, 124]。从现在起直到以后都略去无因次记号“ \sim ”。

为了能将方程组(8.118) 写成(8.123) 的形式, 必须满足不等式 $\frac{V}{\Omega \Delta r} \ll 1$ 。

由方程组(8.123) 所确定的运动特征可表示成如下形式:

$$\begin{aligned} V &= V_0(\tau) + \epsilon V_1(\tau, t); \\ \theta &= \theta_0(\tau) + \epsilon \theta_1(\tau, t) \end{aligned} \quad (8.124)$$

式中, $\tau = \epsilon t$ 为迟缓时间; 函数 $V_0(\tau), \theta_0(\tau)$ 等是不考虑相对质心旋转运动影响时确定的质心弹道参数; $V_1(\tau, t), \theta_1(\tau, t)$ 等是由飞行器相对质心运动确定的项。经过一系列变换和简化后, 飞行器相对质心的扰动运动方程组可以归结为与描述攻角变化的方程相近似的形式:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} + M_z(x_1, x_2, \dots, \alpha) + \epsilon f_z(x_1, x_2, \dots, \alpha) \frac{d\alpha}{df} &= 0; \\ \frac{dx_i}{dt} + \epsilon X_i(x_1, x_2, \dots, \alpha) &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \end{aligned} \quad (8.125)$$

式中

$$\begin{aligned} x_1 &= G = \frac{K_x \sin \alpha - K_y \cos \alpha}{I_z} \\ K_x &= I_x \omega_x \quad K_y = I_y \omega_y \end{aligned}$$

是动量矩在相应坐标轴上的投影; $x_2 = r; x_3 = V; x_4 = 0; x_5 = H$ (飞行高度); $x_6 = L_3$ (沿地球表面改变的飞行距离)。

$$\begin{aligned} X_1 &= f_y(\tau, \alpha)G + \{[f_x(\tau, \alpha) - f_y(\tau, \alpha)]\cos \alpha - \frac{Y_a(\tau, \alpha)\sin \alpha}{mV}\}r \\ X_2 &= f_x(\tau, \alpha)r \quad X_3 = \frac{c_{x_a}(\alpha)qS}{m} + g_r \sin \theta \end{aligned}$$

$$X_4 = \frac{g_T \cos \theta}{V} \left[1 - \frac{V^2}{R_3 g_T} \right] \quad X_5 = -V \sin \theta$$

$$X_6 = -\frac{R_3}{R_3 + H} V \cos \theta$$

方程(8.125)的解将可写成延迟时间 τ 和振动相位 φ 的双变量函数。

所形成的方程具有如下形式:

$$\omega^2(\tau) \frac{d^2 \alpha_0}{d\varphi^2} + M_\Sigma[x_{10}(\tau), x_{20}, \dots, \alpha_0] = 0 \quad (8.126)$$

式中 $\omega(\tau) = d\varphi/dt$ 和 $x_{10}(\tau)$ 是任意待定函数,式中的参数 τ 和 φ 可以认为是彼此无关的。假定由方程(8.126)确定的函数 $\alpha_0(\tau, \varphi)$ 具有如下性质:

$$\alpha_0(\tau, \varphi + T_\varphi) = \alpha_0(\tau, \varphi) + \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases}$$

式中 T_φ 是函数 $\alpha_0(\tau, \varphi)$ 对 φ 的“周期”。最右边的被加数取值相应于飞行器关于横轴作振荡运动;取 2π 值相应于飞行器绕该轴的旋转。方程(8.126)称为标准方程^[61]。

对于飞行器作平面运动的简单情况,取 $r = G = 0$,决定攻角变化的方程就可写成如下的形式:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + f_z(t, \alpha) \frac{d\alpha}{dt} + M(t, \alpha) = 0 \quad (8.127)$$

如果对攻角从 0° 到 360° 变化范围内的空气动力特征取三角函数关系,并且设它与飞行器的速度头、横截面积和特征长度成比例,则有

$$\begin{aligned} M_z(t, \alpha) &= qSl(m_z^a)_0 \sin \alpha; \\ Y_a(t, \alpha) &= qS(c_y^a)_0 \sin 2\alpha; \\ X_a(t, \alpha) &= qS(c_{x_a}^a + c_y^a \sin^2 \alpha); \\ M_{xz}^a(t, \alpha) &= \rho_0 S l^2 V (m_{xz}^a)_0 \end{aligned} \quad (8.128)$$

于是方程(8.127)将有如下形式:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + f_z(t, \alpha) \frac{d\alpha}{dt} + g(t) \sin \alpha = 0 \quad (8.129)$$

式中

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{qSl}{I_z} (m_z^a)_0 \\ f_z(t, \alpha) &= \frac{\rho S}{m_0} V [(c_{y_a}^a)_0 \cos 2\alpha - \frac{m_{xz}^a}{i_z}] \end{aligned}$$

$$i_z = \frac{I_z}{m_0 l^2}$$

8.4.2 飞行器再入大气层时角运动的定性分析

非线性方程(8.129)是变系数方程,它不可能得到有限形式的积分。

设飞行器相对质心运动的特征时间比质心运动的特征时间小得多,我们写出方程(8.129)含有小参数的形式:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \varepsilon f_z(\tau, \alpha) \frac{d\alpha}{dt} + M(\tau, \alpha) = 0 \quad (8.130)$$

在 $r_0 = G_0 = 0$ 的情况下标准方程具有如下形式:

$$\omega^2(\tau) \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \varphi^2} + M(\tau, \alpha_0) = 0 \quad (8.131)$$

周期性条件为

$$\frac{d}{dt} \left[\omega(\tau) \int_0^{T\varphi/2} \left[\frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi} \right]^2 d\varphi + \int_0^{T\varphi/2} f_z(\tau, \alpha_0) \omega(\tau) \left[\frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi} \right]^2 d\varphi \right] = 0 \quad (8.132)$$

如果在攻角 $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ 变化范围内引入函数的平均值 $\bar{f}_z(\tau, \alpha)$, 则此方程可简化为

$$\omega(\tau) \int_0^{T\varphi/2} \left[\frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi} \right]^2 d\varphi = D e^{-\int_{\tau_0}^{\tau} \bar{f}_z(\tau) d\tau} \quad (8.133)$$

式中

$$\bar{f}_z(t) = \frac{\int_0^{T\varphi/2} f_z(\tau, \alpha_0) \left[\frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi} \right]^2 d\varphi}{\int_0^{T\varphi/2} \left[\frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi} \right]^2 d\varphi} \quad (8.134)$$

式中 D 为常数。

在正弦力矩表达式的情况下标准方程具有如下形式:

$$\omega^2(\tau) \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \varphi^2} + g(\tau) \sin \alpha = 0 \quad (8.135)$$

这个方程是著名的数学摆方程,它的解具有雅可比椭圆函数的形式。方程(8.135)从 π 到 $-\pi$ 的相平面的形式之一如图(8.18)所示。相交于 $-\pi$ 和 $+\pi$ 的曲线形成一条闭合曲线,它将相应于飞行器翻转的域 BД (翻转运动) 与相应于飞行器振荡的域 KД (振荡运动) 分开。对于 BД 域,方程(8.135)的解具有如下形式^{[6], [124]}:

$$\alpha(\tau, \varphi) = \pm 2am\{K[\nu(\tau)]\varphi, \nu(\tau)\} \quad (8.136)$$

式中

$$K(\nu) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi)(1-\nu\xi)}} \quad (8.137)$$

是第一类完全椭圆积分; $am[K(\nu), \varphi, \nu]$ 是雅可比振幅; ν 是模的平方。

任意函数 $\omega(\tau)$ 由下面的方程确定:

$$\omega(\tau) = \frac{1}{K[\nu(\tau)]} \sqrt{\frac{g(\tau)}{\nu(\tau)}} \quad (8.138)$$

而函数 $\nu(\tau)$ 由如下方程确定:

$$\frac{\sqrt{\nu(\tau)}}{4E(\nu(\tau))} = \frac{\sqrt{g(\tau)}}{D} e^{i\tau_0 \int_z(\tau) d\tau} = \beta(\tau) \quad (8.139)$$

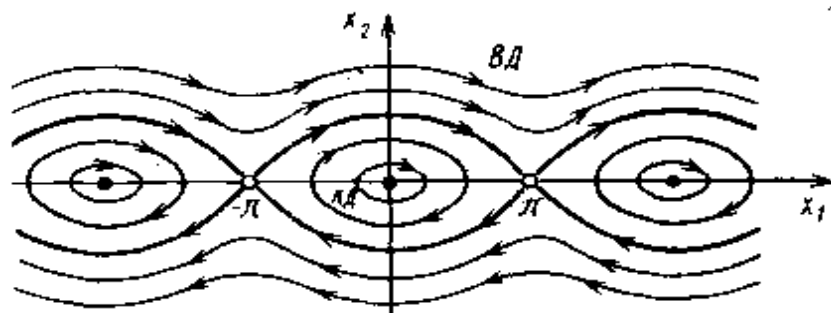


图 8.18 系统的相轨迹图

(BII 域相应于飞行器的翻转运动, KII 域相应于飞行器的振荡运动)

这个方程要用作图法求解。函数 $E(\nu)$ 是第二类完全椭圆积分。分析所列出的这些公式表明, 不等式 $\nu(\tau) < 1$ 是翻转运动存在的条件。在 $\nu(\tau)$ 趋于 1 时, 相平面上的映象点 $(d\alpha/dt; \alpha)$ 趋于分界线 (见图 8.19)。因为分界线通过 $\alpha = \pi, d\alpha/dt = 0$ 的点, 故其方程具有如下形式:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d\alpha}{dt} \right]^2 + 2g(\tau) \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2g(\tau) \quad (8.140)$$

随着大气密度增加, KII 域的范围也增大 (见图 8.18), 而翻转运动将只持续到由方程 $\beta(t_*) = \frac{1}{4}$ 所确定的瞬时 t_* 。对于 $\nu_0 \ll 1$ 的情况此方程变成如下形式:

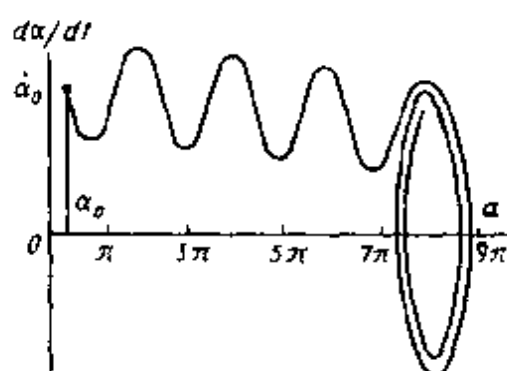


图 8.19 翻转运动向振荡运动转化的图形

$$\frac{\pi}{4} |\omega_{z0}| = \sqrt{g(\tau_*)} e^{\int_{\tau_0}^{\tau_*} f_z(\tau) d\tau} \quad (8.141)$$

翻转运动过渡到振荡运动的情况直观地表示在图 8.19 上。

在研究 KD 域(见图 8.18), 也即研究振荡运动时, 求得标准方程(8.135) 的解如下:

$$\alpha(\tau, \varphi) = 2 \arcsin \{ \sqrt{\nu(\tau) \operatorname{sn}[K[\nu(\tau)] \varphi, \nu(\tau)]} \} \quad (8.142)$$

φ 前面的系数应这样来选择: 使周期 $K[\nu(\tau)]$ 与 φ 无关。任意函数 $\omega(\tau)$ 和 $\nu(\tau)$ 由以下方程确定

$$4[E(\nu) - (1 - \nu)K(\nu)] = \frac{De^{\int_{\tau_0}^{\tau_*} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt{g(\tau)}} = \frac{1}{\beta(\tau)},$$

$$\omega(\tau) = \sqrt{g(\tau)} / (K[\nu(\tau)]) \quad (8.143)$$

在飞行器下降时 $g(\tau)$ 随空气密度 ρ 的增加而增加, 在达到稠密大气时 $g(\tau)$ 达到极大, 此后由于飞行速度 V 减小它又开始减小。因此在稠密大气层中运动时 $\alpha_{\max}(\tau)$ 不超过 1 rad , 从而可利用近似公式

$$K(\nu) \approx \frac{\pi}{2} [1 + \frac{\nu}{4}] \quad E(\nu) \approx \frac{\pi}{2} [1 - \frac{\nu}{4}] \quad \nu = [\frac{\alpha_{\max}}{2}]^2 \quad (8.144)$$

得到如下形式的计算关系:

$$\alpha_{\max}(\tau) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_*} f_z(\tau) d\tau}}{\sqrt{g(\tau)}} \sqrt{\frac{4D}{\pi}} \quad (8.145)$$

$$\alpha_{\max}^{(\varphi)}(\tau) = \sqrt{g(\tau)} \alpha_{\max}(\tau) \quad T(\tau) = \frac{2\pi}{\sqrt{g(\tau)}} \quad (8.146)$$

式中 $T(\tau)$ 为振荡运动的瞬时周期。

如果飞行器在进行制动时其速度从超声速变到亚声速,则在马赫数 $M \approx 1$ 时,飞行器的空气动力特征出现非线性,它将明显地加剧不稳定飞行状态的不稳定现象,甚至可能造成飞行器翻倒。作为这种非线性的例子,在方程(8.130)中可以取关系式

$$M(\tau, \alpha) = g(\tau)\alpha - b(\tau)\alpha^3 \quad (8.147)$$

式中 $g(\tau) > 0, b(\tau) \geq 0$ 。

考虑到(8.147)式,将标准方程(8.131)写成如下形式:

$$\omega^2(\tau) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \varphi^2} + g(\tau)\alpha - b(\tau)\alpha^3 = 0 \quad (8.148)$$

其解可方便地求得为如下形式:

$$\alpha(\tau, \varphi) = \alpha_{\max}(\tau) \operatorname{sn}\{K[\nu(\tau)]\varphi, \nu(\tau)\} \quad (8.149)$$

它与三个任意函数 $\alpha_{\max}(\tau)$, $\nu(\tau)$ 和 $\omega(\tau)$ 有关,这三个函数由下面的关系确定:

$$\begin{aligned} \frac{4\nu^2 L^2(\nu)}{(1+\nu)^3} &= \frac{D^2 b^2(\tau)}{g^3(\tau)} e^{-2\int_0^\tau f_z(\tau) d\tau} = \gamma(\tau); \\ \frac{1}{\omega(\tau)} &= K(\nu) \sqrt{\frac{1+\nu}{g(\tau)}}; \\ \alpha_{\max}(\tau) &= e^{-\frac{1}{2}\int_0^\tau f_z(\tau) d\tau} \sqrt{\frac{D \sqrt{1+\nu}}{\sqrt{g(\tau)} L(\nu)}} \\ L(\tau) &= \frac{(1+\nu)E(\nu) - 1(1-\nu)K(\nu)}{3\nu}; \\ D &= \frac{\pi}{4} \sqrt{g_0 \alpha_{\max 0}^2} \end{aligned} \quad (8.150)$$

式中 g_0 和 $\alpha_{\max 0}$ 是函数的初始值(应该是已知的)。

分析表明,增大表达式(8.148)中的 $b(\tau)$ 或减小 $g(\tau)$ 将导致振幅增加,可能造成飞行器翻倒。

使飞行器在 $\alpha = 0$ 附近稳定而不致发生翻倒所允许的最大起始振幅值为

$$\max \alpha_{\max 0} = \sqrt{\frac{4 \sqrt{2}}{3\pi}} \min \left[e^{\frac{1}{2}\int_0^\tau f_z(\tau) d\tau} \sqrt{\frac{g(\tau)}{g_0}} \sqrt{\frac{g(\tau)}{b(\tau)}} \right] \quad (8.152)$$

分析最后的这个表达式表明,以指数项来考虑的阻尼从本质上

有利于减弱振荡并显著地增大攻角的最大允许值 $\alpha_{\max 0}$ 。

检查题

1. 请讲述稳定无控火箭和炮弹的被动方法的本质,描绘在尾翼火箭和旋转炮弹上空气动力矩作用的图画。分析压心与质心相互位置对飞行器攻角变化和稳定性的影响,解释“静稳定性”概念。叙述在弹道直线段上使高速旋转弹丸正确运动的李雅普诺夫稳定性必要条件。利用(3.161)式求出在弹道起始段上弹丸相对质心运动方程(4.60)以 δ_1 和 δ_2 表示的首次积分。从物理观点出发解释在考虑全部作用力和力矩时高速旋转弹理想正确飞行的李雅普诺夫不稳定性。

2. 请说出在电子计算机上数值积分外弹道方程时选择步长的基本原则,什么样的外弹道问题优先考虑在模拟计算机上求解?

3. 在求解外弹道问题的分析方法中利用了什么样的假设(简化)?在什么样的椭圆轨道点上速度的横向分量达到最大值?比较求解运动方程的分析方法和数值方法的优缺点。

4. 弹道边值问题的提法与柯西问题的提法有什么区别?弹道逆问题的提出和求解的目的是什么?给出一般形式下基准弹道规划变分问题的数学表述。在求解弹道问题时,拉格朗日问题、迈耶问题、波尔兹问题提法上的区别是什么?请叙述别尔曼最优化原理。引进条件最优控制的定义。

5. 高速旋转弹在弹道起始段和弹道顶点章动角限制条件之间的矛盾是什么?解释高速旋转弹形成偏流的物理本质。什么样的空气动力和力矩在弹丸转动运动方程中形成耗散广义力和非保守位置广义力?从稳定性观点出发,试比较在无尾翼和有尾翼弹丸的运动方程中考虑耗散力和非保守位置力会导致什么结果?

6. 解释静稳定旋转弹在共振旋转条件下动态不稳定的原理。在共振条件下弹丸的气动非对称和动不平衡如何表现出来?在共振条件下平衡攻角的数值与哪些因素有关?

第三部分 飞行器的扰动运动和散布特征的确定

第九章 外弹道修正公式和扰动弹道计算

在各因素标准值下计算得到的弹道称为基准弹道或未扰动弹道。

为了估计某个未曾研究过的因素对弹道的影响,必须组成包含这个因素的新的微分方程组。但在大多数情况里对于一般扰动因素的影响并不需要组成新的运动微分方程就可以考虑,例如当所关注的因素已考虑在基本微分方程组中而需要确定它的改变对射击结果的影响时就是如此。如果被研究的参数有了本质的改变,则对这种改变的影响应该在新的改变值下求解基本微分方程组,然后比较在改变值下和在“标准”值下得到的结果,从而得出所寻求的偏差值。

在有些情况里也可以将基准弹道的解对那些不含在基本微分方程组中的因素的影响进行修正,而不必组成包含这些因素的新的微分方程。

实际中常遇到的情况是,一定的参数值与其标准值之间的偏差不大,而在大多数情况下参数的小偏差只引起弹道诸元的小变化,这就允许利用各种简化方法和关系式来确定弹道诸元的改变量,从而确定扰动因素对未扰动弹道特征的影响。

§ 9.1 修正理论的基本原理

9.1.1 修正的概念

将由某个因素引起的运动参数或弹道诸元的改变量取相反的符

号后就称为修正量,这些修正量通常要引入到火箭和炮弹任一弹道点的质心运动参数中去。

图 9.1 中表示了无控火箭的未扰动弹道主动段和扰动弹道主动段。由某个确定的因素或一组因素在发动机工作结束瞬时引起的弹道参数改变是: δx_e ——由实际条件引起的坐标 x_e 的改变量; δy_e ——坐标 y_e 的改变量; δV_e ——弹丸质心速度改变量; δt_e ——发动机工作时间改变量等等。参数的改变量也可以对基准弹道和扰动弹道上任一给定了相同运动特征(时间、速度、横坐标、纵坐标等)的点确定,例如未扰动弹道上的 b 点相应于扰动运动弹道上与点 b 时间相同的点 e ,这时在点 b 处的弹道扰动量将是 $\delta x_e, \delta y_e, \delta V_e$ 等。在给定条件 $y = \text{const}$ 时,点 a 与 c 相应,则得到弹道在 a 点处的扰动量为 $\delta x_y, \delta V_y, \delta \theta_y$ 。

如果取条件 $x = \text{const}$,则点 a 将与点 d 相应,而点 a 处弹道诸元的改变量将是 $\delta y_x, \delta V_x, \delta t_x$ 等。对于野战火炮和“地—地”类火箭,通常要确定在全射程上和射击方向上的修正。在射击准备时将这些修正量赋予在标准条件下计算出的初始值上;而在处理实际条件得到的射击结果时,则将这些修正量赋予实验数据,以便将其转化到标准条件上去。在个别地方还要引入飞行时间修正,这与利用各种定时装置有关。

9.1.2 修正理论基本公式

弹道诸元或运动特征量可写成如下一般形式:

$$A = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad (9.1)$$

式中 A 为弹道诸元或运动特征量, ξ_i 是某个确定的参数。参数与规定

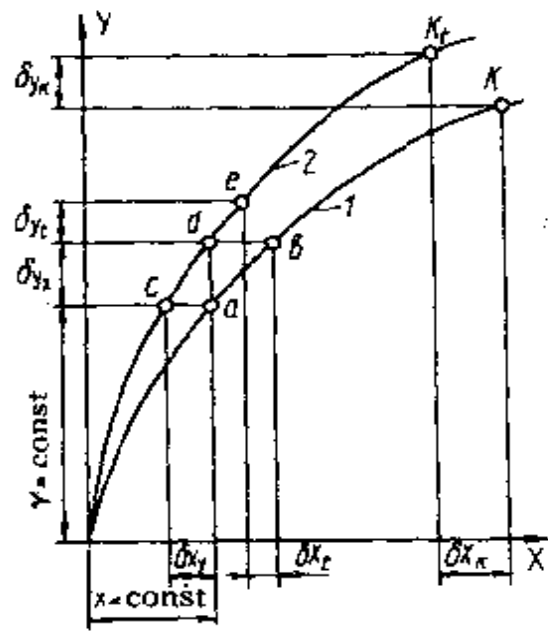


图 9.1 火箭质心运动弹道随某个参数而变化的示意图

1—未扰动弹道; 2—扰动弹道

值的偏差记为 $\delta\xi_1, \delta\xi_2, \dots, \delta\xi_n$, 它们所产生的弹道诸元 A 的变化以 δA 表示。按照函数展开成泰勒级数的一般理论, 弹道诸元的改变量由公式(2.68)确定, 公式中所取的项数取决于所需的计算精度。在求解实际修正理论问题时, 多数只保留展开式中的线性项, 这时所得到的公式与泛函关系式(9.1)的全微分公式相应。如设泛函关系式(9.1)中所含的参数彼此独立, 也即满足叠加原理, 并且在全微分公式中将无穷小增量代之以有限小量, 则可以得

$$\delta A = \frac{\partial f}{\partial \xi_1} \delta \xi_1 + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \delta \xi_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \xi_n} \delta \xi_n \quad (9.2)$$

此公式称为修正理论基本公式, 在此公式中未考虑展开式中高于一阶以上的量, 具体计算中的误差与忽略掉的展开式中的余项有关, 要专门进行研究确定。

(9.2) 式形式的修正公式称为微分修正公式, 按此公式确定的值 δA 即为按微分法计算的弹道诸元改变量。 $\partial f / \partial \xi_i = \partial A / \partial \xi_i$ 在修正理论中称为弹道诸元 A 对参数 ξ_i 偏差的修正系数, 修正系数(弹道导数)在数值上等于所研究的弹道诸元在某个参数增加 1 个单位时相应的改变量。在野战炮兵修正理论里, 表征弹道系数改变时距离改变量的修正系数、初速改变时距离改变量的修正系数以及射角改变时距离改变量的修正系数通常称为主要修正系数。

作为例子, 下面研究在真空条件下火炮系统全水平射程的修正公式。这时全射程由关系式 $x_c = V_0^2 \sin 2\theta_0 / g = f(V_0, \theta_0)$ 确定。在求修正公式时只考虑展开式中的一阶和二阶项, 注意到这个公式中只有两个自变量 V_0 和 θ_0 , 按照(2.68)式中的记号, 有

$$\begin{aligned} \delta x_c = & \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial}{\partial V_0} \delta V_0 + \frac{\partial}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 \right] f(\xi_1, \xi_2) \\ & + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2}{\partial V_0^2} (\delta V_0)^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial V_0 \partial \theta_0} \delta V_0 \delta \theta_0 + \frac{\partial^2}{\partial \theta_0^2} (\delta \theta_0)^2 \right] f(\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \quad (9.3)$$

在确定抛物线理论全射程的公式符号下得

$$\delta x_c = \frac{\partial x_c}{\partial V_0} \delta V_0 + \frac{\partial x_c}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 x_c}{\partial V_0^2} (\delta V_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 x_c}{\partial V_0 \partial \theta_0} \delta V_0 \delta \theta_0 + \frac{\partial^2 x_c}{\partial \theta_0^2} (\delta \theta_0)^2 \right]$$

展开偏导数值后将有

$$\begin{aligned} \delta x_c = & \frac{2V_0 \sin 2\theta_0}{g} \delta V_0 + \frac{2V_0^2 \cos 2\theta_0}{g} \delta \theta_0 + \frac{\sin 2\theta_0}{g} (\delta V_0)^2 \\ & + \frac{4V_0 \cos 2\theta_0}{g} \delta V_0 \delta \theta_0 - \frac{2V_0 \sin 2\theta_0}{g} (\delta \theta_0)^2 \end{aligned} \quad (9.4)$$

后三个被加数(展开式的二次项)是比由展开式线性项决定的前两项更高阶的小量。在大多情况里一般只用到线性项,从而距离的改变量按以下公式计算:

$$\delta x_c = \frac{2V_0 \sin 2\theta_0}{g} \delta V_0 + \frac{2V_0^2 \cos 2\theta_0}{g} \delta \theta_0 \quad (9.5)$$

式中弹道导数(修正系数)等于

$$\frac{\partial x_c}{\partial V_0} = \frac{2V_0 \sin 2\theta_0}{g} \quad \frac{\partial x_c}{\partial \theta_0} = \frac{2V_0^2 \cos 2\theta_0}{g} \quad (9.6)$$

有了修正系数的值后,就容易求得相应的弹道诸元改变量

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial \xi_i} \delta \xi_i \quad (9.7)$$

如设仅有初速改变,则有

$$\delta x_{cV} = \frac{\partial x_c}{\partial V_0} \delta V_0 \quad (9.8)$$

利用全射程公式和(9.6)的第一个公式得

$$\delta x_{cV} / x_c = 2\delta V_0 / V_0$$

也即在抛物线理论相应的假设下,相对距离改变量是相对初速改变量的2倍。以类似的方式进行处理,也可以得到对其它弹道诸元的修正公式。对于各种类型火箭和炮弹弹道的修正公式和弹道导数公式就比上面这个简单例子得出的结论复杂得多,需要用专门的方法处理。

9.1.3 一定参数的定性影响及弹道导数的符号

火炮和火箭系统弹丸全射程弹道导数(修正系数)的符号与某个确定参数增加时对射击距离的影响有关。如果参数增加导致射击距离增加,则修正系数具有正值;如果射击距离随参数的增加而减小,则修正系数的符号是负的。在大多数情况里,修正系数的符号可

以根据参数对射程的定性影响确定,也可以按其定义进行计算来确定。

下面按照定义对主要修正系数的符号进行定性分析。常质量无控弹丸(炮弹)的初速 V_0 和在被动段起点处火箭的速度 V_k 是确定射程的主要参数之一,随着初速的增大射程也增大,因此修正系数具有正值。对于倾斜发射的火箭,其离开发射架的速度(即初速)通常只是主动段终点弹丸质心速度不大的一部分,增加离轨速度将使全弹道纵坐标增加,并且速度 V_k 也增加,因此在其它条件相同的情况下增大起始速度就会导致射程增大,故有 $\partial x_c / \partial V_0 > 0$, 类似地也有 $\partial x_c / \partial V_k > 0$ 。

弹丸的空气动力性质通过特征面积 S 和阻力系数 $c_{x_a}(M)$ 影响射程。增加特征面积,增加沿弹道运动时间内的迎面阻力系数的平均值 $c_{x_{acp}}(M)$ 将使射程减小。显然, $\partial x_c / \partial S < 0$, $\partial x_c / \partial c_{x_{acp}} < 0$ 。如果将 (1.126) 式代入到方程 $dV/dt = -X_a/m - g \sin \theta$ 中去,则得

$$\frac{dV}{dt} = -cH(y)F(V) - g \sin \theta$$

用 $H_{cp}(y)$ 和 $F_{cp}(V)$ 表示弹丸沿弹道运动时间内这些量的平均值,则有 $\partial x_c / [\partial H_{cp}(y)] < 0$ 和 $\partial x_c / [\partial F_{cp}(V)] < 0$ 。对于常质量弹丸,还有主要修正系数之一 $\partial x_c / \partial \alpha < 0$ 。

对于变质量和常质量无控弹丸,射角是一个主要的参数,火箭无控飞行弹道被动段起点处的弹道切线倾角也从本质上影响射程。图 9.2 表明了全射程 x_c 与修正系数 $\partial x_c / \partial \theta_H$ 以及与射角 θ_H 的关系。对于火炮系统 $\theta_H = \theta_0$, 对有控和无控火箭的弹道被动段 $\theta_H = \theta_k$ 。修正系数符号的改变取决于 θ_H 与最大射程角

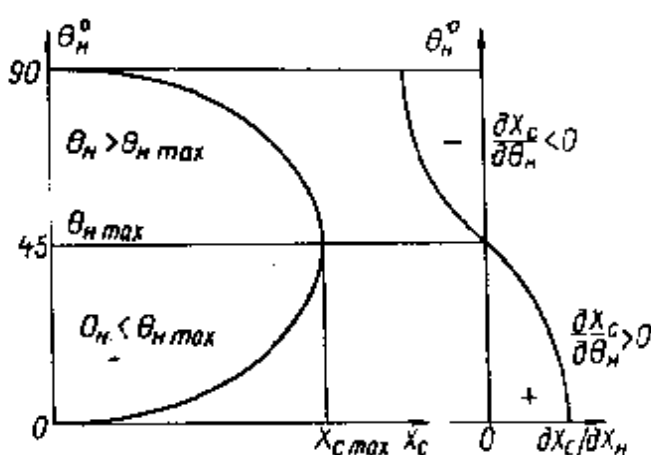


图 9.2 全射程 x_c 及修正系数 $\partial x_c / \partial \theta_H$ 的变化与射角 θ_H 的关系

$\theta_{H\max}$ 之间的关系。如果 θ_H 小于最大射程角, 则修正系数 $\partial x_c / \partial \theta_H > 0$; 如果 θ_H 大于 $\theta_{H\max}$, 则 $\partial x_c / \partial \theta_H < 0$ 。一般可写成 $\partial x_c / \partial \theta_H \geq 0$ 的形式。

在固定速度 V_H 的情况下, $\partial x_c / \partial \theta_H = 0$ 与最大射程以及最大射程角相应。在以接近最大射程角的角度射击时, θ_H 角的微小改变几乎不影响射程。

弹道主动段终点的诸元 x_k, y_k, V_k, θ_k 可以取作确定射程的独立的参数, 量 V_k 和 θ_k 对常质量弹丸的影响上面已研究过。在 $y_k = \text{const}$ 的条件下, 主动段横坐标的增加使弹道向右移动, 在这种情况下增加 x_k 与增加射程 x_c 是一样的, 故有 $\partial x_c / \partial x_k = 1$ 。

增大纵坐标 y_k 将导致射程增大, 这是由于火箭将在更大的高度和更小的大气密度层内运动, 使末段弹道加长的缘故, 故修正系数 $\partial x_c / \partial y_k > 0$ 。弹丸质量的改变以不同的形式影响射程, 对于常质量弹丸, 由方程 $\dot{V} = -\frac{X_a}{m} - g \sin \theta$ 可见, 随着质量的增加, 弹丸的空气阻力加速度减小, 弹丸速度减小变慢而使射程增加, 因而 $\partial x_c / \partial m > 0$ 。

质量较小的炮弹以相同的射击条件(同样的装药)从武器中射出时得到更大的初速, 但在飞行中较轻的炮弹比与之形状相同的重弹更快地消耗掉自己的速度, 因此, 弹丸质量的改变对火炮射程的总影响由专门的修正公式确定(见下一节)。对于火箭主动段弹道

$$\dot{V} = \frac{P - X_a}{m} - g \sin \theta$$

当 $P > X_a$ 时, 随着质量的增大加速度减小, 在其它条件不变的情况下则 V_k 减小, 故修正系数的符号应按具体数据计算来确定。

气象要素的改变引起空气阻力的改变, 空气密度增加则速度头、迎面阻力增加使射程减小, 因而 $\partial x_c / \partial \rho < 0$ 。在发射点以及在弹道上气压的增大按照(1.79)式会导致空气密度增大, 因而 $\partial x_c / \partial h_0 < 0$, $\partial x_c / \partial h_k < 0$ 。

空气温度对射程的影响是较复杂的, 按照(1.79)式, 气温增高会导致空气密度减小, 但 τ 的增大又会导致空气中声速的增大和马赫数减小。在 $c_{x_a}(M)$ 曲线增高的范围内, M 数的减小会导致 $c_{x_a}(M)$ 函数值减小; 但在 $c_{x_a}(M)$ 曲线的下降段它又会使 $c_{x_a}(M)$ 值增大。表

示气温对射程影响的修正系数的值,对于常质量炮弹要按修正公式确定,对于火箭则用下面将要叙述的方法之一用专门的表确定。

9.1.4 初始质量改变时火炮弹丸射程的变化

正如在定性分析弹丸质量变化对其飞行距离影响时所指出的那样,此因素的影响特征不是单值的。考虑到质量(重量)变化对弹道距离有重要影响,故我们要详细地讨论这个问题。

首先指出,弹丸按其重量一般分成 9 个等级,它们列在表 9.1 中。由表可知,在一个弹重符号内,弹丸质量改变在标准(图定)弹重的 $\frac{2}{3}\%$ 范围内。制式弹质量间的差别在客观上是由生产条件造成的,在决定射程的三个要素(V_0, c 和 θ_0) 中,弹丸质量的改变影响前两个,因而在一定的射角 θ_0 下可以写 $x_r = f(V_0, c)$ 。

表 9.1 身管火炮的弹重分级

弹重符号	弹丸质量与表定质量之差(%)	
	从	到
-----	$-2\frac{1}{3}$	-3
-----	$-1\frac{2}{3}$	$-2\frac{1}{3}$
---	-1	$-1\frac{2}{3}$
-	$-\frac{1}{3}$	-1
N	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
+	$\frac{1}{3}$	1
++	1	$1\frac{2}{3}$
+++	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{3}$
++++	$2\frac{1}{3}$	3

设 V_0 和 c 对射程的影响彼此无关, 并利用微分修正公式, 得

$$\delta x_{c,Q} = \frac{\partial x_c}{\partial V_0} \delta V_0 + \frac{\partial x_c}{\partial c} \delta c \quad (9.9)$$

初速与弹重的关系可按著名的内弹道修正公式求得

$$\delta V_0 = -l_Q V_0 \frac{\delta Q}{Q}$$

式中 l_Q 是修正系数。

由弹道系数公式 $c = id^2 \times 10^3 / Q$, 设乘积 id 为常数, 取对数再微分, 并以有限小增量代替无穷小量, 我们求得 $\delta c = -c \frac{\delta Q}{Q}$ 。将 δV_0 代入 (9.9) 式中, 得

$$\delta x_{c,Q} = -\frac{\partial x_c}{\partial V_0} V_0 l_Q \frac{\delta Q}{Q} - \frac{\partial x_c}{\partial c} c \frac{\delta Q}{Q} \quad (9.10)$$

因为修正系数 $\partial x_c / \partial c$ 为负数, 为方便计利用它的绝对值, 得

$$\delta x_{c,Q} = \left[\left| \frac{\partial x_c}{\partial c} \right| c - l_Q V_0 \frac{\partial x_c}{\partial V_0} \right] \frac{\delta Q}{Q} \quad (9.11)$$

由此得距离对弹重的修正系数为

$$\frac{\partial x_c}{\partial Q} = \frac{1}{Q} \left[\left| \frac{\partial x_c}{\partial c} \right| c - l_Q V_0 \frac{\partial x_c}{\partial V_0} \right] \quad (9.12)$$

考虑到这个记号, 得

$$\delta x_{c,Q} = -\frac{\partial x_c}{\partial Q} \cdot \delta Q$$

根据具体条件不同, 距离对弹重偏差的修正系数可以有不同的代数符号。

§ 9.2 弹道诸元改变量和弹道导数的计算方法

9.2.1 利用积分运动方程的方法确定弹道诸元改变量和修正系数

此方法适用于当所研究的参数改变很大时以及由不包含在未扰动弹道基本方程组中的参数的偏差产生弹道诸元改变时的情况。

在第一种情况里要将基本方程组对要研究的某个参数的几个离

散值或者对要研究的几个泛函关系式求解,以确定它们的改变所产生的影响。例如,由于火箭外形或控制机构的结构变化会引起迎面阻力系数曲线图的改变,我们记未扰动弹道的泛函关系式为 $c_{x_a}(M, R_e)$,而对于外形改变了的火箭的弹道为 $c_{x_{ai}}(M, R_e)$ 。为了确定火箭外形改变对主动段终点诸元的影响,取推力方向沿弹轴并忽略控制力。对于未扰动弹道可在以下值上求解方程组

$$X_a = qSc_{x_a}(M, R_e) \quad Y_a = qSc_{y_a}^a(M, R_e)\alpha$$

对于外形改变了的火箭,则

$$X_{ai} = qSc_{x_{ai}}(M, R_e) \quad Y_{ai} = qSc_{y_{ai}}^a(M, R_e)\alpha$$

于是运动方程组将有如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{P - X_{ai}}{m} - g\sin\theta & \dot{\theta} &= \frac{P + Y_{ai}^a}{mV}\alpha - \frac{g}{V}\cos\theta \\ \dot{y} &= V\sin\theta & \dot{x} &= V\cos\theta & m &= m(t) & \alpha &= \vartheta_{np}(t) - \theta \end{aligned}$$

如果在火箭外形(或控制机构的结构)改变时,除了 X_a 和 Y_a 外还有推力的轴向分量改变,则在求解上面的方程时必须利用 P_i 改变了的关系式。比较未扰动弹道和扰动弹道解的结果就可以得到弹道诸元随火箭形状(它的空气动力特征)改变而改变的大小。

决定火箭运动特征参数也有的不引起基本方程组其它起始条件的改变,例如设在无控火箭射击时射角 θ_0 改变就是这种情况,这时就只要将相应的方程组,例如将方程组(3.75)和(3.122)在改变了的 θ_{0i} 值下进行几次求解即可。求解的次数取决于所研究的、与 θ_0 有关的量变化的范围和变化的特征。例如,如果 $x_e = f(\theta_0)$ 在所研究的从 θ_{0i} 到 $\theta_{0(i+1)}$ 段范围内平稳地变化,则可将此关系取作线性的,那么就只需在 θ_0 的边界值上求解两次就足够了;但如果对于 θ_0 区间中点上的第三个解明显地偏离直线,那就必须增加求解的点数。根据求解的结果建立的图形或平滑后得的表格关系式 $x_e = f(\theta_0)$ 就可以确定与射角偏差 $\delta\theta_0$ 相应的射程改变量 δx_e 。

上述计算弹道诸元改变量方法的优点是可以考虑那些列在基本微分方程中的、与基本参数的偏差有关的量的改变对弹道诸元相互的、间接的影响。此外,这个方法还可以在任何弹道点上确定每个被

计算的运动特征的改变。

当在所希望的某个参数变化的范围内所研究的量与该参数可取作线性关系时,根据求解飞行器质心运动微分方程的结果确定修正系数是很合适的。在这种情况下,先将方程组在标准条件下积分一次,然后在需研究其影响的参数值的近旁再积分一次,最后算出所要求的修正系数。例如为了确定身管武器射程对初速偏差的修正系数,应该解相应的方程组求得 V_0 时的射程,并取它为标准值;然后在 $V_{01} = V_0 + \delta V_0$ 的条件下算出射程,于是求得修正系数为

$$\frac{\partial x_c}{\partial V_0} \approx \frac{\delta x_c}{\delta V_0} = \frac{x_{cV_{01}} - x_{cV_0}}{\delta V_0} \quad (9.13)$$

在计算时可取 $\Delta V_0 > 0$ 和 $\Delta V_0 < 0$ 。这个方法需要进行高精度的计算(也即保证大量可信的有效数字),因为在小 δV_0 值情况下,在确定差值 $x_{cV_{01}} - x_{cV_0}$,以及在确定修正系数时可能产生很大的误差。

在图 9.3 上给出了身管武器的 $\partial x_c / \partial V_0$ 与 V_0 关系的例子。由图可见,修正系数的大小与参数 V_0 有很强的关系,因此修正系数的某个值只可用于该参数改变的很窄范围里。

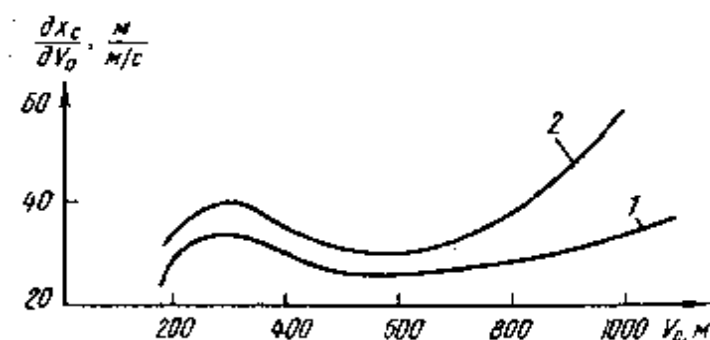


图 9.3 对于弹道系数 $c = 0$ 的火炮弹丸的 $\partial x_c / \partial V_0 = f(V_0)$ 关系图线

描述未扰动运动的方程组和考虑到扰动因素后的方程组应根据具体问题来建立,在常用假设下建立的基本方程组已在第 3 章中得出。扰动因素可以表示成沿建立基本方程组所取坐标轴上的附加加速度。对于以时间 t 为自变量的无控火箭被动段和炮弹弹道,描述未扰动运动的方程组可取方程组(3.127),但要补充一个描述沿 Z 坐标方向运动的方程,即

$$\ddot{x} = -E\dot{x} \quad \ddot{y} = E\dot{y} - g \quad \ddot{z} = -E\dot{z}$$

由扰动因素作用引起的,沿相应坐标轴的附加加速度分别记为 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 。由地球旋转产生的加速度可用方程(2.43)求得,弹丸的牵连运动加速度 a_{knp} 与地球引力加速度合成一个总的自由落体加速度 g (见 1.50 式)

于是在相对地球运动中的加速度可写为

$$\mathbf{a}_{OTN} = \mathbf{a}_B + \mathbf{g} - \mathbf{a}_{knp}$$

式中 \mathbf{a}_B 是弹丸的空气阻力加速度矢量; $\mathbf{a}_{knp} = \epsilon$ 是在原始方程组中未考虑过的附加加速度(科氏加速度)矢量。

基准坐标系的 $OX_k(OX)$ 轴沿经线指向北,而弹道坐标系的 OX_k 轴指向与正北方成 A 角,地球自转角速度矢量 Ω 在弹道坐标系上的投影为

$$\Omega_{x_k} = \Omega \cos \varphi_{ru} \cos A \quad \Omega_{y_k} = \Omega \sin \varphi_{ru} \quad \Omega_{z_k} = \Omega \cos \varphi_{ru} \sin A$$

科氏加速度在这些坐标系上的投影分别为

$$\epsilon_{x_k} = -a_{knp x_k} = -2(\Omega_{y_k} \dot{z} - \Omega_{z_k} \dot{y})$$

$$\epsilon_{y_k} = -a_{knp y_k} = -2(\Omega_{x_k} \dot{x} - \Omega_{z_k} \dot{z})$$

$$\epsilon_{z_k} = -a_{knp z_k} = -2(\Omega_{x_k} \dot{y} - \Omega_{y_k} \dot{x})$$

这样,在考虑到扰动因素后在一般形式下写出的方程组具有如下形式:

$$\ddot{x} = -E\dot{x} + \epsilon_x = -E\dot{x} - 2(\Omega_{y_k} \dot{z} - \Omega_{z_k} \dot{y});$$

$$\ddot{y} = -E\dot{y} - g - \epsilon_y = -E\dot{y} - g - 2(\Omega_{x_k} \dot{x} - \Omega_{z_k} \dot{z});$$

$$\ddot{z} = -E\dot{z} + \epsilon_z = -E\dot{z} - 2(\Omega_{x_k} \dot{y} - \Omega_{y_k} \dot{x}) \quad (9.14)$$

对于方程左边不直接为加速度的方程组,用于考虑扰动因素的项就不同于 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 。例如,当自变量为 x 时,取方程(3.129)作为描述未扰动飞行的方程组:

$$u'_x = -E \quad p'_x = -g/u^2 \quad y'_x = p \quad t'_x = u^{-1}$$

考虑了扰动因素后再写出的这个方程组就具有如下形式:

$$u'_x = -E + \epsilon_u \quad p'_x = -g/u^2 + \epsilon_p$$

$$y'_x = p \quad t'_x = u^{-1} \quad (9.15)$$

考虑到(9.14)式,将 u'_x, p'_x 作变换:

$$\begin{aligned}u'_x &= \ddot{x}t'_x = \frac{\ddot{x}}{u} = -E + \epsilon_x u^{-1} \\p'_x &= \dot{p}'_x = \frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{y}}{x}\right] \frac{df}{dx} = \frac{\dot{y}\dot{x} - \ddot{x}y}{x^3}\end{aligned}$$

注意到 $\dot{x} = u$,利用方程组(9.14)的头两个方程得

$$p'_x = -\frac{g}{u^2} + \frac{1}{u^2}(\epsilon_y - \epsilon_x p)$$

这样,将所得方程与方程(9.15)相比较得

$$\epsilon_x = \frac{\epsilon_x}{u} \quad \epsilon_p = \frac{1}{u^2}(\epsilon_y - \epsilon_x p) \quad (9.16)$$

例如,对于地球球形模型和平面弹道情况,考虑自由落体加速度大小和方向改变对弹道诸元影响的项,按照文献[21],近似为

$$\epsilon = -\frac{g}{u} \cdot \frac{x}{R_s} \quad \epsilon_p = \frac{1}{R_s}(2y + xp) \frac{g}{u^2} \quad (9.17)$$

9.2.2 利用积分偏差微分方程的方法确定修正系数

在某个参数有小偏量的情况下,可利用求解偏差运动微分方程来求修正系数。为了建立偏差方程,再次利用微分方程线性化的一般方法将火箭和炮弹质心运动方程线性化,通常只考虑泰勒级数的头两项。基本微分方程组的选择取决于具体的问题,作为例子,我们利用如(3.75)形式的基本微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{P - X_a}{m} - g \sin \theta & \dot{\theta} &= -\frac{g \cos \theta}{V} \\ \dot{y} &= V \sin \theta & \dot{x} &= V \cos \theta\end{aligned}$$

来导出无控火箭弹道主动段的偏差微分方程。以 a_v 表示第一个方程的右边并展开位于其中的量,设迎面阻力系数仅与马赫数有关而不随高度改变;又设对于给定的弹道计算点,推力 P 与高度 y 的变化无关,则得

$$a_v = \frac{1}{m_0 - |\dot{m}|t} \left[|\dot{m}| J_1 g - \frac{\rho S V^2}{2} c_{x_a}(M) \right] - g \sin \theta \quad (9.18)$$

这个等式也可写成泛函关系式 $a_v = f_1(V, \theta, y, J_1, S, \rho, c_{x_a}(M), m_0, |\dot{m}|)$ 的形式。

用 a_θ 表示第二个方程的右边,写出泛函关系式为 $a_\theta = f_2(V, \theta)$ 。

以类似的方式进行处理,可以对第三个和第三四个方程写出 $a_y = f_3(V, \theta)$ 和 $a_x = f_4(V, \theta)$ 。

利用线性化公式,得到偏差微分方程组如下:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\delta V) &= \frac{\partial a_V}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_V}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial a_V}{\partial y} \delta y + \frac{\partial a_V}{\partial J_1} \delta J_1 + \\ &\quad \frac{\partial a_V}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial a_V}{\partial c_{x_a}} \delta c_{x_a} + \frac{\partial a_V}{\partial m_0} \delta m_0 + \frac{\partial a_V}{\partial |\dot{m}|} \delta |\dot{m}| \\ \frac{d}{dt}(\delta \theta) &= \frac{\partial a_\theta}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} \delta \theta \\ \frac{d}{dt}(\delta y) &= \frac{\partial a_y}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_y}{\partial \theta} \delta \theta \\ \frac{d}{dt}(\delta x) &= \frac{\partial a_x}{\partial V} \delta V + \frac{\partial a_x}{\partial \theta} \delta \theta \end{aligned} \quad (9.19)$$

在许多情况里,寻求弹道导数 $\partial a_j / \partial j$ 的工作尽管是不复杂的,但却是很费力的事。对于我们所取的方程组,得

$$1) a_{VV} = \frac{\partial a_V}{\partial V} = - \frac{S \rho V}{m} [c_{x_a}(M) + \frac{M}{2} \cdot \frac{\partial c_{x_a}(M)}{\partial M}];$$

$$2) a_{V\theta} = \frac{\partial a_V}{\partial \theta} = -g \cos \theta;$$

$$3) a_{Vy} = \frac{\partial a_V}{\partial y} = - \frac{1}{m} S \frac{V^2}{2} c_{x_a}(M) \frac{\partial \rho}{\partial y};$$

$$4) a_{VJ_1} = \frac{\partial a_V}{\partial J_1} = \frac{P}{m} \cdot \frac{1}{J_1};$$

$$5) a_{V\rho} = \frac{\partial a_V}{\partial \rho} = - \frac{X_a}{m} \cdot \frac{1}{\rho};$$

$$6) a_{Vc_{x_a}} = \frac{\partial a_V}{\partial c_{x_a}} = - \frac{X_a}{m} \cdot \frac{1}{c_{x_a}(M)};$$

$$7) a_{Vm_0} = \frac{\partial a_V}{\partial m_0} = - \frac{P - X_a}{m} \cdot \frac{1}{m};$$

$$8) a_{V|\dot{m}|} = \frac{\partial a_V}{\partial |\dot{m}|} = \frac{1}{|\dot{m}|} \left[\frac{P}{m} + \frac{|\dot{m}|}{m} \left[\frac{P - X_a}{m} \right] \right];$$

$$9) a_{aV} = \frac{\partial a_\theta}{\partial V} = \frac{g \cos \theta}{V^2};$$

$$10) a_{a\theta} = \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} = g \frac{\sin \theta}{V};$$

$$\begin{aligned}
11) \quad a_{yV} &= \frac{\partial a_y}{\partial V} = \sin\theta; \\
12) \quad a_{y\theta} &= \frac{\partial a_y}{\partial \theta} = V \cos\theta; \\
13) \quad a_{xV} &= \frac{\partial a_x}{\partial V} = \cos\theta; \\
14) \quad a_{x\theta} &= \frac{\partial a_x}{\partial \theta} = -V \sin\theta
\end{aligned} \tag{9.20}$$

最后将偏量微分方程组写成如下形式:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\delta V) &= a_{VV}\delta V + a_{V\theta}\delta\theta + a_{Vy}\delta y + a_{VJ_1}\delta J_1 + a_{V\rho}\delta\rho \\
&\quad + a_{VC_{x_a}}\delta c_{x_a} + a_{Vm_0}\delta m_0 + a_{V|\dot{m}|}\delta|\dot{m}|; \\
\frac{d}{dt}(\delta\theta) &= a_{\theta V}\delta V + a_{\theta\theta}\delta\theta; \\
\frac{d}{dt}(\delta y) &= a_{yV}\delta V + a_{y\theta}\delta\theta; \\
\frac{d}{dt}(\delta x) &= a_{xV}\delta V + a_{x\theta}\delta\theta
\end{aligned} \tag{9.21}$$

由方程(9.21)可得到以 t 为自变量的、便于计算无控火箭被动段弹道或火炮弹丸弹道运动诸元改变量和修正系数的偏量方程组。在这种情况下火箭(炮弹)的质量是常数; $P, J_1, |\dot{m}|$ 等于零, 方程组(9.19)的右边就可写成如下形式:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\delta V) &= \frac{\partial a_V}{\partial V}\delta V + \frac{\partial a_V}{\partial \theta}\delta\theta + \frac{\partial a_V}{\partial \rho}\delta\rho + \\
&\quad \frac{\partial a_V}{\partial c_{x_a}}\delta c_{x_a} + \frac{\partial a_V}{\partial m_0}\delta m_0
\end{aligned}$$

相应地在系数公式(9.20)中应取 $a_{Vm_0} = X_a/m_0^2$, 在第1、第3、第5、第6个公式中应取 $m = m_0$ 。对于火箭, 在上述方程和公式里还要作代换 $m = m_n$ 。考虑到这些以后, 偏差微分方程组将有如下形式:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\delta V) &= a_{VV}\delta V + a_{V\theta}\delta\theta + a_{Vy}\delta y + \\
&\quad a_{V\rho}\delta\rho + a_{VC_{x_a}}\delta c_{x_a} + a_{Vm_0}\delta m_0; \\
\frac{d}{dt}(\delta\theta) &= a_{\theta V}\delta V + a_{\theta\theta}\delta\theta;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\delta y) &= a_{yv}\delta V + a_{y\theta}\delta\theta; \\ \frac{d}{dt}(\delta x) &= a_{xv}\delta V + a_{x\theta}\delta\theta\end{aligned}\quad (9.22)$$

下面再来求出便于确定常质量弹丸弹道诸元改变量的、以 x 为自变量的偏差方程组。我们取描述稠密大气层中在炮弹弹道或无控火箭被动段弹道上质心运动的方程(3.129)作为基本方程

$$u'_x = -E \quad p'_x = -g/u^2 \quad y'_x = p \quad t'_x = u^{-1}$$

注意到其中 $E = cH_r(y)G(V_r)$, 式中 $V_r = u \sqrt{1+p^2} \sqrt{\tau_{oN}/\tau}$, 而又因为 $H_r = f(y)$ 和 $\tau = f_1(y)$, 则 $E = f(u, p, y)$ 。记

$$a_u = f_1(u, p, y) \quad a_p = f_2(u) \quad a_y = f_3(p) \quad a_t = f_4(u)$$

则有 $u'_x = a_u; p'_x = a_p; y'_x = a_y; t'_x = a_t$ 。

将以上基本方程组线性化, 得到如下的偏量微分方程组:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\delta u) &= a_{uu}\delta u + a_{up}\delta p + a_{uy}\delta y; \\ \frac{d}{dx}(\delta p) &= a_{pu}\delta u; \\ \frac{d}{dx}(\delta y) &= a_{yp}\delta p; \\ \frac{d}{dx}(\delta t) &= a_{tu}\delta u\end{aligned}\quad (9.23)$$

我们先写出方程(9.23)中第一个方程的系数 a_{ij}

$$a_{uu} = \frac{\partial a_u}{\partial u} = -\frac{\partial E}{\partial u} \quad a_{up} = \frac{\partial a_u}{\partial p} = -\frac{\partial E}{\partial p} \quad a_{uy} = \frac{\partial a_u}{\partial y} = -\frac{\partial E}{\partial y}$$

利用(3.126)和(9.23)式就求得各弹道导数的值。将由(3.126)式的 E 对 u 微分得

$$\frac{\partial E}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial V_r} \cdot \frac{\partial V_r}{\partial u} = cH_r(y)G'(V_r) \sqrt{1+p^2} \sqrt{\frac{\tau_{oN}}{\tau}} \quad (9.24)$$

将上式分子和分母都乘以 $uG(V_r)$ 并记

$$G'(V_r)G^{-1}(V_r)V_r = f(V_r) \quad (9.25)$$

则得

$$a_{uu} = -\frac{E}{u}f(V_r) \quad (9.26)$$

将 E 对 p 微分,得

$$\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{\partial E}{\partial V_\tau} \cdot \frac{\partial V_\tau}{\partial p} = cH_\tau(y)G'(V_\tau)u \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}}$$

将上式分子和分母同乘以 $G(V_\tau) \sqrt{1+p^2}$,得

$$a_{up} = - \frac{E p}{1+p^2} f(V_\tau) \quad (9.27)$$

确定 a_{uy} 就困难一些,因为 E 通过 $H_\tau(y)$ 和 $V_\tau = f(y)$ 与 y 有关,故

$$\frac{\partial E}{\partial y} = \frac{\partial E}{\partial [H_\tau(y)]} \cdot \frac{\partial [H_\tau(y)]}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial V_\tau} \cdot \frac{\partial V_\tau}{\partial y}$$

由 E 的关系式将有 $\partial E / \partial [H_\tau(y)] = cG(V_\tau) = E / [H_\tau(y)]$ 。

为了确定 $\partial [H_\tau(y)] / \partial y$,再利用公式(1.88),将它代入 $H_\tau(y)$ 的表达式中得

$$H_\tau(y) = \sqrt{\frac{\tau_{0N}}{\tau}} e^{-\frac{1}{R} \int_0^y \frac{dy}{\tau}} \quad (9.28)$$

对(9.28)式取对数得

$$\ln H_\tau(y) = \frac{1}{2} \ln \tau_{0N} - \frac{1}{2} \ln \tau - \frac{1}{R} \int_0^y \frac{dy}{\tau}$$

对 y 微分并作变换,得

$$\frac{\partial [H_\tau(y)]}{\partial y} = - H_\tau(y) \left[\frac{\tau'_y}{2\tau} + \frac{1}{R\tau} \right] \quad (9.29)$$

此外,

$$\frac{\partial E}{\partial V_\tau} = cH_\tau(y)G'(V_\tau) = \frac{E}{V_\tau} f(V_\tau) \quad (9.30)$$

$$\frac{\partial V_\tau}{\partial y} = u \sqrt{1+p^2} \left[\frac{-\tau'_y \sqrt{\tau_{0N}}}{2\tau \sqrt{\tau}} \right] = -V_\tau \frac{\tau'_y}{2\tau} \quad (9.31)$$

代入这 4 个偏导数值,经变换后得

$$a_{uy} = - \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{E}{\tau} \left[\frac{f(V_\tau) + 1}{2} \tau'_y + \frac{1}{R} \right] \quad (9.32)$$

方程(9.23)的后三个方程的系数为

$$a_{pu} = \frac{2g}{u^3} \quad a_{yp} = 1 \quad a_{iu} = - \frac{1}{u^2} \quad (9.33)$$

积分偏差方程就可以对弹道任一固定点得到方程左边列出的修正系数和运动特征改变量。如果对上述方程不进行简化,则在一般情况下

只能在电子计算机上用数值积分法求解,或者利用直接作用的模拟计算机求解。其中的系数 a_{ij} 按未扰动弹道算出。

9.2.3 共轭偏差方程组及其解

偏差方程组属于非齐次线性微分方程组,它可以有共轭线性方程组,共轭变量的个数与基本方程组一致。按照线性齐次方程共轭方程组组成的法则,第一个方程的系数应等于基本方程组各第一项的系数,第二个方程的系数应等于基本方程各第二项的系数等等。在新的方程里,所有的系数取与基本方程组相反的符号,根据齐次微分方程的定义,在共轭方程组里将略去基本方程中所具有的自由项。为明确起见,我们来研究微分方程组(9.23),在引入了考虑扰动影响的项 ϵ_u 和 ϵ_p 后重写出前三个方程。为统一起见,将具有零系数的项也写出。系数 a_{ij} 以绝对值出现,而其符号则在方程中以明确的符号指出:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\delta u) &= -a_{uu}\delta u - a_{up}\delta p + a_{uy}\delta y + \epsilon_u; \\ \frac{d}{dx}(\delta p) &= a_{pu}\delta u + 0\delta p + 0\delta y + \epsilon_p; \\ \frac{d}{dx}(\delta y) &= 0\delta u + a_{yp}\delta p + 0\delta y\end{aligned}\quad (9.34)$$

取应变量为 $\delta u, \delta p, \delta y$ 的方程组(9.34)为基本方程组。以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 表示变量后可写出与(9.34)式相共轭的方程组如下:

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{dx} &= a_{uu}\lambda_1 - a_{pu}\lambda_2 - 0\lambda_3; \\ \frac{d\lambda_2}{dx} &= a_{up}\lambda_1 - 0\lambda_2 - a_{yp}\lambda_3; \\ \frac{d\lambda_3}{dx} &= -a_{uy}\lambda_1 - 0\lambda_2 - 0\lambda_3\end{aligned}\quad (9.35)$$

在一般情况下,变量 λ_i 的物理意义取决于基本方程中系数 a_{ij} 以及被加数 ϵ_u 和 ϵ_p 的物理意义。针对我们的问题,下面来建立基本方程组与共轭方程组中变量之间的联系。将基本方程组中的方程分别乘以 λ_1, λ_2 和 λ_3 ,而将共轭方程组中的方程分别乘以 $\delta u, \delta p, \delta y$,然后相加,经变换后得

$$\lambda_1 \frac{d}{dx}(\delta u) + \lambda_2 \frac{d}{dx}(\delta p) + \lambda_3 \frac{d}{dx}(\delta y) + \delta u \frac{d\lambda_1}{dx} + \delta p \frac{d\lambda_2}{dx} + \delta y \frac{d\lambda_3}{dx} = \lambda_1 \epsilon_u + \lambda_2 \epsilon_p$$

以及

$$\frac{d}{dx}(\lambda_1 \delta u + \lambda_2 \delta p + \lambda_3 \delta y) = \lambda_1 \epsilon_u + \lambda_2 \epsilon_p \quad (9.36)$$

对此方程的右边和左边从 x_1 到 x_2 积分, 于是得

$$\begin{aligned} & \lambda_{12} \delta u_2 + \lambda_{22} \delta p_2 + \lambda_{32} \delta y_2 - \lambda_{11} \delta u_1 - \lambda_{21} \delta p_1 - \lambda_{31} \delta y_1 \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (\lambda_1 \epsilon_u + \lambda_2 \epsilon_p) dx \end{aligned} \quad (9.37)$$

所得到的这个方程是一般性的, 对任何起始条件都是正确的。对于所研究的基本弹道, 共轭方程积分限的选择以便于求解具体修正理论问题为原则。在大多数情况里从弹道终点开始来积分共轭微分方程组是合适的。

例如在确定“地—地”无控火箭被动段以及地炮弹丸弹道的弹道诸元改变量时, 就是从落点开始积分到所研究弹道段的起点。我们先写出火箭被动段的方程(9.37)如下:

$$\begin{aligned} & \lambda_{1c} \delta u_c + \lambda_{2c} \delta p_c + \lambda_{3c} \delta y_c - \lambda_{1k} \delta u_k - \lambda_{2k} \delta p_k - \lambda_{3k} \delta y_k \\ &= \int_{x_k}^{x_c} (\lambda_1 \epsilon_u + \lambda_2 \epsilon_p) dx \end{aligned} \quad (9.38)$$

为了从(9.38)式获得确定距离改变量的公式, 要从系数 λ_{ic} 中选择一个含有 δx_c 的系数, 而令共轭方程组中的其它系数等于零。对于落点(见图9.4)可取 $\delta x_c = \delta y_c / |p_c|$, 与方程(9.38)的第三项相比较后得 $\lambda_{3c} = 1/|p_c|$, 此外又令 $\lambda_{1c} = 0, \lambda_{2c} = 0$, 则由(9.38)式得

$$\delta x_c = \lambda_{1k} \delta u_k + \lambda_{2k} \delta p_k + \lambda_{3k} \delta y_k + \int_{x_k}^{x_c} (\lambda_1 \epsilon_u + \lambda_2 \epsilon_p) dx \quad (9.39)$$

我们来解释一下 $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \lambda_{3k}$ 的物理意义。令 ϵ_u, ϵ_p 以及 $\delta u_k, \delta p_k, \delta y_k$ 中的两个等于零, 例如令 $\delta p_k = 0, \delta y_k = 0$ 和 $\delta u_k = 1$ 就求得 $\lambda_{1k} = \partial x_c / \partial u_k$ 。以类似的方式可得

$$\lambda_{2k} = \partial x_c / \partial p_k \quad \text{和} \quad \lambda_{3k} = \partial x_c / \partial y_k$$

作为 x 的函数, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的值可以在 $\lambda_{1c} = 0; \lambda_{2c} = 0; \lambda_{3c} = 1/|p_c|$ 的起

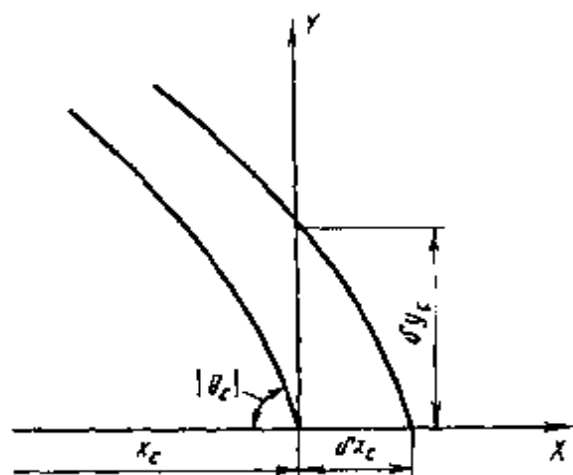


图 9.4 接近落点的弹道段

始条件下用数值积分法(用电子计算机或用手工方法)积分共轭方程组(9.35)求得。对 x 的积分步长应取负号,这是因为积分是从 x_c 到 x_k 方向进行的。

在按(9.39)式确定距离改变量时, $\delta u_k, \delta p_k$ 和 δy_k 的值应在研究了前述弹道的条件下确定或预先给定。如果令 $\delta u_k = \delta p_k = \delta y_k = 0$, 则

$$\delta x_c = \int_{x_k}^{x_c} (\lambda_1 \epsilon_u + \lambda_2 \epsilon_p) dx \quad (9.40)$$

此式可用于确定那些用 ϵ_u 和 ϵ_p 表示其影响的因素(如像地球旋转的影响,气象条件的变化等)所产生的距离改变量。

在计算地炮弹丸弹道的 δx_c 时,共轭方程组的积分应从 x_c 到 $x = 0$ 进行。此外对于射出点应取 $\delta y_0 = 0$,于是由(9.39)得

$$\delta x_c = \lambda_{10} \delta u_0 + \lambda_{20} \delta p_0 + \int_0^{x_c} (\lambda_1 \epsilon_u + \lambda_2 \epsilon_p) dx \quad (9.41)$$

这个公式是对地炮全水平射程的一般修正公式。

9.2.4 由弹道相似条件确定修正系数

为了计算常质量弹丸的弹道诸元改变量,常利用由弹道相似原理得出的一般关系式。

取方程组(6.77)并对射出点(甚至沿弹道)处气压和气温的改变确定全射程的修正量。如果令 $\tau_k = \tau_{oN}$, 则 $V_{co} = V_0$, 而

$$x_c = \Phi_1(V_0, c^*, \theta_0) \quad (9.42)$$

注意到 $c^* = ch_o/h_{oN}$, 如认为(9.42)中的 V_0 和 θ_0 是不变的,则可分别求得 x_c 对 c 和对 h_o 的导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_c}{\partial c} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial c^*} \cdot \frac{\partial c^*}{\partial c} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial c^*} \cdot \frac{h_o}{h_{oN}} \\ \frac{\partial x_c}{\partial h_o} &= \frac{\partial \Phi_1}{\partial c^*} \cdot \frac{\partial c^*}{\partial h_o} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial c^*} \cdot \frac{c}{h_{oN}} \end{aligned}$$

比较上面两个不等式得

$$\frac{\partial x_c}{\partial h_0} = \frac{\partial x_c}{\partial c} \cdot \frac{c}{h_0} \quad (9.43)$$

如果取 $h_0 = h_{0N}$, $\tau_0 \neq \tau_{0N}$, 则方程组(6.77)的第一个方程有如下形式:

$$x_c = \frac{\tau_0}{\tau_{0N}} \Phi_1(V_{\tau_0}, c, \theta_0) \quad (9.44)$$

在此等式中令 θ_0 不变, 依次对 V_0 和 τ_0 微分, 经变换后得

$$\frac{\partial x_c}{\partial \tau_0} = \frac{1}{\tau_0} \left[x_c - \frac{1}{2} V_0 \frac{\partial x_c}{\partial V_0} \right] \quad (9.45)$$

由(9.43)和(9.45)式可见, 考虑射出点(甚至沿弹道)气压、气温与标准大气的偏差对射程的影响时, 相应的修正系数可用对弹道系数和对初速偏差的主要修正系数表达。

9.2.5 获得弹道导数的解析方法

当需研究的基本量由具有解析形式导数的函数确定时, 可以采用解析方法, 此方法常用于研究常质量弹丸的弹道。如果设椭圆弹道是对称的并且以初速 V_0 和射角 θ_0 从球形地球表面开始, 则仅考虑泰勒级数线性项的线性弧线距离改变量为

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial V_0} \delta V_0 + \frac{\partial L}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 \quad (9.46)$$

其中的弹道导数利用微分椭圆弹道展开式的方法求得, 结果是

$$\frac{\partial L}{\partial V_0} = 2 \frac{R_s}{V_0} [\sin 2\psi + \operatorname{ctg} \theta_0 (1 - \cos 2\psi)] \quad (9.47)$$

式中 2ψ 是角距离。

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 2R_s \left[\frac{\sin 2(\theta_0 + \psi)}{\sin 2\theta_0} - 1 \right] \quad (9.48)$$

图 9.5 上给出了在不同 ψ 值下 $\partial L / \partial V_0 = f_{V_0}(\theta_0)$ 的图形。

由图可见, 在所有的情况下弹道导数 $\partial L / \partial V_0$ 都为正值, 在固定的射击角距离上, 它随被动段起点处椭圆弹道倾角的增大而减小。

关系式 $\partial L / \partial \theta_0 = f_{\theta_0}(\theta_0)$ 的图形展示在图 9.6 上, 随着射角的增大弹道导数减小, 从正值变到负值, 零导数值与被动段起点处的最优倾角相应。在给定飞行距离的条件下, 零导数值与最小初速 V_0 弹道

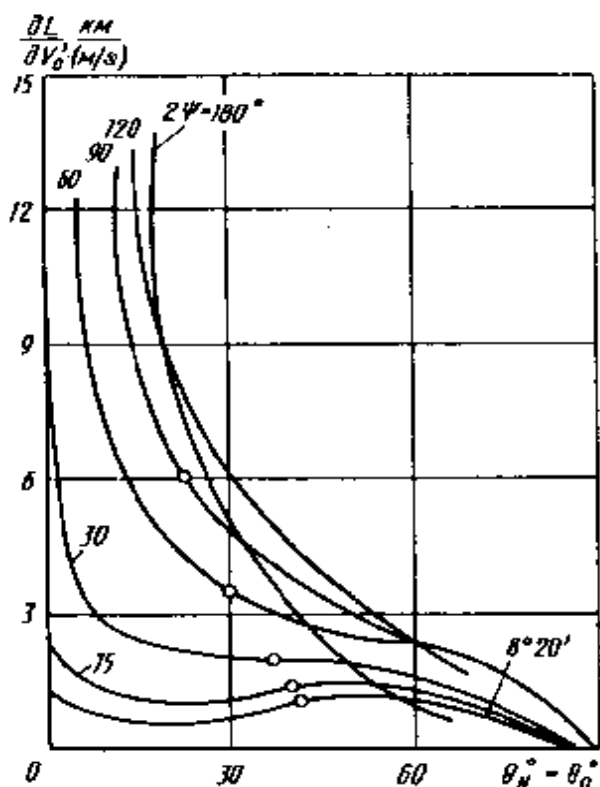


图9.5 在不同角距离 2ψ 下
弹道导数 $\partial L/\partial V_0$ 作为射角
 $\theta_H = \theta_0$ 的函数的变化图形

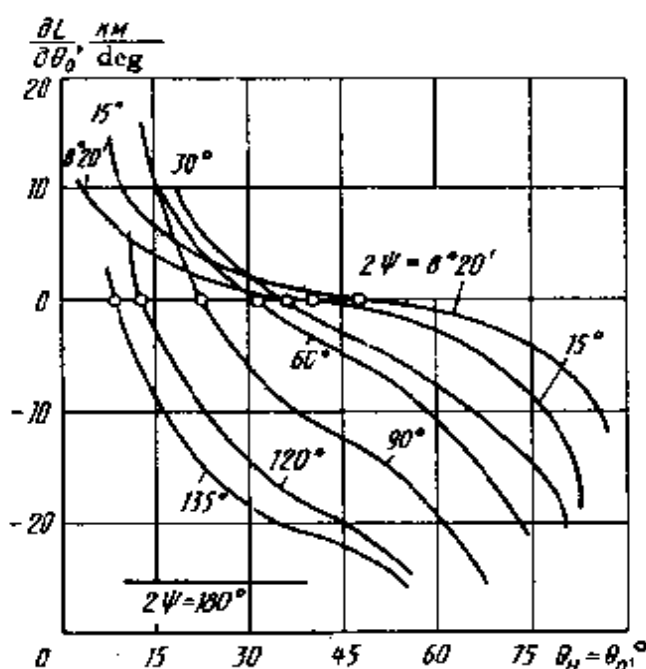


图9.6 在不同角距离 2ψ 下
弹道导数 $\partial L/\partial \theta_0$ 作为
 $\theta_H = \theta_0$ 的函数变化的图形

相应。

确定修正系数的解析方法也可用于稠密大气层中运动的常质量弹丸外弹道问题的近似解法中，例如用于假速度方法的解法中^[21,118]。分析方法有时还用于求一阶以上的弹道导数。在抛物线弹道理论中，表征射程变化主要部分的弹道导数由公式(9.6)确定，但此改变量更准确的数值取决于公式(9.6)的后三项，而这后三项中就考虑了二阶导数。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_c}{\partial V_0^2} &= 2 \frac{\sin 2\theta_0}{g} & \frac{\partial^2 x_c}{\partial \theta_0^2} &= -4 \frac{V_0^2 \sin 2\theta_0}{g}; \\ \frac{\partial^2 x_c}{\partial V_0 \partial \theta_0} &= 4 \frac{V_0 \cos 2\theta_0}{g} \end{aligned} \quad (9.49)$$

根据椭圆理论，也可以得到 $\partial^2 L/\partial V_H^2, \partial^2 L/\partial \theta_H^2, \partial^2 L/(\partial V_H \partial \theta_H)$ 等等。

但是由于求取二阶导数(在更复杂数学模型的情况下)的复杂性，量 $\delta V_H^2, \delta \theta_H^2, \delta V \delta \theta_H$ 的微小性以及由这些项给出的更准确数值微不足道的特点，使得在实际计算弹道诸元改变量时通常只考虑级数

展开式中的线性项。

9.2.6 计算修正系数值的表解法

利用过去已算出的各种表来确定修正系数的方法称为表解法。表解法在计算身管火炮弹丸弹道诸元改变量时已得到广泛应用,人们熟知的是利用弹道表按差分法来计算修正系数以及利用修正系数表本身。在大多数弹道表里都含有标准气象条件下的弹道特征点诸元,它们取决于参数 c, V_0, θ_0 。对于高射弹道,时间 t 也是一个参数。

通常是按等步长参数来编表,这样就可利用著名的数值微分公式来计算修正系数:

$$y'_x = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h_x} \quad (9.50)$$

例如对于地炮系统,将按照参数变化而对应取的射程依次代入(9.50)式的分子中,将参数的表间隔(步长)代入分母中就得到对于计算射程改变量的主要修正系数

$$\frac{\partial x_c}{\partial c} = \frac{x_c(c + h_c) - x_c(c - h_c)}{2h_c} \quad (9.51)$$

$$\frac{\partial x_c}{\partial V_0} = \frac{x_c(V_0 + h_{V_0}) - x_c(V_0 - h_{V_0})}{2h_{V_0}} \quad (9.52)$$

$$\frac{\partial x_c}{\partial \theta_0} = \frac{x_c(\theta_0 + h_{\theta_0}) - x_c(\theta_0 - h_{\theta_0})}{2h_{\theta_0}} \quad (9.53)$$

上面最后一个修正系数在许多情况里必须取 h_{θ_0} 的单位为弧度来计算。

修正系数表可用上述方法之一计算,因为弹道由参数 c, V_0, θ_0 确定,故在修正系数表中也有同样的入口表头。著名的修正系数表就是由炮兵科学院用数值积分修正微分方程的方法算出的^[21, 4, 1]。查表的工作归结为根据给定的入口参数 c, V_0, θ_0 进行线性插值。

9.2.7 确定运动参数全(等泛函)偏差的概念和方法

因为在飞行器运动参数小偏差的方程中是取时间 t 作为主动段弹道自变量的,故由此方程确定的偏差量将与具体的飞行瞬时相对

应。属于固定瞬时的弹道偏差称为等时线性偏差^[10]。

此外还应注意,许多操作,例如与有控弹道式飞行器发动机推力“归零”有关的操作不是按给定的时刻来完成的,而是按达到某个控制函数的要求来完成的。在这种情况下,考虑到扰动作用后,相应于发动机关车的实际时间将不同于计算时间。

在主动段末实际瞬时所取的任一参数值与所需要的、标准时间相应的同一参数的标准值之差为全偏差或等泛函偏差。等泛函变分如同等时变分一样是飞行器运动参数的小改变量,但它有如下限制:不仅要在固定时间从所要求的弹道上转到扰动弹道,而且沿扰动弹道飞行时间的改变量为 δt_k 。确定飞行时间修正量也是使安装在飞行器上的各种定时启动装置能正确动作所必须的。

飞行器运动参数的全偏差值用如下三种方法确定:

积分飞行器扰动运动方程组的方法;

基于利用飞行器运动参数与扰动因素之间关系式级数展开的方法;

将定时偏差换算成全偏差的方法。

在利用第一种方法时,如同确定定时偏差一样,将含有扰动因素的原始微分方程组对时间积分,但是扰动运动积分过程结束瞬时不是按标准的主动段终点值确定,而是按发动机实际关车时间确定,例如按照所要求的、对主动段终点标准时间计算的表观速度值来确定。这就导致必须在数值积分的每一步上补充进行表观速度的计算并将它与给定值相比较,在它们相等的瞬时结束扰动弹道计算。从飞行器运动参数的计算值减去它的要求值就得到全偏差。

第二个方法的特点是在按其求全偏差时,将它们写成成对的等泛函偏导数与扰动因素偏差的乘积之和的形式,并且偏导数的确定要考虑到主动段终点时间的可靠性。

第三个方法是最简单的、困难最少的方法,但它的应用必须要有运动参数相应的定时偏差值以及用于确定飞行器主动段终点时间的控制函数关系式。

§ 9.3 大气参数对火箭和炮弹飞行影响的计算

9.3.1 气象因素偏差对飞行器运动影响的考虑方法

理论研究和射击试验都证实了气象要素与其标准值间偏差对火箭和炮弹的飞行有重大影响,在确定运动特征、计算弹道散布、确定射击精度、计算飞行器运动稳定性以及强度校核中都要考虑气象要素的影响。在弹道学里大气参数偏差对火箭和炮弹飞行的影响可以用三种方法考虑:

第一种方法就按照气压、湿度和气温与标准值的不变的偏差来计算弹道诸元改变量。这里指的标准值是指大气服从铅直平衡假设以及气温随高度改变的特征取标准大气中函数 $\tau(y)$ 的值。例如射程对地面气压和虚温偏差的修正系数的求法就已在前面研究过(见公式(9.34),(9.45))。

第二种方法在于确定和利用气象要素的弹道平均偏差——沿全弹道条件不变的、虚温与其标准值的偏差以及条件不变的平均风。第一和第二种方法最常用于射击准备和射击实施的实际工作中。

理论上更严格的是第三种方法,此法是要在运动微分方程中引入直接以某个坐标(常是高度)函数或时间函数确定气象要素变化的公式。当计算中要严格考虑大气参数改变对火箭和炮弹飞行的影响时,应利用由大气探测结果得到的具体(试验)函数。

在有气象要素变化预报的情况下,可以利用气象研究结果的统计处理,统计处理的结果可以表示成随机场的形式(对坐标或对时间建立的多变量随机函数)。按坐标的统计处理常用于弹道计算,按时间的统计处理多数用于当飞行器上有风载荷时的强度计算以及在变化大气中的运动稳定性和飞行动力学计算中。

9.3.2 对气压和气温变化的考虑

标准大气气压和气温沿高度的变化已在第1章中研究过。

当希望在弹道计算中考虑具体的(试验的)或标准的气压、湿度和气温沿高度的变化时,应将它们表示成公式、表格或图表。空气湿度很容易按公式(1.83)通过虚温来考虑,气温和气压按空气密度公式(例如按公式(1.85))引入到计算中,此外在声速公式中也要考虑气温。在利用按地面标准条件编出的 $c_{x_0}(M)$ 曲线时,声速沿高度变化对迎面阻力的影响可按(1.141)来考虑。推力沿高度的变化应对具体气象条件用一般方程(1.148)计算。

显然对于气象要素沿高度改变的每一种情况都要独立地求解所选择的方程。

9.3.3 考虑气压和气温变化时常质量弹丸的运动方程

在利用阻力系数 $c_x(M)$ 确定迎面阻力时,对气温和气压的改变也像上节对变质量弹丸所讲的那样进行考虑。如果在确定迎面阻力时仍利用(3.126)式的量 E ,则考虑了气压和气温改变后描述常质量弹丸运动的微分方程组也归结为方程(9.14)的一般形式。我们取被改变了的量为 $(E + \delta E)$,则得方程组

$$\ddot{x} = -E\dot{x} - \frac{\delta E}{E}E\dot{x} \quad (9.54)$$

$$\ddot{y} = -E\dot{y} - g - \frac{\delta E}{E}E\dot{y} \quad (9.55)$$

按照(3.126)式可将 E 表示成 $E = f(c, h, \tau)$,并得到^[21]

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{\delta c}{c} + \frac{\delta h}{h} - \frac{f(V_r) + 1}{2} \cdot \frac{\delta \tau}{\tau} \quad (9.56)$$

量 $f(V_r)$ 按(9.25)式确定。

当仅有弹道系数改变时,按照(9.54)~(9.56)式得微分方程组

$$\ddot{x} = -E\dot{x} - \frac{\delta c}{c}E\dot{x} \quad (9.57)$$

$$\ddot{y} = -E\dot{y} - g - \frac{\delta c}{c}E\dot{y} \quad (9.58)$$

在弹道系数不变情况下的方程是

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -E\dot{x} - \left[\frac{\delta h}{h} - \frac{f(V_\tau + 1)}{2} \cdot \frac{\delta \tau}{\tau} \right] E\dot{x}; \\ \ddot{y} &= -E\dot{y} - g - \left[\frac{\delta h}{h} - \frac{f(V_\tau + 1)}{2} \cdot \frac{\delta \tau}{\tau} \right] E\dot{y}\end{aligned}\quad (9.59)$$

经积分后得到在气压和虚温与标准大气值之差为 δh 和 $\delta \tau$ 时常质量弹丸的运动特征。如果利用大气铅直平衡假设,则可由地面气压以及气温随高度变化的函数^[21] 来确定改变后的运动特征。

将对 h (或气压函数 $\pi(y)$) 的方程取对数并微分,再将无穷小量改变为有限增量,得

$$\frac{\delta h}{h} = \frac{\partial h_0}{h_0} - \delta \left[\frac{1}{R} \int_0^y \frac{dy}{\tau} \right]$$

或将第二项对 τ 微分,得

$$\frac{\delta h}{h} = \frac{\partial h_0}{h_0} + \frac{1}{R} \int_0^y \frac{d\tau}{\tau^2} dy \quad (9.60)$$

将上式代入(5.95)式中得

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -E\dot{x} - \left[\frac{\partial h_0}{h_0} + \frac{1}{R} \int_0^y \frac{d\tau}{\tau^2} dy - \frac{f(V_\tau) + 1}{2} \cdot \frac{\delta \tau}{\tau} \right] E\dot{x}; \\ \ddot{y} &= -E\dot{y} - g - \left[\frac{\partial h_0}{h_0} + \frac{1}{R} \int_0^y \frac{d\tau}{\tau^2} dy - \frac{f(V_\tau) + 1}{2} \cdot \frac{\delta \tau}{\tau} \right] E\dot{y}\end{aligned}\quad (9.61)$$

上面这个方程组在求解时不需要知道气压随高度变化的函数,因而它对于进行理论研究是很方便的。

9.3.4 风对无控火箭和炮弹飞行影响的计算

在研究风对火箭和炮弹飞行的作用时,主要的问题是:确定风对运动中飞行器直接作用的机理,获得空气运动的计算方法以及证明在求解这样或那样问题时所采用的方法是正确的。

在大气中发生的空气的运动通常称为风。

风是一个矢量,作为矢量,它以风向和风速来表示。风的方向是风从那里吹过来的点的方位角 A_w ,以弧度测量,风速 W 以米/秒计。风速矢量通常以其分量 W_x, W_y, W_z 表示,一般情况下上升和下降气流速度不大,在数量级上有时它们比水平气流低两级。因此在射击数据的准备中就可采取以下已得到证实的假设,即在所研究的全弹道

范围内风速沿高度的变化保持不变。

空气的乱流(紊流、湍流)运动叠加在相对平静的空气质量的水平移动上(见图 9.7),这就造成了风的不稳定性(可变性),在接近地球表面的情况下表现得特别剧烈。通常将湍流分为动力湍流和热力湍流,在平原地区动力湍流带常扩展到 1000 ~ 1500m 高度,而在海洋上空它的边界要低一些。湍流强度主要取决于风速、表面粗糙度和空气质量移动运动的稳定性。热力湍流可以扩展到更大的高度,特别是在体积很大的空气质量运动不稳并形成积云的情况下更是如此,它的强度取决于太阳驻留高度、季节和下垫面的性质。

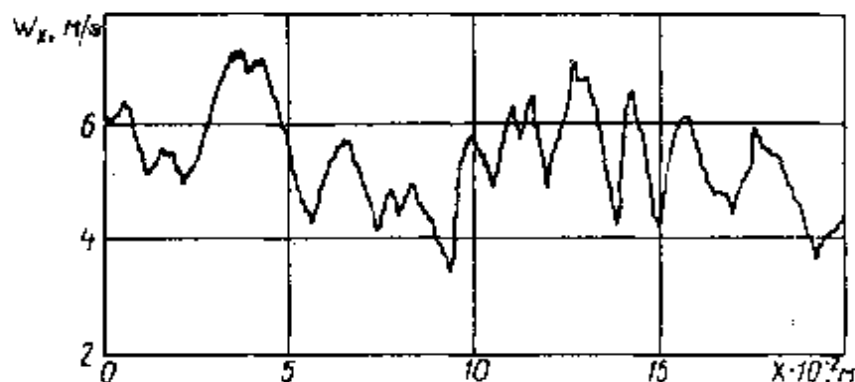


图 9.7 在水平方向上风速的变化

在需要考虑矢量 W 的几个(不少于两个)分量时,其自变量(坐标和时间)就给出了将空气介质(飞行器在其中飞行)看作矢量场(一般是空间-时间场)的基础。暂态分量主要是对低速飞行器的扰动运动应予考虑。对于大多数情况,可设在研究火箭和炮弹运动的某个空间域内湍流矢量空间场是各向同性的。

风和湍流是随机因素,在分析飞行器的运动时应像在第 11 章中那样从统计学观点来考虑它们。但在这里我们明确地约定,取反映空气质量的总位移的风速矢量为

$$W(y) = W_0(y) + W_r(y) \quad (9.62)$$

为非随机量。在表达式(9.62)中 $W_0(y)$ 是在高度 y 上风的不变分量,它表征了空气质量的连续平均位移; $W_r(y)$ 是在高度 y 上风的湍流分量。

飞行器在移动着的大气里运动的特点在于它相对于地球的速度与相对于运动着的空气的质量的速度是不同的。飞行器(飞机、火箭、炮弹)相对于地球的速度常称为地面速度,而相对于空气的速度称为空气速度。如果将弹丸的地面速度(绝对速度)用矢量 V_k 表示,将大气相对于地球运动的速度(即移动运动速度——风速)以矢量 W 表示,弹丸的空气速度(相对速度)用 V 表示,则有

$$V_k = V + W \quad (9.63)$$

故在相对于大气的运动中,弹丸的速度为

$$V = V_k - W \quad (9.64)$$

矢量等式(9.64)以标准坐标系 $OX_g Y_g Z_g$ 各轴上的分量形式表示时将有如下形式:

$$\begin{bmatrix} V_{x_g} \\ V_{y_g} \\ V_{z_g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{kx_g} - W_{x_g} \\ V_{ky_g} - W_{y_g} \\ V_{kz_g} - W_{z_g} \end{bmatrix} \quad (9.65)$$

在常值风的情况下,由上两个等式和图 9.8 得

$$V = \sqrt{(V_{kx_g} - W_{x_g})^2 + (V_{ky_g} - W_{y_g})^2 + (V_{kz_g} - W_{z_g})^2} \quad (9.66)$$

在仅考虑风的水平风量时,则有

$$V = \sqrt{(V_{kx_g} - W_{x_g})^2 + V_{ky_g}^2 + (V_{kz_g} - W_{z_g})^2} \quad (9.67)$$

在图 9.8 上, u 和 u_k 分别表示弹丸的空气速度和地面速度在水平面 $OX_g Z_g$ 上的投影。利用图 9.8, 展开等式(9.65)中各项的值,得

$$\begin{aligned} V \cos \vartheta_a \cos \psi_a &= V_k \cos \theta \cos \Psi - W_{x_g}; \\ V \sin \vartheta_a &= V_k \sin \theta - W_{y_g}; \\ -V \cos \vartheta_a \sin \psi_a &= -V_k \cos \theta \sin \Psi - W_{z_g} \end{aligned} \quad (9.68)$$

由此求得空气速度的模为

$$\begin{aligned} V &= [(V_k \cos \theta \cos \Psi - W_{x_g})^2 + (V_k \sin \theta - W_{y_g})^2 \\ &\quad + (V_k \cos \theta \sin \Psi + W_{z_g})^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (9.69)$$

相应地还有

$$\sin\theta_s = \frac{V_k \sin\theta - W_{xg}}{V} \quad \operatorname{tg}\psi_k = \frac{V_k \cos\theta \sin\Psi + E_{z_k}}{V_k \cos\theta \cos\Psi - W_{xg}} \quad (9.70)$$

一般说来,在求解考虑攻角和侧滑角(按相对于空气速度的关系确定)的空间问题时,风的影响机理是极为复杂的,因而在实际工作中常单独研究纵风和横风的作用。

在确定主动段上火箭侧向运动方向时,火箭质心与压力中心的相互位置具有重要意义。侧风 W_x 对火箭的作用产生了作用在压力中心上的附加空气动力 R_B (见图 9.9),由于在静稳定尾翼式火箭上

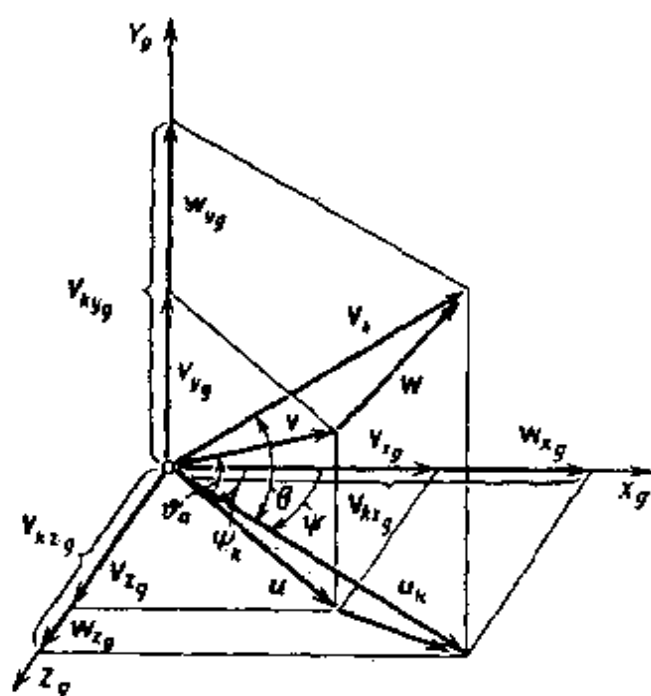


图9.8 地面速度矢量 V_k 和
风速矢量 W 间相互位置图

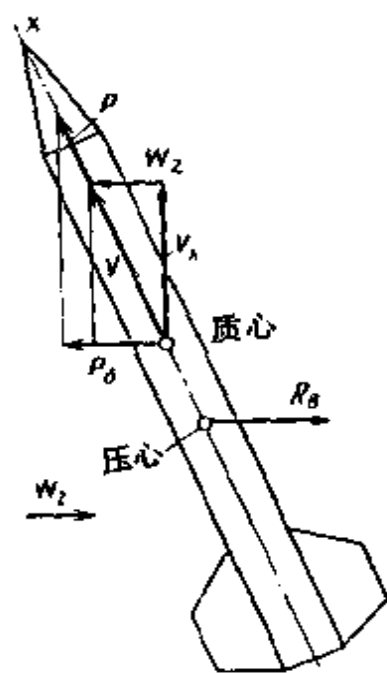


图 9.9 无控火箭迎风转动图

压心位于质心之后靠近尾翼的地方,因此在力 R_B 的力矩作用下,火箭头部将迎风转过去,使其纵轴与空气速度矢量一致,而此时又出现了与风相反方向的推力侧分力 P_s ,当 $P_s > R_B$ 时火箭将迎风飘移。对于涡轮式火箭弹,由于偏流、马格努斯力和侧力的共同作用,在弹道主动段上可以形成顺风方向的飘移。在弹道被动段上因 $P = 0$,火箭就像普通炮弹一样,将顺着横风的方向移动。在图 9.10 上表示了静稳定尾翼式火箭在弹道主动段上,当不考虑火箭惯性时火箭迎风侧

向运动的情况,我们将质心速度在起飞坐标系里的投影用 $u_k = V_k \cos \theta$ 表示,而将相对运动速度水平投影用 u_r 表示,按照图 9.10 有

$$u_r = \sqrt{u_k^2 + W_z^2 + 2u_k W_z \sin \psi} \quad (9.71)$$

$$\cos \Psi_r = \frac{V_k \cos \theta \cos \Psi}{u_r} \quad (9.72)$$

确定相对侧向运动中侧滑角的补充方程为

$$\beta_{rr} = \psi - \Psi_r \quad \beta_r = \beta_{rr} \cos \theta \quad (9.73)$$

图 9.11 为旋转稳定火箭(炮弹)在主动段上当推力侧分力作用在风的方向时的侧向运动图,根据图 9.11,得

$$u_r = \sqrt{u_k^2 + W_z^2 - 2u_k W_z \sin \Psi} \quad (9.74)$$

由(9.68)式令 $W_{y_g} = W_{x_g} = 0$,得

$$\cos \Psi_r = u_r^{-1} V_k \cos \theta \cos \Psi \quad (9.75)$$

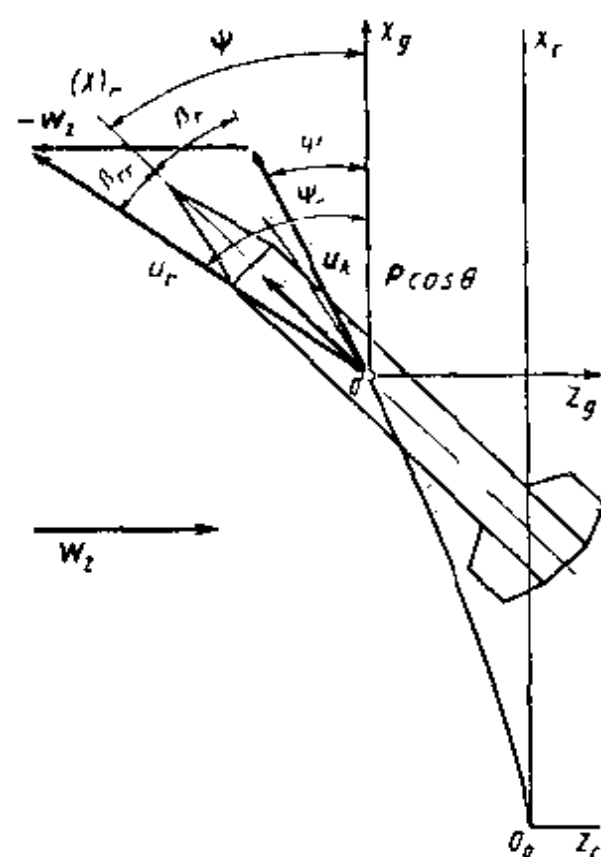


图 9.10 火箭迎风侧向运动时的侧滑角构成图

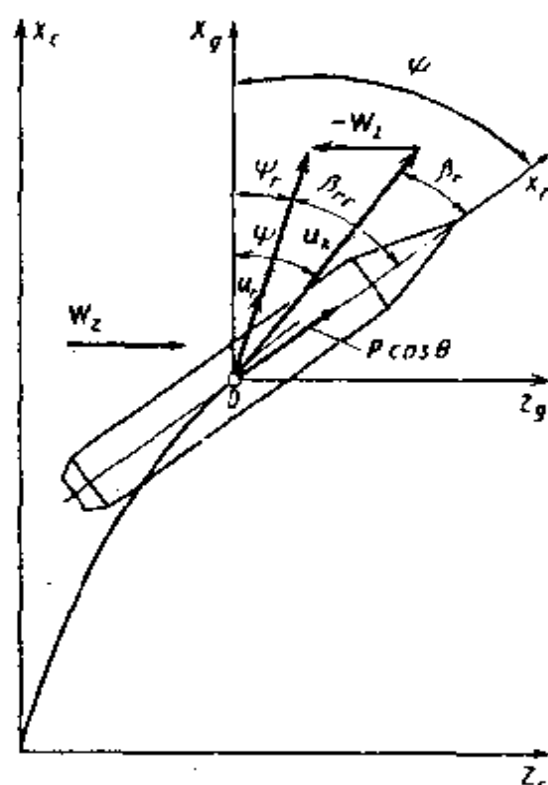


图 9.11 火箭在顺风方向侧向运动时的侧滑角构成图

和补充方程

$$\beta_r = (\psi - \Psi_r) \cos \theta \quad (9.76)$$

将稳定的火箭看作一个变质量质点,并认为在有风时推力矢量与质心空气速度矢量一致,则得到空气速度方向与起飞坐标系相应坐标轴之间夹角的余弦:

$$\frac{V_{rx_c}}{V_r} = \frac{V_{kx_c} - W_{x_c}}{V_r}, \quad \frac{V_{ry_c}}{V_r} = \frac{V_{ky_c} - W_{y_c}}{V_r}, \quad \frac{V_{rz_c}}{V_r} = \frac{V_{kz_c} - W_{z_c}}{V_r} \quad (9.77)$$

如果迎面阻力是通过弹道系数 c 和函数 $G(V_r)$ 来确定的,则现在按(3.126)式表示的量 E 就应该用速度 V_r 来计算:

$$E_r = cH_r(y)G(V_r) \quad (9.78)$$

对于常质量弹丸,考虑风的影响的方程组可写成一般方程组(9.14)的形式:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -E_r(\dot{x} - W_x); \\ \ddot{y} &= -E_r\dot{y} - g; \\ \ddot{z} &= -E_r(\dot{z} - W_z) \end{aligned} \quad (9.79)$$

利用(9.67)可以得到

$$V_r = V_k \sqrt{1 + \frac{W^2}{V_k^2} - \frac{2\dot{x}W_x}{V_k^2} - \frac{2\dot{z}W_z}{V_k^2}} \quad (9.80)$$

式中, $W = \sqrt{W_x^2 + W_z^2}$ 以及 $V_k = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

常质量弹丸的速度通常远大于风速,略去(9.80)式中与1相比为小量的 W^2/V_k^2 和 $2\dot{z}W_z/V_k^2$,将简化后的(9.80)式分解成二项级数并略去其中含有高于一阶的风速 W_x 与速度 V_k 比值的项,仿照文献[21],可得到

$$V_r = V_k - W_x \dot{x} V_k^{-1} \quad (9.81)$$

$$G(V_r) = G(V_k) [1 - W_x V_k^{-2} f(V_k) \dot{x}] \quad (9.82)$$

$$E_r = E [1 - W_x V_k^{-2} f(V_k) \dot{x}] \quad (9.83)$$

式中 $f(V_k)$ 按(9.25)式确定。

将 E_r 代入(9.79)式中并略去二阶小量可得

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -E\dot{x} + E[1 + V_k^{-2}f(V_{kx})\dot{x}^2]W_x; \\ \ddot{y} &= -E\dot{y} + EV_k^{-2}f(V_{kx})\dot{x}\dot{y}W_x - g; \\ \ddot{z} &= -E(\dot{z} - W_z)\end{aligned}\quad (9.84)$$

9.3.5 弹道平均风和弹道平均温度偏差

在弹道计算中要引进气温和风沿高度变化的具体函数是一个困难的问题,按照微分修正公式来确定弹道诸元改变量的近似方法就简单得多。如果在计算中引入沿全弹道不变的风以及不变的温度偏差,那么就可应用微分修正公式来确定风以及不变的空气温度与标准气温函数 $\tau(y)$ 偏差的影响,这些常量就称为弹道平均值。弹道风 W_0 和弹道气温偏差 $\delta\tau_0$ 按如下条件确定:由它们产生的落点偏差应与实际沿高度变化的风和气温偏差的作用效果相同。如果已知弹道平均值,则落点坐标与标准气象条件下计算值之差就可按简单的公式确定。由弹道气温偏差所引起的距离改变量为

$$\delta x_c = \frac{\partial x_c}{\partial \tau} \delta \tau_0 \quad (9.85)$$

由弹道风纵向分量作用产生的距离改变量为

$$\delta x_{cW_x} = \frac{\partial x_c}{\partial W_x} W_{x0} \quad (9.86)$$

由弹道风横向分量作用产生的落点偏差为

$$z_{cW_x} = \frac{\partial z_c}{\partial W_x} W_{x0} \quad (9.87)$$

理论上最有根据的、对于科学研究适用和能对近似方法进行检验的弹道平均值计算方法应根据上述定义的条件得出。作为例子我们研究弹道纵风的计算方法,先根据给定的未扰动弹道确定射程 x_c 以及对全弹道常值风的修正系数 $\partial x_c / \partial W_x$ 。确定修正系数时可用一个精确的方法进行,例如求解含有常值风的方程组。

在实际风沿高度变化的条件下重新进行弹道计算,得到 x_{cW_x} 以及改变量

$$\delta x_{cW_x} = x_{cW_x} - x_c \quad (9.88)$$

对于具体的弹道和具体的风函数,弹道纵风即为

$$W_{\tau_0} = \frac{\delta x_c W_x}{\partial x_c / \partial W_x} \quad (9.89)$$

类似的方法可用于确定道横风 W_{τ_0} 以及弹道温度偏差 $\delta\tau_0$ 。

在实际工作中常采用更简单的、但精度稍差的方法,这就是与确定“层权”有关的方法。为了确定层权和弹道平均值,将弹道沿高度分为几层(通常是等厚度),层厚的取法与弹道高有关,一般按 100m 的倍数取 200 ~ 800m。对每一层都要确定修正系数 $(\partial x_c / \partial \tau)_i$; $(\partial x_c / \partial W_x)_i$; $(\partial x_c / \partial W_z)_i$ 。前两个修正系数分别确定了仅在第 i 层气温增加 1K,风速为 1m/s 时全射程的改变;第三个修正系数分别确定了仅在第 i 层有 1m/s 横风时弹丸落点的侧偏。对于第 i 层每个修正系数的计算都要单独地进行。当在第 i 层有气温改变或考虑风时,假设在其它层里 $\tau(y)$ 是标准变化的并且无风。对于每条弹道需要进行 n 次计算(n 是总的层数,各层高度之和等于弹道高)。弹道气温偏差由如下等式确定:

$$\left[\frac{\partial x_c}{\partial \tau}\right]_1 \delta\tau_1 + \left[\frac{\partial x_c}{\partial \tau}\right]_2 \delta\tau_2 + \dots + \left[\frac{\partial x_c}{\partial \tau}\right]_n \delta\tau_n = \frac{\partial x_c}{\partial \tau} \delta\tau_0 \quad (9.90)$$

式中 $\delta\tau_i$ 是第 i 层实际平均气温与按气温沿高度标准变化确定的平均气温之间的偏差,则弹道气温偏差为

$$\delta\tau_0 = \frac{\sum_i \left[\frac{\partial x_c}{\partial \tau}\right]_i \delta\tau_i}{\partial x_c / \partial \tau} \quad (9.91)$$

比值

$$q_{\tau,i} = \frac{(\partial x_c / \partial \tau)_i}{\partial x_c / \partial \tau} \quad (9.92)$$

称为第 i 层气温的权,因而

$$\delta\tau_0 = \sum_{i=1}^n q_{\tau,i} \delta\tau_i \quad (9.93)$$

计算弹道风层权是很困难的,因为风是矢量,它的模和方向随层号不同可以改变。此外,同一型号的火箭或火炮系统尽管有相同的层权,随射击方向不同将有不同的弹道风。因此,弹道风的计算要在零方位角这个约定的射击方向上进行,也即在正北方向上进行,然后换算到实际射击方向。射击方向由射击方位角 $A_{\sigma T}$ 确定, $A_{\sigma T}$ 是从正北方起顺时针转到目标方向量出的角度。风向角 A_w 同样是从正北方

$$\delta x_{cW_x} = \sum_i^{\pi} \left[\frac{\partial x_c}{\partial W_x} \right]_i W_{(c-n)i} = \frac{\partial x_c}{\partial W_x} W_{\sigma(c-n)}$$
$$W_{\sigma(c-10)} = \sum_{i=1}^n q_{W_{\sigma^i}} W_{(c-10)i} \quad (9.94)$$
$$q_{w_x i} = \left[\frac{\partial x_c}{\partial W_x} \right]_i / \frac{\partial x_c}{\partial W_x} \quad (9.95)$$
[illegible]

在自东向西吹的横风作用下弹丸的侧偏等于

$$z_c W_z = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial z_c}{\partial W_z} \right]_i W_{(B-3)i} = \frac{\partial z_c}{\partial W_z} W_{\sigma(B-3)}$$
$$W_{\sigma(B-3)} = \sum_{i=1}^n q_{W_{\sigma}} W_{(B-3)i} \quad (9.96)$$
$$q_{W_2 i} = \left[\frac{\partial z_c}{\partial W_2} \right]_i / \frac{\partial z_c}{\partial W_2}$$

弹道风作用的方向按下面的风角确定:

$$\Psi_{W_g} = \operatorname{arctg} \frac{|W_{\sigma(B-3)}|}{|W_{\sigma(c-n)}|} \quad (9.97)$$

如弹道风从第一象限吹向阵地则 $A_{W_g} = \Psi_{W_g}$; 如从第二象限吹向阵地则 $A_{W_g} = 360^\circ - \Psi_{W_g}$; 如果从第三象限吹向阵地则 $A_{W_g} = 180^\circ + \Psi_{W_g}$; 如果从第四象限吹向阵地(象图 9.12 中所示), 则 $A_{W_g} = 180^\circ - \Psi_{W_g}$ 。

弹道风速的模为

$$W_g = \sqrt{W_{\sigma(c-n)}^2 + W_{\sigma(B-3)}^2} \quad (9.98)$$

对于实际射击方向, 弹道风的纵向和横向分量按如下公式确定:

$$\begin{aligned} W_{\sigma_c} &= -W_g \cos(A_{cT} - A_{W_g}) \\ W_{\sigma_x} &= W_g \sin(A_{cT} - A_{W_g}) \end{aligned} \quad (9.99)$$

对于同样的一层, 层权 $q_{\tau_i}, q_{W_{x_i}}, q_{W_{y_i}}$ 的大小是不同的, 并且从一层到另一层它们还有改变。如按公式(9.90) 令 $\delta\tau_1 = \delta\tau_2 = \dots \delta\tau_n = \delta\tau_\sigma$, 则 $q_{\tau_1} + q_{\tau_2} + \dots + q_{\tau_n} = 1$; 类似地也有 $\sum_{i=1}^n q_{W_{x_i}} = 1$ 和 $\sum_{i=1}^n q_{W_{y_i}} = 1$ 。层权之和等于 1 是层权计算正确与否的一种检验。

对于不同的武器系统及同一系统的不同弹道, 层权都是不同的, 应该预先将它们算出。在根据气象通报进行射击准备时, 先按层算出 $\delta\tau_i, W_{(c-n)i}, W_{(B-3)i}$, 然后再计算弹道气温偏差和弹道风。

9.3.6 对常值纵风和横风的修正公式

本节详细研究常值纵风和横风分别对弹丸质心运动影响的计算方法。

首先只研究纵向运动。以下所述方法的特点是, 在一个相对于地球沿风的方向以风速作牵连运动的坐标系里来研究弹丸的质心运动。在有纵向顺风的情况下相对地于地球(在绝对运动中)的全射程为

$$x_{cW_x} = x_{cr} + W_x t_c \quad (9.100)$$

式中 x_{cr} 是相对运动中的射程; t_c 是全飞行时间, 无论是对相对运动还是对绝对运动它是相同的。

以 x_c 表示无风情况下绝对运动中的射程,于是得到由纵风产生的射程改变量

$$\delta x_{cw_x} = x_{cw_x} - x_c$$

或者
$$\delta x_{cw_x} = x_{c_r} - x_c + W_x t_c \quad (9.101)$$

差值 $x_{c_r} - x_c$ 通常不大,故可用微分修正公式计算,注意到无风情况下常质量弹丸的弹道由量 c, V_0 和 θ_0 确定,则有

$$\delta x_{cw_x} = \frac{\partial x_c}{\partial V_0} \delta V_0 + \frac{\partial x_c}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 + \frac{\partial x_c}{\partial c} \delta c + W_x t_c \quad (9.102)$$

在绝对运动和相对运动中初速和射角的差值分别是

$$\delta V_0 = V_{or} - V_0 \quad \delta \theta_0 = \theta_{or} - \theta_0 \quad (9.103)$$

弹道系数的差值 $\delta c = 0$ 。

根据图 9.13,在纵向运动中相对初速和射角为

$$V_{or} = \sqrt{V_0^2 + W_x^2 - 2V_0W_x\cos\theta_0}$$

$$\operatorname{tg}\theta_{or} = \frac{V_0\sin\theta_0}{V_0\cos\theta_0 - W_x} \quad (9.104)$$

根据标准弹道数据确定了主要修正系数 $\partial x_c/\partial V_0, \partial x_c/\partial \theta_0$ 和飞行时间 t_c 以后,还必须算出 $V_{or}, \theta_{or}, \delta V_0, \delta \theta_0$ 。

纵风产生的射程改变按公式(9.102)确定,对于大初速情况可利用公式(9.81),以 $\cos\theta_0$ 取代其中的 \dot{x}/V_k 后得

$$\delta V_0 = V_{or} - V_0 = -W_x\cos\theta_0 \quad (9.105)$$

以 $\operatorname{tg}\theta_{or} = \operatorname{tg}\theta_0(1 - W_x/V_0\cos\theta_0)^{-1}$ 取代(9.104)式,将括号中的量展开成二项式级数并略去二阶和二阶以上的小量,得

$$\operatorname{tg}\theta_{or} - \operatorname{tg}\theta_0 = W_x\sin\theta_0/(V_0\cos^2\theta_0)$$

近似认为 $\delta(\operatorname{tg}\theta_0) = \operatorname{tg}\theta_{or} - \operatorname{tg}\theta_0 \approx \delta\theta_0/(\cos^2\theta_0)$ 得

$$\delta\theta_0 = \frac{W_x}{V_0}\sin\theta_0 \quad (9.106)$$

将(9.105)和(9.106)代入(9.102)式,经变换后得近似修正公式

$$\delta x_{cw_x} = W_x \left[t_c - \frac{\partial x_c}{\partial V_0} \cos\theta_0 + \frac{\partial x_c}{\partial \theta_0} \cdot \frac{\sin\theta_0}{V_0} \right] \quad (9.107)$$

式中 $\partial x_c/\partial \theta_0$ 以 m/rad 为单位。

在常值横风作用下弹丸质心绝对运动的侧偏为

$$z_{W_z} = z_r + W_z t \quad (9.108)$$

在以横风速度在横风作用方向上运动的坐标系 O, X, Y, Z_r 中, 弹丸的质心速度为 $V_{or} = V_0 - W_z$ 。由图 9.14 得

$$V_{or} = \sqrt{V_0^2 + W_z^2} \quad (9.109)$$

或者

$$V_{or} = V_0 \sqrt{1 + (W_z/V_0)^2} \quad (9.110)$$

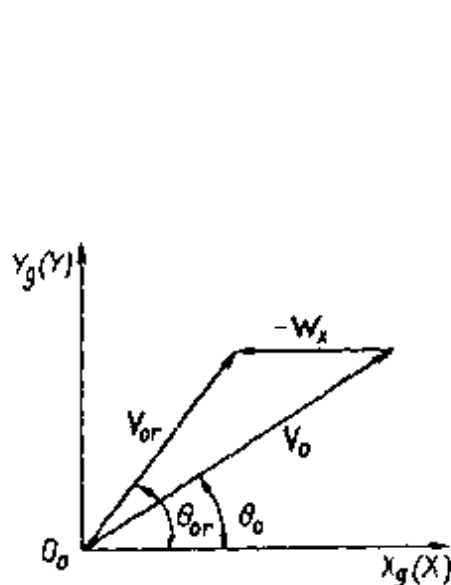


图9.13 在有常值顺风作用时, 确定相对平面运动中初速和射角的图形

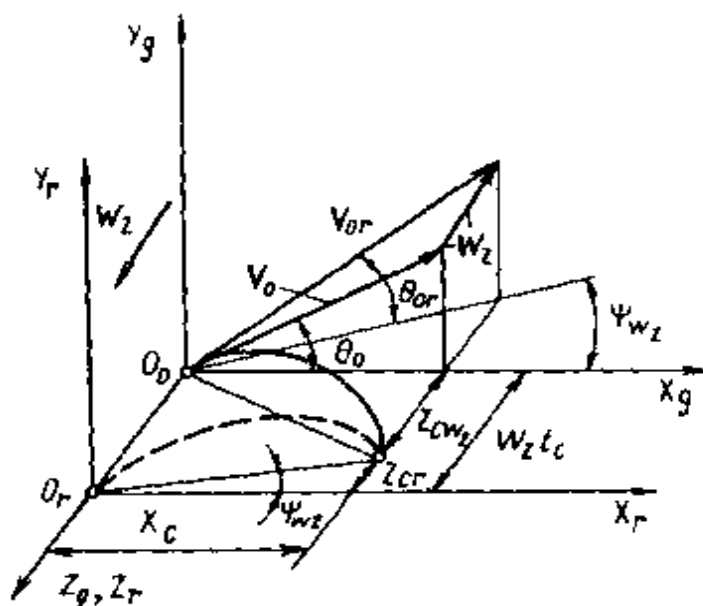


图9.14 在有常值横风作用时 确定在相对侧向运动中初速和射角的图形

对于大初速 $(W_z/V_0)^2 \ll 1$, 因此 $\delta V_0 = 0$, $V_{or} \approx V_0$ 。由同一图可见

$$\operatorname{tg} \theta_{or} = \frac{V_0 \sin \theta_0}{\sqrt{V_0^2 \cos^2 \theta_0 + W_z^2}} = \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{\sqrt{1 + W_z^2 (V_0 \cos \theta_0)^{-2}}} \quad (9.111)$$

对于较小的射角和较大的初速可以认为 $\operatorname{tg} \theta_{or} = \operatorname{tg} \theta_0$ 以及 $\delta \theta_0 = 0$ 。在所取的假设下, 将相对于坐标系 O, X, Y, Z_r 的相对运动弹道平面绕 y_r 轴转过 ψ_{W_z} , 于是得到落点的侧偏为

$$z_{cr} = -x_c \operatorname{tg} \psi_{W_z} = -\frac{W_z x_c}{V_0 \cos \theta_0} \quad (9.112)$$

按照(9.108)式, 对于任意弹道点, 弹丸相对于地面起飞坐标系的侧偏为

$$z_{w_z} = W_z t - \frac{W_z x_c}{V_0 \cos \theta_0} \quad (9.113)$$

而对于落点则为

$$z_{w_z} = W_z \left[t_c - \frac{x_c}{V_0 \cos \theta_0} \right] \quad (9.114)$$

我们指出,量 $\text{tg} \phi_{w_z} = \frac{W_z}{V_0 \cos \theta_0}$ 是在不考虑纵风的条件下得到的,如果考虑纵风则有

$$\text{tg} \phi_{w_z} = \frac{W_z}{V_0 \cos \theta_0 - W_x} \quad (9.115)$$

由于作了简化,使得公式(9.107)和(9.114)在小初速和大射角情况下有明显的误差,在 $V_0 > 250\text{m/s}$ 和 $\theta_0 < 45^\circ$ 的情况下按公式(9.107)和(9.114)可得到可以接受的结果。

9.3.7 射击时的气象准备

注意到上述一般性原理后,我们再来简单地研究一下地炮武器和火炮自动系统在进行战斗射击时实际气象准备问题。

射击气象准备就是要利用射击控制仪(ПВ С)确定和计算气压偏差值 Δh 或空气密度的偏差 $\Delta \Pi$, 弹道风向 A_w 和风速 W_w 。ПВ С是为解决火力控制问题而预先设计好的复杂仪器组件和解算装置,它用于接受目标指示;跟踪目标,也就是连续和精确地决定目标的坐标;确定目标运动参数;求解弹丸与目标相遇的问题;连续地拟定瞄准角并让火炮沿此瞄准角瞄准。

在不能获得给定高度上的空气密度值以及弹道风的方向和速度时就要利用它们的地面值。

气压和气温与标准条件的偏差产生的影响是主要的,而相对湿度改变对空气密度的影响是次要的,通常利用虚温的概念予以考虑。

大气参数(气象条件)沿弹丸飞行高度的变化可用测定的方法、计算的方法以及以气象要素(弹道偏差)的弹道平均值替代的方法予以考虑。

弹道偏差的测定由专门的工作部门进行(特别是在舰队中它由舰队专门的水文气象台站来测定),相应的信息按规定以通报的形式

发往各个部门。对于地炮的射击准备,对海岸目标和海洋目标利用“气象平均值”通报,通报的有效时间在不稳定天气的情况下与弹道高无关——不超过两小时;在稳定天气的情况下,在弹道高 800m 以内通报的有效时间可延长到 3h,而在 800 ~ 1600m 高度上可延长到 6h。

列在气象通报中的气压偏差(第 4 组数字)应转换到火力阵地(OII)的高程上,如果阵地(OII)与炮兵气象站(AMC)之高程差超过 100m,则为了将 AMC 弹道换算成炮兵连弹道,还必须将这个高程差乘以 1.5;如果气象站 AMC 与炮兵连的高程差不超过 200m,则在每 10m 高差上引入 1mmHg^①的修正量,当 OII 低于 AMC 时取修正量为“+”,当 OII 高于气象站时取“-”号。

弹道气温偏差、弹道风速和风向按气象通报上的入口高度(规定的高度 $Y_{\text{вх}}$)确定,而此入口高度由射表查取,如果表中未指出 $Y_{\text{вх}}$,那就要按专门的图解表查取。弹道风应分解成纵风和横风,为此由射击方位角算出弹道风方位角,然后求得风角(取整到 100 密位);再按风角和风速查专门的表。在有明显山区地貌特征的情况下,“气象平均值”通报要作如下的修改^[66]:

表 9.2 对“气象平均值”通报的修正

火力阵地高程 /m	火力阵地表定高程 /m	对地面气压偏差的修正 /mmHg
使用山地射表时		
到 250	0	0
250 ~ 750	500	45
750 ~ 1250	1000	85
1250 ~ 1750	1500	125
1750 ~ 2250	2000	160
2250 ~ 2750	2500	195
超过 2750	3000	230
使用普通射表时		
任何高度上	0	0

① 气压单位换算为 $1\text{mmHg} = 1.333\text{hPa}$ ——译者

火力阵地高程	在 AMC 高于 OII 时对气温偏差的修正				
	+ 1000	+ 500	0	- 500	- 1000
在利用山地射表时					
到 250	6	3	0	- 3	-
250 ~ 750	9	6	3	0	- 3
750 ~ 1250	12	9	6	3	0
1250 ~ 1750	16	13	10	7	4
1750 ~ 2250	19	16	13	10	7
2250 ~ 2750	22	19	16	13	10
超过 2750	25	22	19	16	13
在利用普通射表时					
任何高度上	6	3	0	- 3	- 6

在地面气压偏差中要加修正量 δh_r , 此修正量按火力阵地 OII 的表高值 y_r 来取(表 9.2), y_r 也就是在确定瞄准角时所取的表尺分划表入口高度;

对所有标准高度上的气温偏差都要加上精确到 1°C 的修正量 $\delta\tau$ (见表 9.2), $\delta\tau$ 按高度 y_r 以及 AMC 与 OII 之高差 $\Delta y_{\text{AMC}} = y_{\text{AMC}} - y_{\text{OII}}$ 来确定;

对通报上所有的标准高度要加上(考虑符号)修正量 $\Delta y_{\text{cr}} = 2\Delta y_{\text{AMC}}$ (归整到 100m);

如果 $|\Delta y_{\text{AMC}}| < 200\text{m}$, 取修正量等于零。

修正以后的通报就可像平原地区“气象平均值”通报一样使用, 并且, 如果通报中的入口高度低于修正后最小标准高度时, 则关于气温的偏差和风的数据就按这个最低高度确定。

§ 9.4 无控火箭的空间扰动运动方程

9.4.1 推力偏心影响的计算

除了气象因素(首先是风)以外, 使无控火箭精度变坏的一个重要扰动因素是推力偏心。推力偏心由推力矢量与喷管出口截面的交

点相对于火箭纵轴的线偏移大小以及推力矢量与纵轴的偏斜角决定^[35]。

为了考虑由推力偏心产生的弹道扰动的影响，须在火箭质心空间运动一般方程中加入由于推力矢量与火箭纵轴不平行度所确定的推力项。

角 φ_1 确定了垂直于弹轴的推力分量 P_n 的作用线在固连坐标系里的位置，角 φ_2 确定了由线推力偏心产生的推力矩作用平面的位置。沿纵轴的长度 x_r 确定了弹丸质心至含有推力作用点的平面的距离。推力沿固连坐标系三轴的分量是

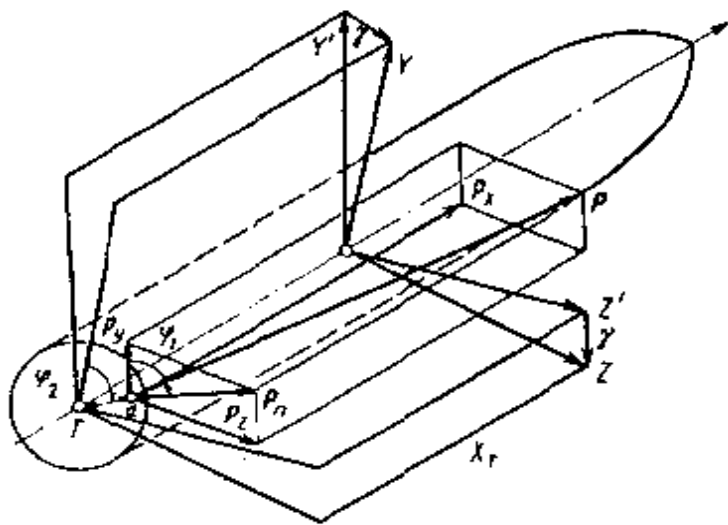


图 9.15 具有线偏心 d 和偏心角 ϵ 的推力矢量

$$P_x = P \cos \epsilon \quad P_y = P \sin \epsilon \cos \varphi_1 \quad P_z = P \sin \epsilon \sin \varphi_1 \quad (9.116)$$

引入一个不随弹丸自转的坐标系 $OX'Y'Z'$ (在图 9.15 中 γ 角是自转角)，求得推力在此坐标系轴上的投影

$$\begin{bmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \\ P_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (9.117)$$

按元素分开写则有

$$\begin{aligned} P_{x'} &= P \cos \epsilon; \\ P_{y'} &= P \sin \epsilon \cos \varphi_1 \cos \gamma - P \sin \epsilon \sin \varphi_1 \sin \gamma = P \sin \epsilon \cos(\varphi_1 + \gamma); \\ P_{z'} &= P \sin \epsilon \cos \varphi_1 \sin \gamma + P \sin \epsilon \sin \varphi_1 \cos \gamma = P \sin \epsilon \sin(\varphi_1 + \gamma) \end{aligned} \quad (9.118)$$

利用从坐标系 $OX'Y'Z'$ 转到弹道坐标系的转换矩阵，可求得推力在弹道坐标系三轴上的投影为

$$\begin{bmatrix} P_{x_k} \\ P_{y_k} \\ P_{z_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_k \cos\beta_k & -\sin\alpha_k \cos\beta_k & \sin\beta_k \\ \sin\alpha_k & \cos\alpha_k & 0 \\ -\cos\alpha_k \sin\beta_k & \sin\alpha_k \sin\beta_k & \cos\beta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \\ P_{z'} \end{bmatrix} \quad (9.119)$$

式中角 α_k 和 β_k 是确定地面速度矢量 V_k 相对于坐标系 $OX'Y'Z'$ 方位的角度。按元素分开写则有

$$\begin{aligned} P_{x_k} &= P \cos \varepsilon \cos \alpha_k \cos \beta_k - P \sin \varepsilon \cos(\varphi_1 + \gamma) \sin \alpha_k \cos \beta_k \\ &\quad + P \sin \varepsilon \sin(\varphi_1 + \gamma) \sin \beta_k \\ P_{y_k} &= P \cos \varepsilon \sin \alpha_k + P \sin \varepsilon \cos(\varphi_1 + \gamma) \cos \alpha_k \\ P_{z_k} &= -P \cos \varepsilon \cos \alpha_k \sin \beta_k + P \sin \varepsilon \cos(\varphi_1 + \gamma) \sin \alpha_k \sin \beta_k \\ &\quad + P \sin \varepsilon \sin(\varphi_1 + \gamma) \cos \beta_k \end{aligned}$$

9.4.2 无控火箭空间扰动运动的数学模型

为了简化一般运动方程,我们假设轴对称飞行器绕自身纵轴的旋转不改变空气动力和力矩的空间方位,这时可取 $\gamma_0 = 0$ 。此外,在建立轴对称飞行器转动运动方程时,可利用 OX' 轴与弹丸纵轴一致但整个坐标系不参加相对于绕纵轴旋转的坐标系(半固连坐标系)。引入了这样的坐标系以后可以使转动运动的运动学方程和动力学方程得到某些简化。弹丸的自转角速度矢量 ω 沿这两个坐标系的轴分解后得

$$\omega = \omega_x + \omega_y + \omega_z = \omega_{x'} + \omega_{y'} + \omega_{z'} \quad (9.120)$$

转动运动的动力学方程在固连坐标系上的投影分别有

$$\begin{aligned} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= \sum_{i=1}^n M_{xi} \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z &= \sum_{i=1}^n M_{yi} \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x &= \sum_{i=1}^n M_{zi} \end{aligned}$$

在上面的方程中作替换

$$\omega_y = \omega_{y'} \cos \gamma - \omega_{z'} \sin \gamma \quad \sum_{i=1}^n M_{y'i} = \sum_{i=1}^n M_{y'i} \cos \gamma + \sum_{i=1}^n M_{z'i} \sin \gamma;$$

$$\omega_z = \omega_z' \cos \gamma - \omega_y' \sin \gamma \quad \sum_{i=1}^n M_{xi} = \sum_{i=1}^n M_{xi}' \cos \gamma - \sum_{i=1}^n M_{yi}' \sin \gamma \quad (9.121)$$

经代换后再考虑到对于轴对称弹丸有 $I_y = I_z = A, I_x = C$, 得

$$\begin{aligned} C\dot{\omega}_x &= \sum_{i=1}^n M_{xi}; \\ A[\dot{\omega}_y' + (\dot{\gamma} - \omega_x)\omega_z'] + C\omega_x\omega_z' &= \sum_{i=1}^n M_{yi}'; \\ A[\dot{\omega}_z' + (\omega_y - \dot{\gamma})\omega_y'] - C\omega_x\omega_y' &= \sum_{i=1}^n M_{zi}' \end{aligned} \quad (9.122)$$

运动学方程具有如下形式:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\gamma} + \dot{\phi} \sin \vartheta \quad (\omega_x' = \omega_x - \dot{\gamma} = \dot{\phi} \sin \vartheta); \\ \omega_y' &= \dot{\phi} \cos \vartheta \quad \omega_z' = \dot{\vartheta} \end{aligned} \quad (9.123)$$

将运动学关系式代入动力学方程中得

$$\begin{aligned} C\dot{\omega}_x &= \sum_{i=1}^n M_{xi}; \\ A\ddot{\phi} \cos \vartheta - 2A\dot{\phi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta + C\omega_x \dot{\vartheta} &= \sum_{i=1}^n M_{yi}'; \\ A\dot{\vartheta} + A\dot{\phi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - C\omega_x \dot{\phi} \cos \vartheta &= \sum_{i=1}^n M_{zi}' \end{aligned} \quad (9.124)$$

在写转动运动方程时, 方程的右边应含有由推力的线偏心和角偏心产生的推力矩的投影, 下面我们就来写出这个力矩的投影 M_{sx}, M_{sy}, M_{sz} 。由图 9.15 得推力矩沿固连坐标系 $OXYZ$ 三轴的投影为

$$\begin{aligned} M_{sx} &= -P_y d \cos \varphi_2 + P_z d \sin \varphi_2; \\ M_{sy} &= P_x d \sin \varphi_2 + P_z x_A; \\ M_{sz} &= -P_x d \cos \varphi_2 - P_y x_A \end{aligned} \quad (9.125)$$

经过从固连坐标系向半固连坐标系的转换后就得到在半固连坐标系上的力矩投影 M_{sy}' 和 M_{sz}' :

$$\begin{aligned} M_{sy}' &= M_{sy} \cos \gamma - M_{sz} \sin \gamma; \\ M_{sz}' &= M_{sy} \sin \gamma + M_{sz} \cos \gamma \end{aligned} \quad (9.126)$$

将 M_{sy} 和 M_{sz} 的表达式代到这里得

$$\begin{aligned} M_{sy}' &= P_x d \sin \varphi_2 \cos \gamma + P_z x_T \cos \gamma + P_x d \cos \varphi_2 \sin \gamma + P_y x_T \sin \gamma \\ &= P_x d \sin(\varphi_2 + \gamma) + x_T (P_z \cos \gamma + P_y \sin \gamma); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{x'} &= P_x d \sin \varphi_2 \sin \gamma + P_z x_T \sin \gamma - P_x d \cos \varphi_2 \cos \gamma - P_y x_T \cos \gamma \\
&= -P_x d \cos(\varphi_2 + \gamma) + x_T (P_z \sin \gamma - P_y \cos \gamma) \quad (9.127)
\end{aligned}$$

再将(9.116)式代入上式,最后得

$$\begin{aligned}
M_{x'} &= -P d \sin \epsilon \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + P d \sin \epsilon \sin \varphi_1 \sin \varphi_2; \\
&= -P d \sin \epsilon \cos(\varphi_1 + \varphi_2); \\
M_{y'} &= P d \cos \epsilon \sin(\varphi_2 + \gamma) + P x_T \sin \epsilon \sin(\varphi_1 + \gamma); \\
M_{z'} &= -P d \cos \epsilon \cos(\varphi_2 + \gamma) - P x_T \sin \epsilon \cos(\varphi_1 + \gamma) \quad (9.128)
\end{aligned}$$

将所求得的力和力矩的投影代入移动方程和转动方程中,得到如下便于在电子计算机上求解的方程组:

$$\begin{aligned}
1) \quad \frac{dV_k}{dt} &= \frac{1}{m} [P \cos \epsilon \cos \alpha_k \cos \beta_k - P \sin \epsilon \cos(\varphi_1 + \gamma) \sin \alpha_k \cos \beta_k \\
&\quad + P \sin \epsilon \sin(\varphi_1 + \gamma) \sin \beta_k - c_{x_a} \frac{\rho V^2}{2} S \{ \cos \theta \cos \vartheta_a [\cos \\
&\quad (\Psi - \phi_a) - 1] \} + c_{y_a} \frac{\rho V^2}{2} S \{ \cos \theta \sin \vartheta_a [1 - \cos(\Psi - \phi_a)] \\
&\quad + \sin(\vartheta - \vartheta_a) \} + c_{z_a} \frac{\rho V^2}{2} S \cos \theta \sin(\phi_a - \Psi)] - g \sin \theta \\
2) \quad \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{m V_k} (P \cos \epsilon \sin \alpha_k + P \sin \epsilon \cos(\varphi_1 + \gamma) \cos \alpha_k \\
&\quad - c_{x_a} \frac{\rho V^2}{2} S \{ \sin \theta \cos \vartheta_a [1 - \cos(\Psi - \phi_a)] + \sin(\theta - \vartheta_a) \} \\
&\quad + c_{y_a} \frac{\rho V^2}{2} S \{ \sin \theta \sin \vartheta_a [\cos(\Psi - \phi_a) - 1] + \cos(\theta - \vartheta_a) \} \\
&\quad + c_{z_a} \frac{\rho V^2}{2} S \sin \theta \sin(\Psi - \phi_a)) - \frac{g}{V_k} \cos \theta \\
3) \quad \frac{d\Psi}{dt} &= -\frac{1}{m V_k \cos \theta} [-P \cos \epsilon \cos \alpha_k \sin \beta_k + P \sin \epsilon \cos(\varphi_1 + \gamma) \\
&\quad \sin \alpha_k \sin \beta_k + P \sin \epsilon \sin(\varphi_1 + \gamma) \cos \beta_k - c_{x_a} \frac{\rho V^2}{2} S \cos \vartheta_a \sin(\Psi - \phi_a) \\
&\quad + c_{y_a} \frac{\rho V^2}{2} S \sin \vartheta_a \sin(\phi_a - \Psi) + c_{z_a} \frac{\rho V^2}{2} S \cos(\Psi - \phi_a)] \\
4) \quad \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_1 \\
5) \quad \frac{d\omega_1}{dt} &= -\omega_2^2 \sin \vartheta \cos \vartheta + \frac{C}{A} \omega_x \omega_2 \cos \vartheta + m_x^a \frac{\rho V^2}{2A} S l a +
\end{aligned}$$

$$m_z^{\omega} \frac{\rho V}{2} S l^2 \omega_1 - \frac{P d}{A} \cos \varepsilon \cos (\varphi_2 + \gamma) - \frac{P x_T}{A} \sin \varepsilon \cos (\varphi_1 + \gamma)$$

$$6) \frac{d\phi}{dt} = \omega_2$$

$$7) \frac{d\omega_2}{dt} = 2\omega_1\omega_2 \operatorname{tg} \vartheta - \frac{C}{A} \cdot \frac{\omega_x \omega_1}{\cos \vartheta} + m_y^{\beta} \frac{\rho V^2 S}{2A \cos \vartheta} l \beta + m_y^{\beta} \frac{\rho V S}{A} l \omega_2 \\ + \frac{P d}{A \cos \vartheta} \cos \varepsilon \sin (\varphi_2 + \gamma) + \frac{P x_T}{A \cos \vartheta} \sin \varepsilon \sin (\varphi_1 + \gamma)$$

$$8) \frac{d\gamma}{dt} = \omega_x - \omega_2 \sin \vartheta$$

$$9) \frac{d\omega_x}{dt} = m_x \frac{\rho V^2}{2C} S l + m_x^{\omega} \frac{\rho V}{C} S l^2 \omega_x - P d \sin \varepsilon \cos (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$10) \frac{dx_c}{dt} = V_k \cos \theta \cos \Psi$$

$$11) \frac{dy_c}{dt} = V_k \sin \theta$$

$$12) \frac{dz_c}{dt} = -V_k \cos \theta \sin \Psi$$

$$13) \cos \vartheta \cos \psi = \cos \vartheta \cos \Psi \cos \alpha_k \cos \beta_k - \sin \vartheta \cos \Psi \sin \alpha_k \\ - \sin \Psi \cos \alpha_k \sin \beta_k$$

$$14) \sin \vartheta = \sin \theta \cos \alpha_k \cos \beta_k + \cos \theta \sin \alpha_k$$

$$15) \cos \vartheta \cos \psi = \cos \vartheta_a \cos \psi_a \cos \alpha \cos \beta - \sin \vartheta_a \cos \psi_a \sin \alpha \\ - \sin \psi_a \cos \alpha \sin \beta$$

$$16) \sin \vartheta = \sin \vartheta_a \cos \alpha \cos \beta + \cos \vartheta_a \sin \alpha$$

$$17) V = \sqrt{(V_k \cos \theta \cos \Psi - W_{x_k})^2 + (V_k \sin \theta - W_{y_k})^2 + (V_k \cos \theta \sin \Psi + W_{z_k})^2}$$

$$18) \vartheta_a = \arcsin [V^{-1} (V_k \sin \theta - W_{y_k})]$$

$$19) \phi_a = \operatorname{arctg} \left[\frac{V_k \cos \theta \sin \Psi + W_{z_k}}{V_k \cos \theta \cos \Psi - W_{x_k}} \right]$$

$$20) m = m_0 - \int_{t_H}^{t_k} |\dot{m}| dt$$

$$21) A = A_0 - \int_{t_H}^{t_k} |A| dt$$

$$22) C = C_0 - \int_{t_H}^{t_k} |\dot{C}| dt$$

式中 t_H, t_k 为发动机开车和关车瞬时的时间。

上述方程组可用于分析当有沿坐标系 $O_0 X_g Y_g Z_g$ 三轴上风的分量时轴对称弹丸和火箭的扰动运动, 根据此方程组在电子计算机上进行弹丸的飞行模拟可以近似地估计风影响的特征, 例如扰动弹道对标准弹道风偏的非线性关系、风的分量对弹丸在纵向平面和侧向平面内运动的交叉影响以及复杂弹道的形成等。

第十章 火箭和弹丸扰动运动的起始条件

飞行器的类型和用途、它的空气动力特性、弹道特性和刚性、发射机构或起飞装置以及射击条件或火箭起飞条件等决定了火箭和弹丸扰动运动的起始条件。对于无控火箭和炮弹,由起始条件就唯一地确定了弹道形状。用来作为起始条件的参数和个数取决于数学模型的形式,准确一些说就是取决于在所研究的问题提法范围内确定飞行器状态的相坐标的个数。从求解外弹道学问题的观点讲,初始条件应建立在无控火箭与发射装置失去力的联系的瞬时或从身管中流出的燃气对已射出的炮弹的力的作用消失的瞬时。

§ 10.1 运载器运动对起始发射条件的影响

10.1.1 总初速的确定

武器运载器的运动像刚体一样可分解成质心的移动和相对于质心的振动。质心的移动由两种运动确定——在推进器作用下运载器的基本运动和在扰动介质作用下质心的振动(例如由海洋波浪激起的军舰的摇晃)。

当不考虑地球旋转影响时,在地球坐标系里弹丸的总速度为

$$V_0 = V_{or} + V_n + V_d \quad (10.1)$$

式中, V_{or} 是在弹丸与发射装置的定向器失去联系的瞬时,弹丸相对于发射装置的速度(对于火炮弹丸就是炮口速度); V_n 是武器的运载器(军舰、坦克、飞机)的行驶速度; V_d 是由运载器周围介质的扰动引起的附加速度(例如装有火箭的军舰的晃动)。

最大的困难是如何确定 V_n 。如果不考虑介质的影响则可令 $V_n =$

0, 那么火箭和弹丸的速度在地面坐标系中的大小和方向以如下方式确定: 让地面坐标系的原点与运载器的质心重合, 并令 O_0X_g 轴与速度矢量 V_n 方向一致(见图 10.1), 弹丸质心相对于运载器的速度 V_{or} 的方向我们以相对运动中的射角 θ_{or} 和射击方位角 q_{rc} 给定, 那么, 注意到 V_n 为移动运动速度, 则得到弹丸速度在地面坐标系中投影为

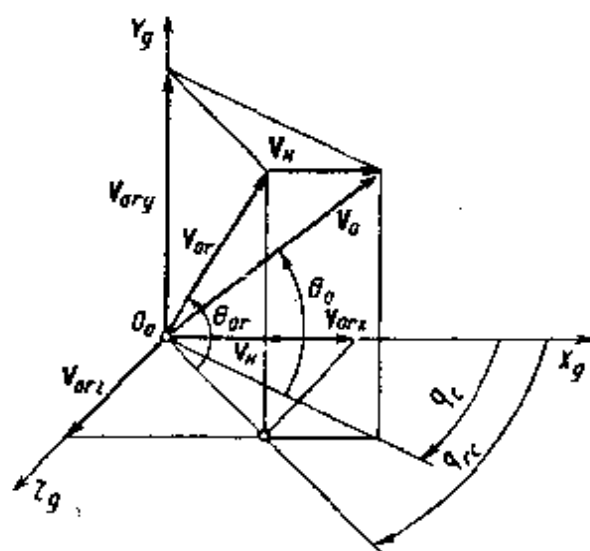


图 10.1 考虑运载器运动速度时得到的方位角、初速和射角

$$\begin{aligned} V_{0x_g} &= V_{or} \cos \theta_{or} \cos q_{rc} + V_n \\ V_{0y_g} &= V_{or} \sin \theta_{or} \\ V_{0z_g} &= -V_{or} \cos \theta_{or} \sin q_{rc} \end{aligned} \quad (10.2)$$

在绝对运动中弹丸速度的模为

$$V_0 = \sqrt{V_{0x_g}^2 + V_{0y_g}^2 + V_{0z_g}^2}$$

将(10.2)式代到这个式子中, 经变换后得

$$V_0 = V_{or} \sqrt{1 + 2V_n V_{or}^{-1} \cos \theta_{or} \cos q_{rc} + V_n^2 V_{or}^{-2}} \quad (10.3)$$

在绝对运动中射击方位角为

$$q_c = \arctg \left[\frac{V_{or} \cos \theta_{or} \sin q_{rc}}{V_{or} \cos \theta_{or} \cos q_{rc} + V_n} \right] \quad (10.4)$$

绝对运动中的射角是

$$\theta_0 = \arccos \left[\frac{V_{or} \cos \theta_{or} \cos q_{rc} + V_n}{V_0 \cos q_c} \right] \quad (10.5)$$

后 3 个公式是在弹丸为质点的假设条件下得到的。

10.1.2 运载器振动对火箭发射初始条件形成的影响

为了确定火箭相对地球的初始状态, 必须考虑火箭-火炮武器和发射装置振动的影响。下面将要用到 5 个坐标系(见图 10.2)。我们

将把武器运载器的振动看作是相对于地面坐标系 $O_0X_gY_gZ_g$ 的振动。与运载器固连的坐标系 $O_nX_nY_nZ_n$ 的原点位于运载器质心 O_n 上。坐标系 $O_nX_nY_nZ_n$ 相对于坐标系 $O_0X_gY_gZ_g$ 的转动由三个角度确定：水平面内的 ψ_n 角；铅直面内的 φ_n 角；相对于 O_nX_n 轴的转动角 γ_n 。发射装置的摇晃中心 O_n 是两个坐标系的原点，一个是与运载器固连的坐标系 $O_nX_nY_nZ_n$ ，一个是与发射装置固连的坐标系。

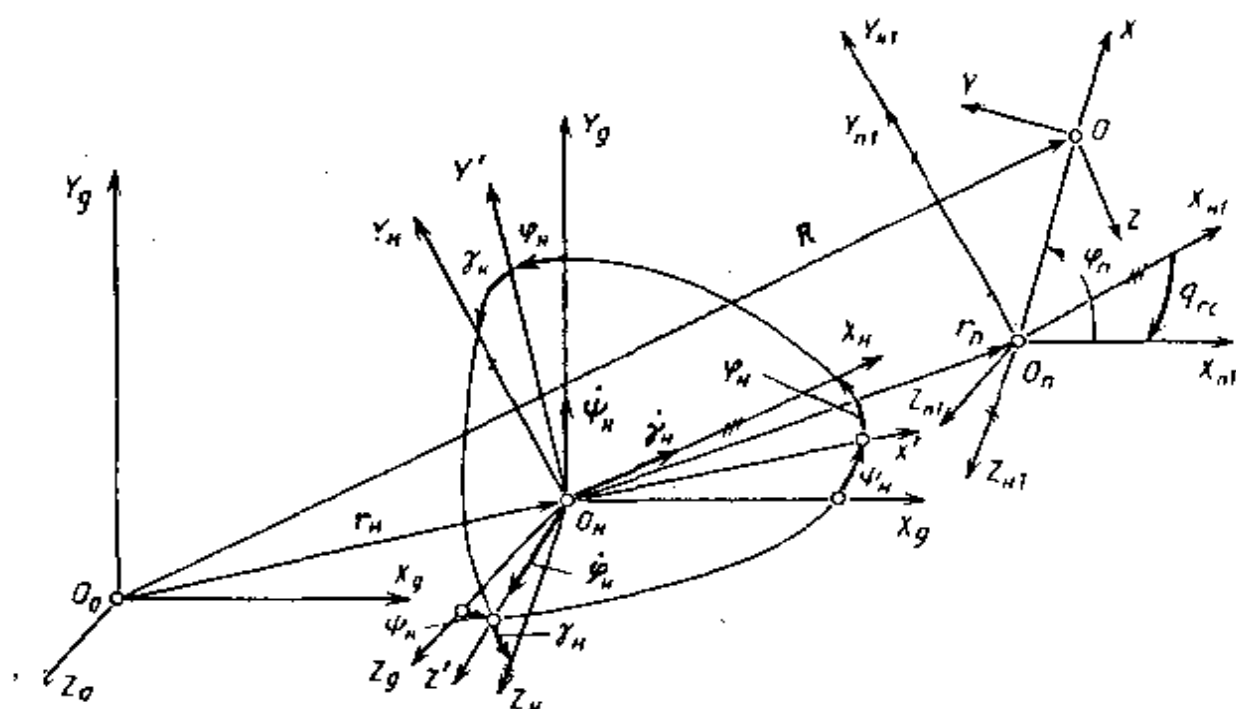


图 10.2 带有运动运载器的不稳定发射装置的火箭起飞情况坐标图

坐标系 $O_nX_nY_nZ_n$ 的轴与坐标系 $O_nX_nY_nZ_n$ 的轴平行，发射装置相对于运载器的转动由两个角度确定： O_nX_n 和 O_nX_n 轴之间的射击方位角 q_{rc} ，发射装置对固连于运载器上的 O_nX_n 和 O_nX_n 平面的倾斜角 φ_n 。第五个坐标系是与火箭固连的坐标系 $OXYZ$ ，当火箭从定向器上射出的瞬时此坐标系的 OX 轴（也即火箭的纵轴）位于射击面内。

火箭在与不稳定发射装置的定向器失去力的联系时所具有的俯仰角、偏航角和倾斜角可对两种运载器状态求得：一种是与运载器相固连的坐标系 $O_nX_nY_nZ_n$ 相对于地面坐标系的转角为零（ $\psi_n = \varphi_n = \gamma_n = 0$ ）时；另一处是转角不为零（即 $\psi_n \neq 0, \varphi_n \neq 0, \gamma_n \neq 0$ ）时。上述角度之差就确定了运载器振动对火箭相对于地面坐标系姿态角影

响的程度。

如果不考虑运载器和发射装置结构的弹性振动以及从定向器射出瞬时火箭的扰动,则利用从地面坐标系转换到与运载器固连的坐标系的转换余弦表就可得到确定与运载器角振动有关的、起飞瞬时火箭的俯仰、偏航和倾斜角偏差的方程。

对于 $\psi_n = \varphi_n = \gamma_n = 0$ 的情况以及所取的假设,在火箭从定向器上射击瞬时显然有 $\vartheta_0 = \varphi_n, \psi_0 = q_{rc}$ (自方向 $O_n X_n$ 开始) 和 $\gamma = 0$ 。

在 $\psi_n \neq 0, \varphi_n \neq 0$ 和 $\gamma_n \neq 0$ 的情况下,火箭将以 ψ, ϑ 和 γ 角脱离定向器,仿照文献[32]的方法,将火箭射击瞬时按角度 $\psi_n, \varphi_n, \gamma_n, \varphi_n, q_{rc}$ 从坐标系 $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ 转换到坐标系 $OXYZ$ 的各元素与直接按 ϑ, ψ, γ 从地面坐标系 $O_0 X_0 Y_0 Z_0$ 转换到坐标 $OXYZ$ 的各元素进行比较,即可得到与运载器角振动有关的火箭俯仰、偏航和倾斜角偏差^[32]。因为对于小角度可取 $\sin \psi_n \approx \psi_n, \sin \varphi_n \approx \varphi_n, \sin \gamma_n \approx \gamma_n, \cos \psi_n \approx \cos \varphi_n \approx \cos \gamma_n \approx 1$, 得

$$\Delta \psi = \operatorname{arctg} \left[\frac{-\psi_n \cos q_{rc} + \gamma_n \operatorname{tg} \varphi_n + \sin q_{rc}}{\cos q_{rc} - \varphi_n \operatorname{tg} \varphi_n + \psi_n \sin q_{rc}} \right] - q_{rc} \quad (10.6)$$

$$\Delta \vartheta = \arcsin(\varphi_n \cos q_{rc} \cos \varphi_n + \sin \varphi_n - \gamma_n \cos \varphi_n \sin q_{rc}) - \varphi_n \quad (10.7)$$

$$\Delta \gamma = \operatorname{arctg} \left[\frac{\varphi_n \operatorname{tg} q_{rc} + \gamma_n}{\varphi_n \sin \varphi_n - \cos \varphi_n \cos q_{rc} - \gamma_n \sin \varphi_n \operatorname{tg} q_{rc}} \right] \quad (10.8)$$

运载器相对于地面坐标系的角速度矢量在与它相固连的坐标轴上的投影可写成如下形式:

$$\begin{aligned} \omega_{x_n} &= \dot{\psi}_n \sin \varphi_n + \dot{\gamma}_n; \\ \omega_{y_n} &= \dot{\psi}_n \cos \varphi_n \cos \gamma_n + \dot{\varphi}_n \sin \gamma_n; \\ \omega_{z_n} &= -\dot{\psi}_n \cos \varphi_n \sin \gamma_n + \dot{\varphi}_n \cos \gamma_n \end{aligned} \quad (10.9)$$

因为我们把运载器和发射装置看作是刚体并且是刚性连接体,所以发射装置定向器的瞬时角速度矢量与运载器的瞬时角速度矢量是一致的。

如果假设:在沿发射装置的定向器运动时火箭充分地接受了定向器的角位移,这就相当于它们之间也是刚性联系,那么火箭的瞬时角速度矢量将等于定向器的瞬时角速度矢量。据此就很容易求得由

运载器运动产生的火箭瞬时角速度矢量在与火箭固连的坐标系 $OXYZ$ 上的投影。

考虑到关系式(10.9)以及从坐标系 $O_n X_n Y_n Z_n$ 向坐标系 $OXYZ$ 转换的方向余弦,得

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega_{x_n} \cos q_n \cos q_{rc} + \omega_{y_n} \sin \varphi_n + \omega_{z_n} \cos \varphi_n \sin q_{rc}; \\ \omega_y &= -\omega_{x_n} \sin \varphi_n \cos q_{rc} + \omega_{y_n} \cos \varphi_n - \omega_{z_n} \sin \varphi_n \sin q_{rc}; \\ \omega_z &= -\omega_{x_n} \sin q_{rc} + \omega_{z_n} \cos q_{rc}\end{aligned}\quad (10.10)$$

所得到的公式可以确定火箭在从振动运载器的不稳定发射装置上起飞瞬时的角速度(不考虑离开炮口时的扰动)。

下面研究当火箭从稳定的发射装置定向器射出时仅由运载器运动造成的扰动。发射装置的角稳定自动器保证了带有火箭的定向器在空间的角位置不变。但在起飞时仍然有对火箭质心位置和运动速度的扰动,它们由运载器运动:如变速行驶、质心的空间运动以及相对质心的振动等所决定。在图 10.3 上画出了一些必要的坐标系。静

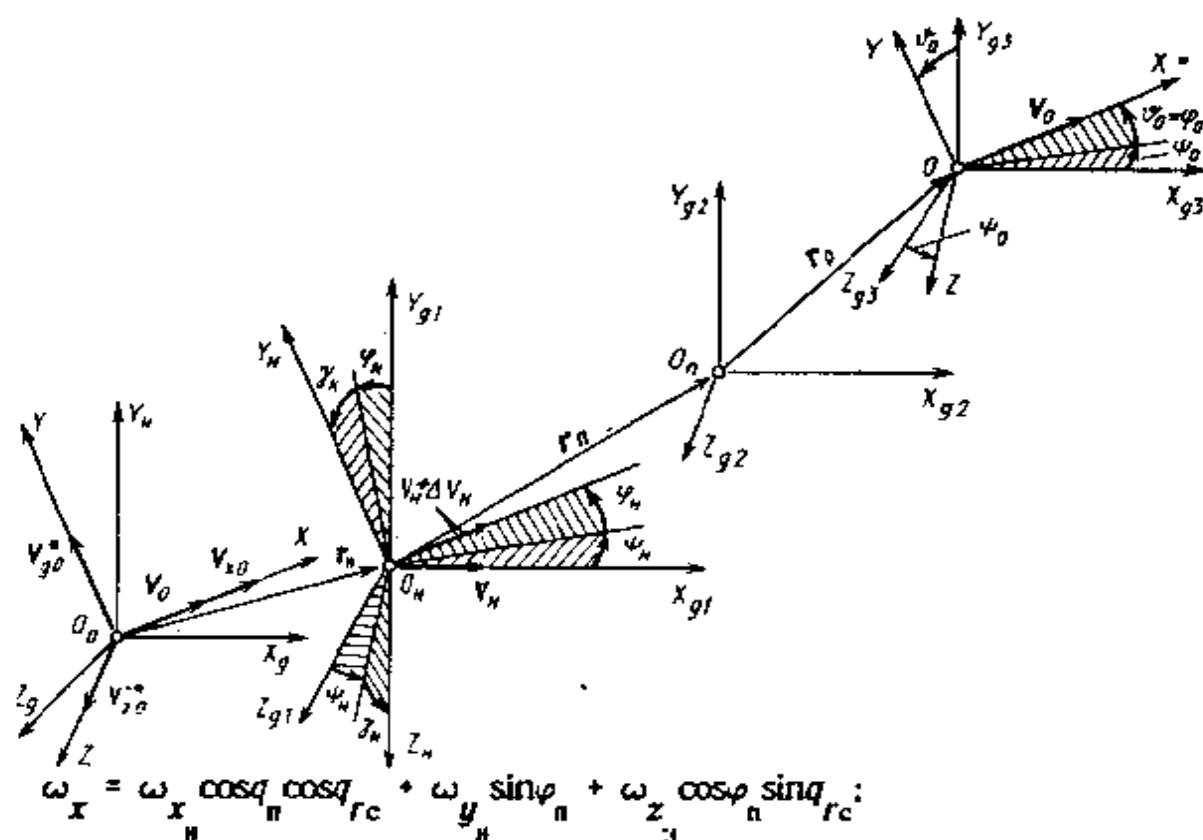


图 10.3 火箭从稳定发射装置发射时的坐标系

止(地面)坐标系以 $O_0X_gY_gZ_g$ 表示,令 O_0X_g 轴的指向与运载器速度矢量 V_0 方向一致;与运载器固连的坐标系像过去一样用 $O_nX_nY_nZ_n$ 表示。再引入三个辅助坐标系 $O_nX_{g1}Y_{g1}Z_{g1}$, $O_nX_{g2}Y_{g2}Z_{g2}$ 和 $O_nX_{g3}Y_{g3}Z_{g3}$, 它们的轴的方向与基本的地面坐标系的相应轴平行,而原点 O_n 位于运载器质心; O_0 位于约定的发射装置摇晃中心; O 位于火箭从发射装置定向器上射出瞬时其质心的位置上。

坐标系 $O_nX_nY_nZ_n$ 相对于坐标系 $O_nX_{g1}Y_{g1}Z_{g1}$ 转过 $\varphi_n, \psi_n, \gamma_n$ 角,这三个角度就确定了武器运载器相对于质心的转动。再引入原点位于 O 点的坐标系 $OXYZ$, 其 OX 轴指向顺弹丸的纵轴方向, OY 轴位于射击面内,而 OZ 轴服从右手坐标系指向。因为发射装置已被稳定,故在所取的假设下坐标系 $OXYZ$ 的轴的方向在空间是不变的,并且射击平面与坐标平面 OYX 一致。射击方向角和发射装置定向器的高角分别以 ψ_0 和 φ_0 表示(见图 10.3),不考虑火箭从定向器射出的扰动,我们将认为初始俯仰角 $\vartheta'_0 = \varphi_0$ 。为了方便,我们还引入一个辅助坐标系 O_0XYZ , 它的轴与坐标系 $OXYZ$ 的轴平行;此外还引入矢径 r_n , 它从地面坐标系原点指向约定的发射装置摇晃中心; r_p 从发射装置摇晃中心指向火箭从定向器上射击瞬时其质心位置。在武器运载器运动过程中 r_n 的大小和方向都在改变, r_n 仅方向改变, r_p 的大小不变(如果不考虑火箭沿定向器运动直至它们之间失去力的联系的运动时间的散布),并且也不改变自己在空间的方向。

用 V_0^* 和 V_0 分别表示在运载器运动和不运动情况下火箭离开定向器瞬时其质心相对于地球的运动速度矢量, $V_{x_0}^*, V_{y_0}^*, V_{z_0}^*$ 是 V_0^* 在坐标系 O_0XYZ 上的投影。由运载器运动造成的火箭速度偏差为

$$\Delta V_{x_0} = V_{x_0}^* - V_{x_0} \quad \Delta V_{y_0} = V_{y_0}^* - V_{y_0} \quad \Delta V_{z_0} = V_{z_0}^* - V_{z_0} \quad (10.11)$$

考虑到图 10.3 和约定的条件,得

$$V_0^* = (V_n + \Delta V_n) + [\omega_n \times (r_n + r_p)] + V_0 \quad (10.12)$$

式中 V_n 是运载器质心未扰动运动的速度矢量; ΔV_n 是运载器质心平移运动的附加速度矢量,它是由于不等速移动产生的。 ω_n 为运载器相对于质心的角速度矢量。

矢径 r_p 与矢径 r_n 相比是小量,在下面将不考虑。

将速度矢量 V_n 表示成 $V_n = V_n x_g^0$, 将附加速度表示成 $\Delta V_n = \dot{x} x_g^0 + \dot{y} y_g^0 + \dot{z} z_g^0$, 式中 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 表示矢量 ΔV_n 在地球固连坐标系三轴上的投影。

将矢量 ω_n 和 r_n 用它在坐标系 $O_n X_n Y_n Z_n$ 轴上的投影表示后可将 (10.12) 式写成如下展开的形式

$$V_0^* = (V_n + \dot{x}) x_g^0 + \dot{y} y_g^0 + \dot{z} z_g^0 + \begin{bmatrix} x_n^0 & y_n^0 & z_n^0 \\ \omega_{n,x_n} & \omega_{n,y_n} & \omega_{n,z_n} \\ x_{n,n} & y_{n,n} & z_{n,n} \end{bmatrix} + V_0 x^0 \quad (10.13)$$

利用从坐标系 $O_0 X_g Y_g Z_g$ 向坐标系 $O_0 XYZ$ 转换的转换角余弦以及从坐标系 $O_n X_n Y_n Z_n$ 向坐标系 $O_0 XYZ$ 转换的转换角余弦, 不难得到矢量等式 (10.13) 在坐标系 $O_0 XYZ$ 上的投影。

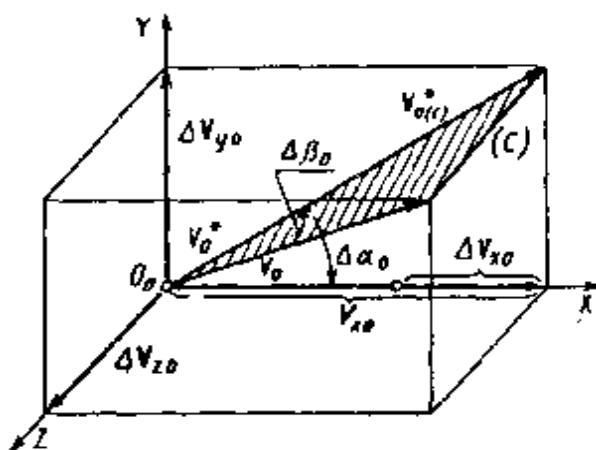


图 10.4 由运载器运动确定的攻角和侧滑角

为了求得确定以火箭从稳定发射装置定向器离开瞬时运载器运动表示的速度大小、攻角和侧滑角改变量的公式, 我们假定射击在无风的情况下进行, 在火箭从发射架离开瞬时, 它的对称面 C 铅直并且与坐标平面 $O_0 XY$ 一致。在运载器运动的条件下, 当火箭离开定向器瞬时其纵轴 OX 与 $O_0 X$ 轴方向一致, 而火箭总速度矢量 V_0^* 将偏离火箭轴 $\Delta\alpha_0$ 和 $\Delta\beta_0$ 角 (见图 10.4)。角 $\Delta\alpha_0$ 定义为速度矢量在火箭对称平面上的投影 $V_0^*(c)$ 与火箭轴 OX 之间的夹角, 角 $\Delta\beta_0$ 定义为速度矢量 V_0^* 与它在对称面上投影 $V_0^*(c)$ 之间的夹角。按图 10.4, 当速度分量 $\Delta V_{x_0}, \Delta V_{y_0}, \Delta V_{z_0}$ 为正值时得到正的侧滑角改变量 $\Delta\beta_0$ 和负的攻角改变量 $\Delta\alpha_0$ 。按照图 10.4 应有

$$\sin(\Delta\beta_0) = \Delta V_{z_0}/|V_0^*| \quad \operatorname{tg}(\Delta\alpha_0) = -\frac{\Delta V_{y_0}}{V_0 + \Delta V_{x_0}} \quad (10.14)$$

或

$$\Delta\beta_0 = \arcsin \frac{\Delta V_{z_0}}{\sqrt{(V_0 + \Delta V_{x_0})^2 + \Delta V_{y_0}^2 + \Delta V_{z_0}^2}} \quad (10.15)$$

$$\Delta\alpha_0 = \operatorname{arctg} \left[-\frac{\Delta V_{y_0}}{V_0 + \Delta V_{x_0}} \right]$$

火箭在离开定向器瞬时由运载器运动引起的火箭速度模的改变由如下关系式确定：

$$\Delta V_0 = V_0^* - V_0 = \sqrt{(V_0 + \Delta V_{x_0})^2 + \Delta V_{y_0}^2 + \Delta V_{z_0}^2} - V_0 \quad (10.16)$$

§ 10.2 发射时火箭的运动

10.2.1 火箭起飞运动的特点

任何类型火箭的发射都是利用发射装置(ПВ)实现的,发射装置的结构主要取决于飞行器的类型和发射条件。无控火箭的发射装置是最简单的;有管状定向器、轻型的火箭桁架等。

处在发射装置定向器上的火箭通常有前后两个导向元件(导向钮)。它们可在定向器上作成的凹槽内滑动。在这种情况下,根据火箭从发射装置离开的方式可以有两种型式的定向器:第一种型式是导向元件同时离开定向器(“同时起飞”和“零长发射”)。第二种形式是导向元件不同时离开定向器(“平均起飞”)。在许多文献^[97]中,“零长发射”被分离出来作为独立的一种发射型式,它相应于飞行器在相对运动开始瞬时就与发射架失去了联系。

10.2.2 火箭沿发射装置定向器的运动

中小射程火箭最通常的发射方式之一是从发射装置的倾斜定向器上发射。

当火箭沿着定向钮同时离开定向器上运动时,作用在火箭上的主要力和力矩如图 10.5 所示。在火箭上作用有推力、纵向气动力 X 、法向气动力 Y 、纵向燃气动力 X_r 、法向燃气动力 Y_r 、重力 mg 、法向反力 F_{N_1} 、 F_{N_2} 和接触构件中的摩擦力 F_{T_1} 、 F_{T_2} 。在图 10.5 上还指出了起飞坐标系 $O_0 X_0 Y_0$ 和坐标系 $O_n X_n Y_n$, 后一坐标系的原点 O_n 与火箭质心的起始位置 O_0 重合; $O_n X_n$ 轴与火箭纵轴一致, 方向平行于定向器; $O_n Y_n$ 轴垂直于 $O_n X_n$ 轴并位于火箭纵向对称面内。

下面写出火箭在不动坐标系 $O_n X_n Y_n$ 里沿定向器运动的方程, 我们将发射装置看作是带有直线定向器的绝对刚体, 于是有

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x_n}{dt^2} &= P - X + X_r - F_{T_1} - F_{T_2} - mg \sin \theta_0; \\ m \frac{d^2 y_n}{dt^2} &= Y + Y_r + F_{N_1} - F_{N_2} - mg \cos \theta_0 = 0; \\ I_x \frac{d\omega_x}{dt} &= M_x + M_{rx} + F_{N_1} l_1 - F_{N_2} l_2 - F_{T_1} \frac{d}{2} - F_{T_2} \frac{d}{2} = 0 \end{aligned} \quad (10.17)$$

方程组 (10.17) 第二和第三个方程的右边等于零是根据所引进的假设得出的。

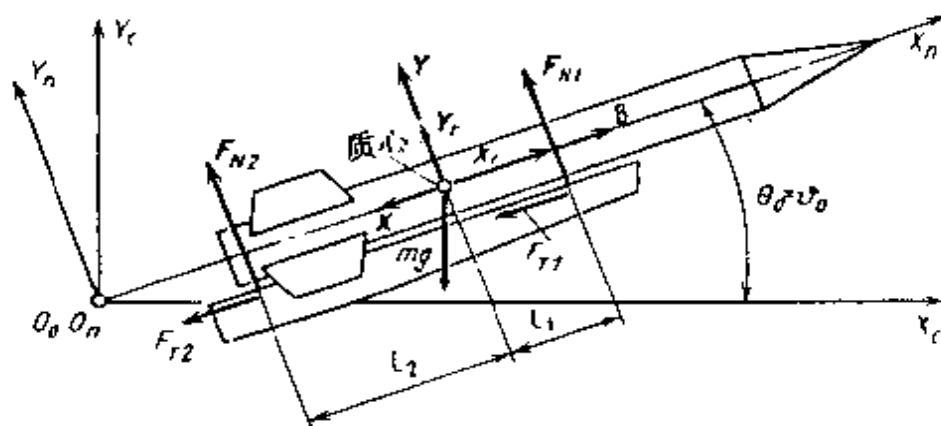


图 10.5 火箭沿定向器运动时作用于其上的力

下面再研究火箭沿定向器运动而接触元件不同时离轨的情况。在这种情况下须将运动分成两个阶段。第一个阶段是火箭运动到第一个定向钮从滑轨上脱离的瞬时, 火箭在这一阶段的运动与在第一种情况下的运动没有任何区别, 因此上面得到的方程对于第一阶段

的计算完全适用,火箭沿定向器运动到第一个定向钮离轨的时间用 t_1 表示。运动的第二阶段(有时称为出口段)从瞬时 t_1 开始至火箭的第二定心部从定向器上离开为止,在这一阶段火箭获得了附加自由度,也即可以绕后定向钮旋转。

在火箭沿定向器运动的第二阶段内作用在其上的主要力和力矩如图 10.6 所示(假定火箭逆时针向转动),我们来建立火箭相对于坐标

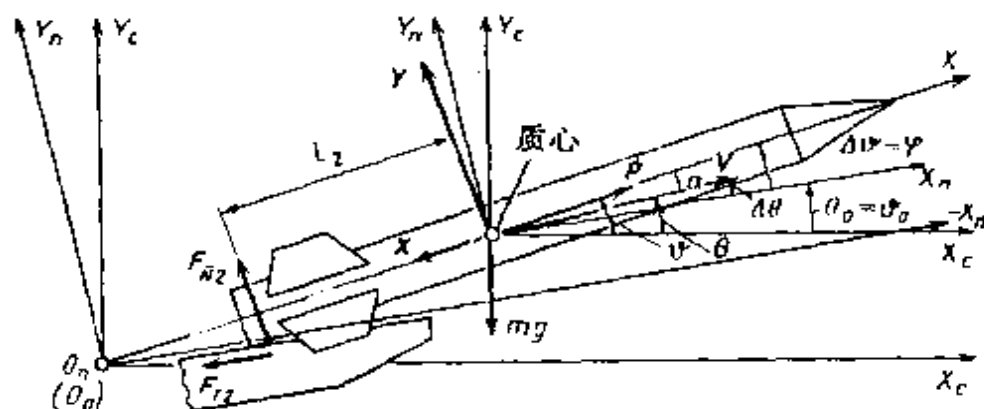


图 10.6 在脱离定向器的阶段作用在火箭上的力

系 $O_n X_n Y_n$ 的运动方程。在这里我们假定定向器是不动的刚性体。取 $P = P_0$, 则得

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_n &= P_0 \cos \Delta \vartheta - X \cos \Delta \vartheta - Y \sin \Delta \vartheta - F_{T_2} - mg \sin \theta_0 \\ m\ddot{y}_n &= P_0 \sin \Delta \vartheta - X \sin \Delta \vartheta + Y \cos \Delta \vartheta + F_{N_2} - mg \cos \theta_0 \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_x - F_{N_2} l_2 \cos \Delta \vartheta - F_{T_2} \frac{d}{2} \cos \Delta \vartheta \\ &\quad + F_{N_2} \frac{d}{2} \sin \Delta \vartheta - F_{T_2} l_2 \sin \Delta \vartheta \end{aligned} \quad (10.18)$$

对于这组方程还必须补充一个联系方程,即由于火箭绕第二个接触元件转动时其质心移动的方程

$$y_n = l_2 \Delta \vartheta \quad (10.19)$$

对出口段火箭运动的研究表明,在全部运动时间内 $\Delta \vartheta$ 角不超过 $10'$, 因此,对于三角函数可取如下的值 $\cos \Delta \vartheta \approx 1$; $\sin \Delta \vartheta \approx 0$ 。

根据 $\Delta \vartheta$ 很小,我们来简化方程组(10.18)的第二个方程。对于火箭,通常 $l_2 = 10d$ 以及力 $F_{T_2} = f F_{N_2}$, 式中钢对钢的摩擦系数 $f =$

0.2, 得

$$\begin{aligned} I_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z - F_{N_2} \left[l_2 - \frac{d}{2} \Delta\vartheta + f \frac{d}{2} + f l_2 \Delta\vartheta \right] \\ &= M_z - F_{N_2} l_2 \end{aligned} \quad (10.20)$$

这是因为对于上述的 f, d 和 $\Delta\vartheta$ 值来说, 括号中的后三个被加数与 l_2 相比是小量, 故可以忽略。火箭沿定向器运动的速度通常不超过 70m/s, 在这种情况下所得到的空气动力和力矩也是足够小的, 故在方程(10.18)中也将它们略去。

考虑到以上所述, 方程组(10.18)就归结为如下的简化形式:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_n &= P_0 - mg\sin\theta_0; \\ m\ddot{y}_n &= P_0\varphi - mg\cos\theta_0 + F_{N_2}; \\ I_z\ddot{\varphi} &= -l_2 F_{N_2} \end{aligned} \quad (10.21)$$

在上式中为了方便记 $\Delta\vartheta = \varphi$ 。在此方程组中第一个方程与第二和第三个方程无关, 因而它可以单独积分。该方程的积分就给出了火箭沿定向器运动速度关于时间的函数。方程组(10.21)的第一个方程可以单独积分的物理意义是横向扰动对运动速度大小的影响很小。

我们感兴趣的是火箭在出口段运动时的转动, 因此要研究方程(10.21)中的第二和第三个方程。引入代换 $y_n = l_2\varphi$, 由方程组的第二个方程解出 F_{N_2} 并将它代入第三个方程中, 再考虑到联系方程(10.19), 得

$$(I_z + ml_2^2)\ddot{\varphi} = P_0 l_2 \varphi - mgl_2 \cos\theta_0 \quad (10.22)$$

引进记号 $I_z' = I_z + ml_2^2$; $P_0 l_2 / I_z' = a_1$, 将它们代入方程(10.22)中, 经变换后得

$$\ddot{\varphi} - a_1 \varphi = - \frac{mgl_2 \cos\theta_0}{I_z'} \quad (10.23)$$

在出口段上积分方程(10.23)时, m 可取火箭质量的平均值。在这种情况下方程(10.23)的右边是常量, 而方程本身则是线性常系数非齐次方程, 此类方程之解可以有解析形式。不作中间推导, 我们直接写出积分结果如下:

$$\Delta\vartheta_0 = \varphi_0 = - \frac{m_{cp} g \cos\theta_0}{2P_0} [e^{\sqrt{a_1}(u_2 - t_1)} + e^{-\sqrt{a_1}(u_2 - t_1)} - 2] \quad (10.24)$$

$$\Delta \dot{\vartheta}_0 = \dot{\varphi}_0 = - \frac{m_{cp} g \cos \theta_0}{2} \sqrt{\frac{l_2}{P_0 I_x}} [e^{\sqrt{a_1} (t_2 - t_1)} - e^{-\sqrt{a_1} (t_2 - t_1)}] \quad (10.25)$$

式中 t_2 是第二个定向钮离开发射装置定向器的时间; $\Delta \vartheta_0$ 是出口段终点火箭轴的转角; $\Delta \dot{\vartheta}_0$ 是出口段终点火箭轴的角速度。

§ 10.3 弹丸扰动运动起始条件的形成

10.3.1 起始进动运动

我们预先假定, 用于发射的身管和弹丸都是绝对轴对称的, 则当给定身管膛线倾斜角 γ 并用 η 表示以口径为单位的膛线行程长度后, 得

$$v_{okp} = V_{\sigma} \operatorname{tg} \gamma = \frac{\pi}{\eta} V_{\sigma} \quad (10.26)$$

但另一方面

$$v_{okp} = 0.5 d \dot{\varphi}_0 \quad (10.27)$$

因此

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{2\pi}{\eta d} V_{\sigma} \quad (10.28)$$

以前曾得到进动速度 $\dot{\nu}$ 的表达式 (见第 8 章), 在 $\delta_0 = 0$ 时考虑到 (10.28) 式我们将它变成如下形式:

$$\dot{\nu} = \frac{\pi C}{A \eta d} V_{\sigma} = \alpha = \text{const} \quad (10.29)$$

在不存在身管相对于大气的运动时, 影响进动的唯一根源是导致弹道弯曲的重力。我们知道, 进动绕动力平衡轴进行, 而在重力作用下动力平衡轴向右偏离速度矢量一个角度。

$$\delta_{p0} = - 2\alpha \dot{\theta}_0 / f_{40} \quad (10.30)$$

式中

$$f_{40} = \frac{d^2 h}{g A} \times 1000 H(y) V_{\sigma}^2 K_M \left[\frac{V_0}{a_{ON}} \right] \quad (10.31)$$

在上面公式中的 $\dot{\theta}$ 由如下公式确定:

$$\dot{\theta} = -g \cos \theta_0 / V_{or} \quad (10.32)$$

将(10.32)和(10.29)代入(10.30)中,最后得到

$$\delta_{p0} = \frac{2\pi g \cos \theta_0}{\eta d} \cdot \frac{1}{f_{40}} \left[\frac{A}{C} \right]^{-1} \quad (10.33)$$

为了估计一下 δ_{p0} 的大小,我们对口径 $d = 100\text{mm}$, $\eta = 30$ 和 $V_{or} = 1000\text{m/s}$ 的炮弹作些计算。该口径炮弹的赤道转动惯量与相对于纵轴的转动惯量之比为 $A/C = 2.259 \times 10^{-2} / 0.2115 \times 10^{-2} = 10.68$ 。由表查出 $K_M[V_0/a_{ON}] = 0.90 \times 10^{-3}$, 并算出翻转力矩的力臂 $h = 1.6d$, 得到

$$f_{40} = \frac{0.1^2 \times 0.16 \times 1000 \times 1 \times 1000^2 \times 0.90 \times 10^{-3}}{9.81 \times 2.259 \times 10^{-2}} \\ \approx 6420\text{s}^{-2}$$

取 $\cos \theta_0 = 1$, 最后得

$$\delta_{p0} = \frac{2 \times 3.14 \times 9.81 \times 1}{40 \times 100 \times 10^{-3}} \times \frac{1}{6420} \times \frac{1}{10.68} = 2.25 \times 10^{-4} \\ \approx 0.013^\circ$$

上面的计算证明了量 δ_{p0} 是较小的并且几乎是不变的量,故可将它作为系统偏差来考虑。

10.3.2 由弹丸不平衡性产生的起始章动角和章动角速度

在一般情况下,过去所作的关于身管和弹丸绝对轴对称的假设是不可能被满足的。由于制造的误差,弹丸在身管内的运动是在相应的两轴不一致的条件下进行的。位于弹体后部(船尾部)的弹带用来作为弹炮间两个接触点之一并保证弹炮之间无间隙;弹丸的另一个支撑点是前定心部,前定心部处的任何间隙 Δ_1 (见图 10.7) 都立即形成弹丸的章动角。这种间隙通常是由于在加工膛线的定心凸出部时的非对称进刀量所形成。首先,这种间隙可使甚至被理想调平衡了的弹丸的质心也从身管轴偏移 ϵ_2 , 而在有沿身管方向的火药燃气压力 P_{KH} 作用在弹底上时,就进一步会形成使这个偏移具有增大趋势的转动力矩。身管的磨损和加热越大,间隙量以及由它产生的坏处也越大。

产生起始章动角和章动角速度的另一个重要原因是弹丸的质量偏心。在这里要区分两种不平衡性；第一种是由于弹体制造的加工误差和装填特性造成质心相对于弹丸纵轴偏移某个距离 Δ_2 ；第二种是动不平衡，它是由弹丸的几何对称轴与中心惯量主轴不一致造成的，动力偏心的大小由角度 ϵ_1 确定（见图 10.7）。考虑到角度 ϵ_1 和 ϵ_2 很小，在一级近似中将认为 $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon$ ，而弹丸在膛内进动运动的角速度 $\dot{\psi} = \dot{\phi}$ ，故弹丸通过炮口断面瞬间有 $\dot{\delta}_0 = \dot{\phi}_0 \epsilon$ ，式中 $\epsilon = \delta_0$ 是起始章动角。设在弹丸与身管脱离力的联系的瞬时，在所研究的情况下身管几何轴与弹丸惯性主极轴形成的阻力面与射击平面形成了起始进动角 ν_0 ，则起始章动运动参量在克雷洛夫坐标系里的分量（见图 10.8）

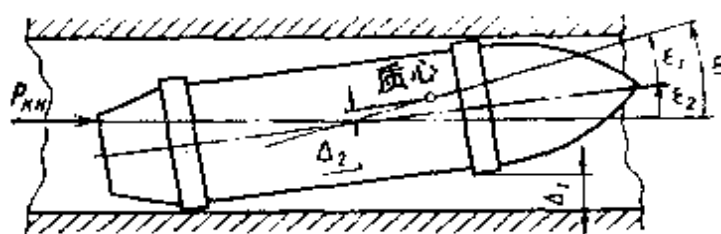


图 10.7 弹丸在身管内的运动

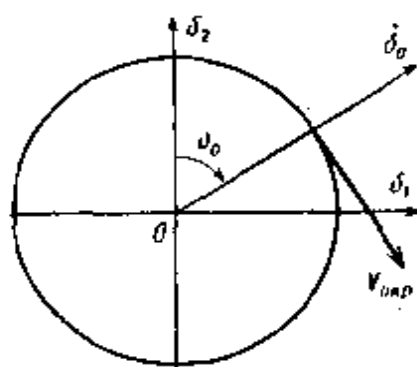


图 10.8 射击时最大总章动角的确定

将以如下形式确定：

$$\begin{aligned} \delta_{20} &= \epsilon \cos \nu_0 & \delta_{10} &= \epsilon \sin \nu_0; \\ \dot{\delta}_{20} &= \dot{\phi}_0 \epsilon \cos \nu_0 & \dot{\delta}_{10} &= \dot{\phi}_0 \epsilon \sin \nu_0 \end{aligned} \quad (10.34)$$

注意到在欧拉坐标系和克雷洛夫坐标系中弹丸原始角运动方程组解之间的联系，则最大总章动角的表达式有如下形式

$$\delta_k = \sqrt{\delta_{10}^2 + \delta_{20}^2} = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(2\alpha\sqrt{\sigma}t + \chi)} \quad (10.35)$$

式中

$$\rho_1 = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\sigma}} \sqrt{(\dot{\delta}_{20} + \omega_2\delta_{10})^2 + (\dot{\delta}_{10} - \omega_2\delta_{20})^2} \quad (10.36)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\sigma}} \sqrt{(\dot{\delta}_{20} + \omega_1\delta_{10})^2 + (\dot{\delta}_{10} - \omega_1\delta_{20})^2} \quad (10.37)$$

$$\chi = -\operatorname{arctg} \frac{\dot{\delta}_{10} + \omega_2\delta_{10}}{\dot{\delta}_{20} - \omega_2\delta_{20}} + \operatorname{arctg} \frac{\dot{\delta}_{10} + \omega_2\delta_{10}}{\dot{\delta}_{20} - \omega_1\delta_{20}} \quad (10.38)$$

$$\omega_{1,2} = \alpha(1 \pm \sqrt{\sigma})$$

δ 的值为 $\delta = 1 - f_4\alpha^{-2}$ 。分析表达式(10.35)后得出结论,在 $\cos(2\alpha\sqrt{\sigma}t + \chi) = -1$ 时, δ 取极大值,也即

$$\delta_{\max} = \rho_1 + \rho_2 \quad (10.39)$$

在固定的 ε 和 ν_0 值下,注意到(10.34)式,由(10.36)和(10.37)式得

$$\rho_1 = \frac{\dot{\varphi}_0\varepsilon}{2\alpha\sqrt{\sigma}} \sqrt{1 + \frac{\omega_2^2}{\dot{\varphi}_0^2}} \quad (10.40)$$

$$\rho_2 = \frac{\dot{\varphi}_0\varepsilon}{2\alpha\sqrt{\sigma}} \sqrt{1 + \frac{\omega_1^2}{\dot{\varphi}_0^2}} \quad (10.41)$$

设 $\omega_2^2/\dot{\varphi}_0^2 \approx \omega_1^2/\dot{\varphi}_0^2 = 0$,最后得

$$\delta_{\max} \approx \frac{\dot{\varphi}_0\varepsilon}{\alpha\sqrt{\sigma}} = \frac{2A\varepsilon}{C\sqrt{\sigma}} \quad (10.42)$$

考虑到 AC^{-1} 具有 10 的量级,而 $\sqrt{\sigma}$ 在 0.45 ~ 0.70 范围内,我们写出如下关系式:

$$\delta_{\max} \approx (30 \sim 45)\varepsilon \quad (10.43)$$

所得到的关系式表明,量 ε 对章动运动的大小有本质的影响。

10.3.3 弹丸质心的径向偏心对初速矢量偏差的影响

当弹丸质心与弹丸在身管内的旋转轴不一致时(见图 10.8),弹丸质心在通过炮口断面瞬时具有周向速度

$$V_{okp} = \dot{\varphi}_0\Delta_z \quad (10.44)$$

注意到以前引入的关系式(10.28),最后得

$$v_{oxp} = \frac{2\pi V_{\sigma}}{\eta d}\Delta_z \quad (10.45)$$

分量 v_{otp} 的存在使得弹丸的初速矢量方向偏转一个角度

$$\gamma_{\Delta_2} = \operatorname{arctg} \frac{v_{otp}}{V_\sigma} \approx \frac{2\pi\Delta_2}{\eta d} \quad (10.46)$$

为了估计 γ_{Δ_2} 的大小,我们取 100mm 炮弹为例;其 $\Delta_2 = 0.1\text{mm}$, $\eta = 30$, 则 $\gamma_{\Delta_2} = 0.0002$ 。在射程为 10km 时 100mm 炮弹仅由 0.1mm 质量偏心产生的落点偏差为 2m。

10.3.4 后效期内炮口波对弹丸运动的影响

弹丸从身管射出后开始出现火药燃气流,它继续作用到弹丸上直到使其达到最大速度,这个过程称为燃气对弹丸的后效作用期,它的持续时间极短,因此在估计分析弹带从身管射出后炮口波(火药燃气的波状振荡)的影响时,将这种现象看作是脉冲是很合理的。在此假设下,我们把问题归结为将燃气动量矩向弹丸瞬时传递,所传递的作用与弹丸的角速度无关,仅与它的姿态有关。如果在弹丸与身管失去力学联系时章动角为零,则将出现中心力作用(也即沿弹轴方向的作用)。试验研究表明,在这种作用下速度的增长约为弹丸炮口速度(初速)的 1%。如果弹丸以非零的章动角离开身管,则所产生的力矩对弹丸角运动动力学可产生明显的不利影响,这时只可能用试验方法去进行实际的研究。

第十一章 统计飞行力学方法及火箭 和弹丸的射击散布

飞行器的弹道在许多扰动因素作用下形成,这些扰动因素绝大多数具有随机特性,它们与其相应的运动参数可分成如下几种类型:
作为时间的函数、从一个实现到另一个实现改变的随机过程;
在每一个实现里作为许多独立参数的函数而改变的随机场;
在每一个特定的实现里不变,但从一个实现到另一个实现中以随机方式可能发生也可能不发生的随机事件。

上述第一类随机因素是最普遍的,在进行统计飞行力学研究时或许是最主要的,属于这一类的有作用在飞行中飞行器上的扰动力和力矩,以及描述其瞬时状态的参数(相坐标)。属于随机“场”的最典型的例子是在所研究的飞行中发生的大气的随机运动(湍流)。属于从一个实现到另一个实现而改变的随机变量的有确定飞行器起始运动状态的误差、飞行器的结构偏差、质量-惯性偏差以及其它特征偏差等。最后,属于在每个独立的实现中可能发生也可能不发生的随机事件的有张开翼稳定器的扭曲和折损,其它结构元件的损坏等。

射击误差是由火箭起飞或发射时各种实际条件与标准条件的偏差造成的,这些随机误差将导致按同一图纸和技术条件制造的火箭,以同一发射装置和定向器在同一阵地上按同一瞄准装置装定进行射击时,它们的弹道也彼此不一致。以同样的弹丸在同样的装药和瞄准装定下从火炮身管射击时,各发弹丸的弹道也不一致,这种现象称为弹道散布。

考虑随机因素作用时火箭和弹丸的飞行应作为随机过程来研究,研究这类过程要利用专门的仪器和概率论的专门分支——随机函数的方法^[22,78,91,92]。统计飞行力学研究的领域是特别广的^[103],火箭和弹丸外弹道中的随机问题可有条件地分为两大类:

第一类问题主要是针对武器装备设计、加工和试验阶段中的问题,此类问题适合于利用所谓飞行器运动的先验统计分析法;

第二类问题是与武器装备的使用有关的问题,这类问题适合于利用所谓后验方法,即对由武器试验和作战射击得到的统计信息进行加工处理的方法。

§ 11.1 火箭和炮弹运动的先验统计分析法

11.1.1 飞行器运动统计分析中所用的数字特征

由于弹道散布的结果,与同一起始条件相应的大多数弹道将位于称为弹道管或弹道束的某个空间域内,后一术语主要适用于炮弹弹道。从数学的观点讲,弹道管是一空间域,弹道穿过此域范围以外的概率小于给定的值(在特殊情况下为零)。弹道管的轴由管内的平均弹道确定,平均弹道与标准弹道重合。

弹道管被地球表面所截而得的截面确定了散布椭圆(或圆),而平均弹道与地表面的交点称为集群中心或散布中心。

显然,射击瞄准问题的有效解决需要对实际扰动飞行过程中飞行器运动的精度特征进行研究。一般情况下射击精度取决于如下因素:

弹道管轴在空间的位置

弹道管的大小和形状

管内各弹道的布置

这些因素就决定了在对飞行器运动进行统计分析时要用到哪些数字特征。

我们首先指出,在将弹道看作随机函数时,随机函数 $X(t)$ 应在自变量的任何非随机时刻 $t \in T$ 都是随机变量。这时通常又分成两种情况:

a) 随机函数的自变量 t 在给定的区间(有限或无限)内可以取任何值。

b) 随机函数的自变量只能取确定的离散值。

在第一种情况里 $X(t)$ 通常称为随机过程, 在第二种情况里叫随机序列。如果为确定 $X(t)$ 进行了 n 次独立试验, 则它们的总和就是确定的、称为随机函数 $X(t)$ 离散实现的函数关系式 $X_i(t) (i = 1, 2, \dots, n)$ 。随机函数的详尽特征是它的概率分布函数和概率密度函数:

$$F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = P[X(t_1) < x_1, \dots, X(t_k) < x_k] \quad (11.1)$$

$$f(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) = \frac{\partial^k F(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} \quad (11.2)$$

式中 $0 \leq P \leq 1$ 是表征事件出现可能性程度的概率。

因此, 随机过程 $X(t)$ 的概率分布密度函数(或简单地叫分布密度) 确定了该过程在瞬时 t 位于 $x_1 < X(t_1) < x_1 + dx_1$ 的概率, 瞬时 t_2 位于 $x_2 < X(t_2) < x_2 + dx_2$ 的概率等。当然, 数 k 愈大就愈能充分地描述随机过程的统计特征。

随机函数的量值首先以数学期望 $(MO)m_x(t)$ 来表征, 它是试验次数无穷大条件下的某个非随机函数, 随机函数(扰动弹道) 的具体实现将相对于它聚集。确定了弹道管的轴以后, MO 就给出了在管内的平均弹道以及在散布椭圆内聚集中心的位置。具体的实现(弹道管内的弹道和散布椭圆中的落点) 与 MO 的偏差就表示了特定的散布量, 由这个量的估值就可以以给定的概率确定一个弹道可能的散布域, 从而确定了弹道管和散布椭圆的大小。确定散布最通用的特征数是随机变量的二阶原点矩或所谓方差, 但是由于方差具有被测量平方的因次, 实践上用起来不大方便, 因而就由方差转到均方差 $(CKO) - \sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$ 。我们指出, MO 和 CKO 是任何分布规律的特征数, 但在标准(高斯) 分布里, 这两个特征数就是很全面的了, 对于其它的分布规律, 除了这两个特征数外, 为了建立分布规律的图形描述, 还须补充确定三阶和更高阶的矩。

尽管方差和均方差 CKO 是通用的特征数, 但在估计射击精度时并不喜欢用它, 而喜欢用另一个更常用的特征量, 它称为中间偏差或概率偏差 E 。但这个特征量的应用受到随机过程(随机变量) 种类的限制, 它只适用于标准分布规律。这自然就产生了一个问题, 如何解

释这个情况呢?问题就在于,在一般情况下可以认为射击过程是高斯型的,它的根据就是概率论中的所谓中心极限定理。事实上,实验证明,当影响飞行器运动的那些随机因素的个数足够大时,其中任一个因素都不占优势,在这种情况下,按照所讲的这个定理可以认为:由它们所产生的飞行器运动过程将趋于标准分布,而与每个随机扰动的具体分布无关。另外,对于散布估计来说应用中间偏差是很方便的,因为这样很容易确定随机变量落在一部分范围内的概率。

按定义,概率(中间)

偏差是指在垂直于射向并且通过散布中心的轴上的一个带形域的半带宽,而随机变量落在此域内的概率为 0.5(见图 11.1)。在图 11.1 上指出的随机变量出现在 $0 \sim E, E \sim 2E, 2E \sim 3E, 3E \sim 4E$ 范围内的概率只是近似的,事实上它们的精确值为 0.2500, 0.1611, 0.0674, 0.0180。因此,在 $-4E \sim 4E$ 范围内,概率

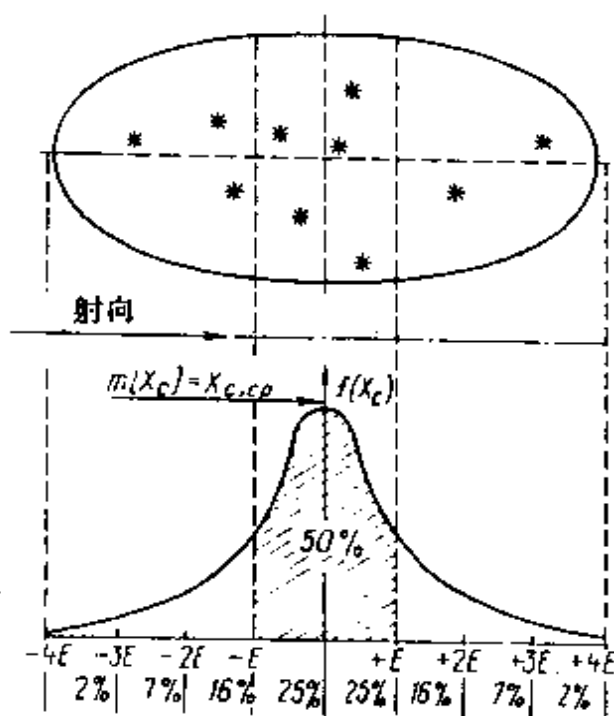


图 11.1 概率偏差的定义

的总和为 0.993,也即随机变量出现在由符号“ $\pm 4E$ ”确定的范围以外的概率总共才有 0.7%,在绝大多数情况下这个概率可以忽略,而认为上述范围内的概率为 100%。

概率偏差 E 的大小以如下关系与概率 P 联系起来

$$P(|x - m_x| < E) = 1/2 \quad (11.3)$$

或者

$$\frac{2}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_0^E e^{-\dot{x}^2/(2\sigma_x^2)} d\dot{x} = \frac{1}{2} \quad (11.4)$$

式中 $\dot{x} = x_i - m_x$ 是中心随机变量,由方程(11.4)可以得到 E 的表达

式 $E = \rho \sqrt{2\sigma_x}$ 或者考虑到 $\rho = 0.4770$ 则得 $E = 0.6745\sigma_x$ 。

为了达到充分定量确定作为随机过程的射击过程,还应确定表征不同时刻各个实现(弹道)的值之间的依赖关系或者说明相互随机联系的程度。用于定量估计弹道管内部结构和相应散布椭圆方位轴的数字特征是相关函数 $K_x(t)$ 。

在研究统计飞行力学时,相应的数字特征(MO , 方差和 CKO)应对任一时刻(包括终点)飞行器状态矢量的所有分量加以确定,这时须进行估值的、随机相状态矢量的维数就决定了相关矩阵的维数。相关矩阵 K_x 是由 n 维矢量 $x(t)$ 的分量的相关矩 $k_{ij}(i, j = 1, \dots, n; i \neq j)$ 和方差 $\Pi_i = k_{ii}(i = 1, 2, \dots, n)$ 组成的 $n \times n$ 维矩阵 K_x

$$K_t\{x\} = K_x = M\{\dot{x}, \dot{x}^T\} \quad (11.5)$$

并且,如果 $k_{ij} = k_{ji}$, 矩阵 $K_t\{x\}$ 将是对称的,对称的($n \times n$)矩阵有时称为协变矩阵或协方差矩阵。

还要指出,当函数自变量的值相同时,协方差矩阵还有专门的名称——方差矩阵。如果随机矢量 $x(t)$ 的分量相互无关,矩阵将是对角线的,也即所有非对角线上的元素等于零。在许多情况下将 k_{ij} 转变为相关系数 $r_{ij} = k_{ij}/\sigma_{xi}\sigma_{xj}$, 这在后面使相关矩阵规格化时是有好处的。

在对地面射击以及在处理立靶射击结果时,往往只须统计处理弹丸落点数据或弹孔数据就足够了。在这种简单情况下就不必与随机函数打交道了,这时只需研究在一个通常最重要截面上表示过程参数的随机变量也就足够了。

11.1.2 影响矩阵方法

对飞行器在标准弹道附近的扰动运动进行统计分析的简单而有效的方法是影响矩阵法。所讨论的运动以如下的线化运动模型表示

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) \quad x(t_0) = x_0 \quad (11.6)$$

设对于特别选择的初始条件 $x_0^{(1)} = [1, 0, 0, \dots, 0]^T$; $x_0^{(2)} = [0, 1, 0, \dots, 0]^T$, $x_0^{(n)} = [0, 0, \dots, 1]^T$ 得到对于方程(11.6)的柯西问题的 n 个

(按状态矢量分量的个数)解,将这些解集中到 $n \times n$ 维矩阵中得

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) & \cdots & x_1^n(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) & \cdots & x_2^n(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{(1)}(t) & x_n^{(2)}(t) & \cdots & x_n^n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} \cdots f_{1n} \\ \vdots \\ f_{n1} \cdots f_{nn} \end{bmatrix} = \Phi(t)$$

它是由满足线性齐次方程(11.6)的基本解所组成的矩阵,

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = A(t)\Phi(t) \quad (11.7)$$

所得到的这个矩阵在任何时刻 t 都是满秩的,称它为方程(11.7)解的积分矩阵(基本矩阵)。与积分矩阵不同,形如

$$\Phi_{t_0} = \Phi(t, t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) \quad (11.8)$$

的矩阵称为规格化积分矩阵或相状态转移矩阵。在 $t = t_0$ 时矩阵 $\Phi(t, t_0) = \Phi(t_0, t_0) = E$, 式中

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

是 $(n \times n)$ 维单位矩阵。如果对于方程组(11.6)已知相转移矩阵(11.8),则方程组的一般解可写成如下形式

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (11.9)$$

将矢量 $\mathbf{x}(t)$ 看作是随机的,理解为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_i(t) - M_x(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (11.10)$$

式中 $M_x(t)$ 确定了名义弹道运动,则得

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \Phi(t, t_0)\dot{\mathbf{x}}(t_0) \quad (11.11)$$

或者注意到 $\dot{\mathbf{x}}^T(t) = \dot{\mathbf{x}}^T(t_0)\Phi^T(t, t_0)$, 由(11.5)式得

$$K_x(t) = \Phi(t, t_0)K_x(t_0)\Phi^T(t, t_0) \quad (11.12)$$

如果在名义弹道附近的扰动不仅由初始条件 $\mathbf{x}(t_0)$ 所确定的扰动产生,而且由沿弹道连续作用的扰动产生,则问题就转化成如下形式的

随机方程(见(2.14))

$$dx = A(t)xdt + d\eta(t)$$

我们将它的解写成如下形式^[10]:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)d\eta(\tau) \quad (11.13)$$

在(11.13)式右边的积分,由于存在着微分,故不能像通常的黎曼积分或斯蒂尔杰斯积分^[34]那样求积,只有当 $\Phi(t, \tau)$ 为光滑函数时这个积分才能用分部积分法算出,经积分后得

$$\int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)d\eta(\tau) = E\eta(t) - \Phi(t, t_0)\eta(t_0) - \int_{t_0}^t \eta(\tau)d\Phi(t, \tau) \quad (11.14)$$

因此,满足模型(2.14)的飞行器运动过程的统计分析,实际上就归结为分析称之为依托(Ито)积分的随机积分 $\int_{t_0}^t \eta(\tau)d\Phi(t, \tau)$ 。

在估计射击精度的问题中,重要的是相应于 $t = t_c = T$ 的情况,这时 t_0 可理解为是某个固定的初瞬时(例如炮弹通过炮口断面的瞬时,主动段终点瞬时等),或者是飞行器运动的任一瞬时。

与此情况相应的矩阵

$$\Phi(t_c, t) = \Phi_t^c = (\Phi_{t_c}^t)^{-1} \quad (11.15)$$

称为影响矩阵。由于转移矩阵的非奇异性,因而有影响矩阵的非奇异性,故有

$$\Phi^{-1}(t_c, t) = \Phi_c^T(t_c, t) \quad (11.16)$$

式中 $\Phi_c^T(t_c, t)$ 为共轭组的影响矩阵。

未知函数 Φ_t^c 可在从 $t_c = T$ 到 t 的“反”时间内一次积分共轭组

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = -A(t)\Phi(t) \quad (11.17)$$

而求得,积分的边界条件显然是 $\Phi(t_c) = E$ 。由求解方程(11.17)所得到的矩阵 $(\Phi_{t_c}^t)$ 与由(11.16)关系式得到的矩阵 Φ_t^c 之间相联系,因此

$$\Phi_t^c = \Phi_c^T(t, t_c) \quad (11.18)$$

就本质而言,影响矩阵是飞行器在落点处的状态矢量的分量对该矢

量在任一时刻分量的偏导数矩阵,即

$$\Phi_{t_c}^t = \frac{\partial \mathbf{x}(t_c)}{\partial \mathbf{x}} \quad (11.19)$$

这些分量是对扰动运动任意瞬时的时间函数。

有了 $\Phi_{t_c}^t$ 后,要获得射击精度特征数就不是什么难事了,它们可由对于所有相坐标的方差矩阵来确定

$$\mathbf{K}_x(t_c) = (\Phi_{t_c}^t) \mathbf{K}_x(t) (\Phi_{t_c}^t)^T \quad (11.20)$$

我们要着重指出,在这里将扰动作用看作是随机函数。如果现在固定时刻 t ,例如取它为 $t = t_k$ ——弹道主动段终点时刻,那么就没有必要将扰动运动当作随机函数了。在这种情况下就可以将扰动以随机变量的形式表示:

$$\mathbf{K}_x(t_c) = \Phi_{t_k}^{t_c} \mathbf{K}_x(t_k) (\Phi_{t_k}^{t_c})^T \quad (11.21)$$

式中 $\mathbf{K}_x(t_k)$ 已是表征主动段终点弹道诸元散布的方差矩阵,而 $\Phi_{t_k}^{t_c}$ 是其元素按物理意义与第 9 章研究过的修正系数相同的矩阵。

例如,设要在给定的主动段终点诸元均方差(CKO)下确定落点纵向距离 x_c ,速度 V_c 和角度 θ_c 的散布。为了简单,起初我们将认为这几个随机变量彼此无关($k_{ij} = k_{ji} = 0$) 则有

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x_c}^2 \\ \sigma_{V_c}^2 \\ \sigma_{\theta_c}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x_c}{\partial x_k}\right)^2 & \left(\frac{\partial x_c}{\partial y_k}\right)^2 & \left(\frac{\partial x_c}{\partial V_k}\right)^2 & \left(\frac{\partial x_c}{\partial \theta_k}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial V_c}{\partial x_k}\right)^2 & \left(\frac{\partial V_c}{\partial y_k}\right)^2 & \left(\frac{\partial V_c}{\partial V_k}\right)^2 & \left(\frac{\partial V_c}{\partial \theta_k}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial \theta_c}{\partial x_k}\right)^2 & \left(\frac{\partial \theta_c}{\partial y_k}\right)^2 & \left(\frac{\partial \theta_c}{\partial V_k}\right)^2 & \left(\frac{\partial \theta_c}{\partial \theta_k}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x_k}^2 \\ \sigma_{y_k}^2 \\ \sigma_{V_k}^2 \\ \sigma_{\theta_k}^2 \end{bmatrix}$$

利用一般的书写形式,可等价地写成如下关系式:

$$\sigma_{A_j}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2 \quad (11.22)$$

如果研究的目的是为了确定火箭落点的散布,则有

$$\sigma_{x_c}^2 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x_c}{\partial x_k}\right)^2 & \left(\frac{\partial x_c}{\partial y_k}\right)^2 & \left(\frac{\partial x_c}{\partial V_k}\right)^2 & \left(\frac{\partial x_c}{\partial \theta_k}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{x_k}^2 \\ \sigma_{y_k}^2 \\ \sigma_{V_k}^2 \\ \sigma_{\theta_k}^2 \end{bmatrix}$$

如果先验地假设过程服从标准(正态)分布规律并利用著名的关系式 $E = 0.6745\sigma_x$ 转为研究概率偏差,再用 $r_{x_k}, r_{y_k}, r_{v_k}, r_{\theta_k}$ 表示 x_k, y_k, V_k 和 θ_k 的概率偏差,于是有

$$E_{x_c} = \sqrt{\left(\frac{\partial x_c}{\partial x_k} r_{x_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_c}{\partial y_k} r_{y_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_c}{\partial V_k} r_{v_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_c}{\partial \theta_k} r_{\theta_k}\right)^2}$$

或写成一般形式

$$E_{A_j} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_j}{\partial \mathcal{K}_i} r_i\right)^2} \quad (11.23)$$

如果约定记 $\left(\frac{\partial A_j}{\partial \mathcal{K}_i}\right) r_i = E_{A_i}$, 则

$$E_{A_j} = \sqrt{E_{A_1}^2 + E_{A_2}^2 + \cdots + E_{A_n}^2} \quad (11.24)$$

特别是对于火炮系统有 $x_c = f(V_0, \theta_0, c)$, 因此可认为上述自变量为独立的随机变量, 于是得

$$E_{x_c} = B_n = \sqrt{r_{x_{V_0}}^2 + r_{x_{\theta_0}}^2 + r_{x_c}^2} \quad (11.25)$$

式中 $r_{x_{V_0}} = r_{V_0} \frac{V_0}{100} Q_{V_0}$ 为由初速散布所产生的弹丸距离散布的概率误差; $r_{x_{\theta_0}} = r_{\theta_0} \frac{\theta_0}{60} Q_{\theta_0}$ 为由射角散布造成的距离散布的概率误差; $r_{x_c} = r_c Q_{c/c}$ 为由弹道系数散布造成的距离散布的概率误差。相应地 r_{V_0} , r_{θ_0} 和 r_c 分别是初速(以百分之一为单位)、射角(以角度分为单位)和弹道系数(以百分之一为单位)的概率误差, 而 Q_{V_0} , Q_{θ_0} 和 $Q_{c/c}$ 分别表示初速、射角和弹道系数改变一个单位时全射程改变量的表定主要修正系数。如果协方差矩阵的元素 $k_{ij} \neq 0$, 则在

$$x_c = f(V_k, \theta_k, x_k, y_k)$$

假设下, 确定火箭落点散布的表达式将有如下形式

$$\begin{aligned} \sigma_{x_c} = & \left\{ \left(\frac{\partial x_c}{\partial V_k} \sigma_{V_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_c}{\partial \theta_k} \sigma_{\theta_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_c}{\partial x_k} \sigma_{x_k} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_c}{\partial y_k} \sigma_{y_k} \right)^2 \right. \\ & + 2 \frac{\partial x_c}{\partial V_k} \frac{\partial x_c}{\partial \theta_k} r_{V_k \theta_k} \sigma_{V_k} \sigma_{\theta_k} + 2 \frac{\partial x_c}{\partial V_k} \frac{\partial x_c}{\partial y_k} r_{V_k y_k} \sigma_{V_k} \sigma_{y_k} \\ & \left. + 2 \frac{\partial x_c}{\partial V_k} \frac{\partial x_c}{\partial x_k} r_{V_k x_k} \sigma_{V_k} \sigma_{x_k} + 2 \frac{\partial x_c}{\partial \theta_k} \frac{\partial x_c}{\partial x_k} r_{\theta_k x_k} \sigma_{\theta_k} \sigma_{x_k} \right\} \end{aligned}$$

$$+ 2 \frac{\partial x_c}{\partial x_k} \frac{\partial x_c}{\partial y_k} r_{\theta_k y_k} \sigma_{\theta_k} \sigma_{y_k} + 2 \frac{\partial x_c}{\partial y_k} \frac{\partial x_c}{\partial x_k} r_{y_k \theta_k} \sigma_{y_k} \sigma_{\theta_k} \left. \right\}^{1/2} \quad (11.26)$$

利用另一种不同的方法来求解所研究的问题也可以得到等价的结果。这个方法的基础是将随机变量函数在所选择时间截面(例如主动段终点)和所研究函数的自变量数学期望上的函数值的邻域内分解成幂级数,而在展开式内通常只保留不超过二阶的项,这时用于确定某个随机函数 $A = f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ 均方差的表达式有如下形式:

$$\sigma_A^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \right)_{m_i}^2 \sigma_{\xi_i}^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i} \right)_{m_i} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \right)_{m_j} r_{ij} \sigma_{\xi_i} \sigma_{\xi_j} \quad (11.27)$$

式中 r_{ij} 是随机变量 ξ_i 和 ξ_j 的相关系数。

但要强调一下,上述方法与所研究的一般方法(影响矩阵法)相比毕竟是一个特殊的方法。在应用随机变量函数的幂级数展开法时必须注意,偏导数 $\partial f / \partial \xi_i$ (它的存在应由满足一般要求的函数的类型来保证)应取在与自变量数学期望相应的点 $\{m_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 上。

11.1.3 应用马尔可夫过程理论确定飞行器弹道散布特征

近几年来,作为飞行器运动的先验统计分析方法,马尔可夫理论得到了广泛的应用。

在转到研究此方法前,我们先引进几个与模拟飞行器统计动力学中随机量和随机过程有关的一般概念,在这些概念中起重要作用的是所谓平稳随机过程的概念。随机标量或矢量过程 $X(t)$ 在广泛意义上称为平稳的:如果此过程的数学期望是常量($m_x = \text{const}$),相关函数 $K_x(t_1, t_2)$ 与自变量 t_1 和 t_2 的值无关,而取决于它们之差 $\tau = t_2 - t_1$ 。在 $t = 0$ 时,标量平稳过程的相关函数 $K_x(\tau) = K_x(0) = \sigma_x^2 = \text{const}$ 。

由于平稳随机过程的概率特征具有准时间周期特征,使得可以将对时间平稳随机函数的研究以对某个辅助变量的随机函数的研究来代替。特别是一些可行解可以用带有不同复数振幅的谐波过程之和逼近平稳随机函数 $X(t)$ 来获得,这些复数振幅可用它的模(实数振幅)与谐波相位的指数因子之积来表示,这个情况就给出了以如

下形式的关系式

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} K_x(\tau) d\tau \quad (11.28)$$

来联系 $K_x(\tau)$ 与过程谱密度 $S_x(\omega)$ 的基础。

由傅里叶反变换就求得

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (11.29)$$

这个公式的特殊情况 ($\tau = 0$) 就是随机过程的方差以谱密度表示的表达式

$$K_x(0) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \quad (11.30)$$

具有常值谱密度 $S_x(\omega) = c = \text{const}$ 的平稳随机过程称为白噪声, c 值是表示白噪声的强度的量

$$c = \sigma_x^2 (\pi a)^{-1} \quad (11.31)$$

式中系数 $a > 0$ 具有与时间相反的因次, 在形式上, 白噪声相关函数的表达式可表示成

$$K_x(\tau) = 2\pi c \delta(\tau) = Q \delta(\tau) \quad (11.32)$$

其中 $\delta(\tau)$ 为 delta 函数, Q 为白噪声强度。

所得结果的物理意义在于, 对任意不同时刻所取的白噪声的纵坐标是无关的, 而其方差等于无穷大。

除了过去曾用过的、与 (11.2) 式相应的无条件概率分布密度的概念外, 在我们的研究中再增加条件(过滤) 概率分布密度 $f(x_k, t_k | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{k-1}, t_{k-1})$ 的概念, 式中竖线表示“对给定的”或“在…条件下”。如果无条件分布密度确定了同一实际过程 $X(t)$ 连续通过与瞬时 t_1, t_2, \dots, t_k 相应的各时间间隔的概率, 则条件分布密度是当随机过程纵坐标值在上述 t_1, t_2, \dots, t_{k-1} 瞬时已知的条件下, 实际过程 $X(t)$ 的概率分布。

如果随机变量 $x(t_i)$ 和 $x(t_j)$ 在 $\Delta t = t_j - t_i$ 任意小时都是无关的, 则称过程 $X(t)$ 为绝对随机的。注意到具有彼此无关分量的矢量的密度分布函数为

$$f(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = \prod_{i=1}^k f(x_i, t_i) \quad (11.33)$$

以后,绝对随机过程将由具有密度 $f(x, t)$ 的一维分布完全表征。因此,白噪声不是别的,正是具有标准一维分布密度的绝对随机过程 $X(t)$ 。为了给出马尔可夫过程基本性质的数学表述,必须研究条件密度。在一般情况下,这个密度取决于随机过程在 t_1, t_2, \dots, t_{k-1} 时刻的纵坐标值 x_1, x_2, \dots, x_{k-1} ,但对于马尔可夫过程则本质上只取决于过程在接近于所研究瞬时 t_k 附近时刻的纵坐标值,因此以下的条件可以作为马尔可夫过程的定义:如果对于任意瞬时

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k$$

$$f(x_k | x_1, \dots, x_{k-1}) = f(x_k | x_{k-1}) \quad (11.34)$$

也即如果分布密度 $f(x_k, t_k)$ 仅取决于在瞬时 t_{k-1} 过程的纵坐标,而完全与它过去的值无关,则这种过程称为马尔可夫过程。正是在这种意义下马尔可夫过程有时又称为“无后效过程”。初始一维密度(第一坐标 x_1 的概率密度) $f(x_1)$ 和过渡密度 $f(x_k | x_{k-1})$ 是它的详细特征。具有高斯转移密度独立增量的马尔可夫过程 $X(t)$ 称为维纳(винер)随机过程(随机离散过程)。从联合分布密度性质的观点看平稳过程应解释为对于短暂移动概率分布密度不变的过程。

如果现在回忆一下在第二章研究随机微分方程时引入的一些性质、曾提出一些什么样的要求,不难证明,由那些方程所确定的过程就属于马尔可夫过程之列。马尔可夫过程方法的优点是,与一般形式的随机过程不同,利用马尔可夫过程将使那些仅用相关理论(也即用不超过二阶的矩运算的理论)方法不足以解决问题的随机系统的过程和动力学研究得到本质的简化。

对于线性随机微分方程,在给定的上述标准情况下,其条件分布密度是高斯分布,但在非线性系统里这种条件一般不能满足,为了求得相应的条件分布密度,要利用称为柯尔莫哥洛夫(А. Н. Колмогоров)正方程和反方程的抛物线型偏微分方程。柯尔莫哥洛夫正方程以及由柯尔莫哥洛夫得到的严格结论曾被 П. 富克尔(П. Фоккер)和 М. 普朗克(М. Планк)用于研究扩散过程,因此此方程也称为福克尔-普朗克-柯尔莫哥洛夫方程。与以矢量形式随机微分方程(2.14)描述的多维扩散过程相应,在满足光滑性条件下,过渡分

布函数 f (按照定义, 它应理解为在前述取作初瞬时 t_0 的时刻过程以状态 x_0 来表征的条件下, 状态 $x(t)$ 的概率密度) 将满足柯尔莫哥洛夫逆方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad (11.35)$$

其初始条件为

$$f(x, t | x_0, t_0) = \delta(x - x_0)$$

在变量为 $\tau (\tau > t)$ 和 $x(\tau)$ 的函数里, 过渡密度的改变用柯尔莫哥洛夫正方程来描述:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_{\tau i}} (f F_{\tau i}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_{\tau i} \partial x_{\tau j}} f(\sigma_{ik} \sigma_{jk})_{\tau} \quad (11.36)$$

其初始条件与上相同。

经从(2.14)式转为一阶非线性随机方程后, 我们写出

$$dx = F(x, t)dt + \sigma(x, t)d\eta \quad (11.37)$$

对于它, 由福克尔 - 普朗克 - 柯尔莫哥洛夫得到的相对无条件分布密度将有如下形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x} [F(x, t)f(x, t)] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2(x, t)f(x, t)] \end{aligned} \quad (11.38)$$

由此方程即可得到表征作为时间函数的 $x(t)$ 的数学期望和方差变化方程

$$\frac{d}{dt} m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, t) f(x, t) dx \quad (11.39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Pi_x(t) = & 2 \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) F(x, t) f(x, t) dx \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(x, t) f(x, t) dx \end{aligned} \quad (11.40)$$

在一般的非线性系统情况里, 由于位于积分号下的扩散过程 $x(t)$ 的密度是未知的, 故上述关系式是不封闭的。

对于线性系统, 它们变成相应的 $m_x(t)$ 和 $\Pi_x(t)$ 的方程, 因而成为封闭的。

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x, t) f(x, t) dx = a(t)m_x(t) + b(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) F(x, t) f(x, t) dx = a(t) \Delta_x(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(x, t) f(x, t) dx = \sigma^2(t)$$

因此

$$\frac{d}{dt} m_x(t) = a(t) m_x(t) + b(t) \quad (11.41)$$

$$\frac{d}{dt} \Delta_x(t) = 2a(t) \Delta_x(t) + \sigma^2(t) \quad (11.42)$$

在给定的初始条件 $m_x(t_0), \Delta_x(t_0)$ 下积分所得到的微分方程就得到作为时间函数的数学期望及方差改变的关系式。将关系式(11.41)和(11.42)推广到与矢量方程(2.14)相应的多维线性马尔科夫系统,得

$$\frac{d}{dt} m_x(t) = A(t) m_x(t) + b(t) \quad (11.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} K_x(t) &= A(t) K_x(t) + K_x(t) A^T(t) \\ &+ \sigma(t) G(t) \sigma^T(t) \end{aligned} \quad (11.44)$$

式中 $G(t)$ 是扰动作用、特别是以白噪声来近似的扰动作用的强度,方程(11.43)和(11.44)一起组成了相关方程组,如果它们彼此无关则可分别积分。

下面我们以计算火箭和近程炮弹被动降弧段散布特征的例子来研究一下实际利用相关方程组的方法,采用将飞行器作为质点的运动模型为原始模型。

$$m \frac{dV}{dt} = -X_a - mg \sin \theta$$

$$mV \frac{d\theta}{dt} = -mg \cos \theta$$

$$\frac{dy}{dt} = V \sin \theta$$

$$\frac{dx}{dt} = V \cos \theta$$

设在初瞬时 $t = t_0$ 处常量 m, g, S_M 的值是已知的,而 $V, \theta, x, y, c_{x_a}(M)$ 以及 $\rho(y)$ 被看作是具有给定起始统计特征的随机变量。记 V

$= x_1, \theta = x_2, y = x_3, x = x_4$, 则状态矢量为 $\mathbf{x}(t) = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, 而原始非线性模型及其非线性右部为

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) &= f(\mathbf{x}, t) \\ f(\mathbf{x}, t) &= [f_1, f_2, f_3, f_4]^T\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}f_1 &= -c_{x_u}(x_1, x_3)\rho(x_3)x_1^2S_M(2m)^{-1} - g\sin x_2 \\ f_2 &= -gx_1^{-1}\cos x_2 \\ f_3 &= x_1\sin x_2 \\ f_4 &= x_1\cos x_2\end{aligned}$$

将飞行器的状态矢量表示成和的形式 $\mathbf{x}(t) = m_x(t) + \Delta\mathbf{x}(t)$, 再利用前面曾研究过的运动微分方程线性化的方法, 将矢量函数 $f(\mathbf{x}, t)$ 在 $\mathbf{x}(t) = m_x(t)$ 的邻域里线性化, 结果得

$$f(\mathbf{x}, t) \approx f(m_x, t) + A(m_x, t)\Delta\mathbf{x}(t)$$

式中 $A(m_x, t) = [\partial f(\mathbf{x}, t)/\partial \mathbf{x}]_{\mathbf{x}=m_x}$, 是矢量函数 $f(\mathbf{x}, t)$ 对 $\mathbf{x}(t)$ 的分量的偏导数 (4×4) 方阵, 于是得

$$\frac{d}{dt}(m_x, \Delta\mathbf{x}) = f(m_x, t) + A(m_x, t)\Delta\mathbf{x}(t)$$

由此经平均后我们直接得到

$$\frac{d}{dt}m_x(t) = f(m_x, t)$$

在确定了基准运动数学期望之后, 我们再转向平均弹道附近的扰动运动方程, 得

$$\frac{d}{dt}\Delta\mathbf{x}(t) = A(m_x, t)\Delta\mathbf{x}(t)$$

以它为基础建立计算状态矢量 $\mathbf{x}(t)$ 相关矩阵的方程:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{K}_x(t) = A(m_x, t)\mathbf{K}_x(t) + \mathbf{K}_x(t)A^T(m_x, t)$$

在给定的初条件 $m_x(t_0), \mathbf{K}_x(t_0)$ 下, 联立积分相关方程组可以对任何瞬时、包括对相应的落点瞬时 $t = t_c$ 求得 $m_x(t)$ 和 $\mathbf{K}_x(t)$ 。

如果在飞行过程中飞行器受到随机扰动的作用, 而这种扰动的特性与白噪声型的过程本质上不同, 那么, 以具有不变谱密度的平稳随机过程来近似代替它就会导致过大的误差。这就引起了深入研究可以将白噪声型过程转换成具有给定统计特性随机过程的问题。这

个问题就如同建立整形滤波器一样是十分著名的,其本质归结如下:如果要建立一个具有给定特征数(数学期望、相关函数或谱密度)的某个时间相关随机函数 $\xi(t)$,并且它作用于满足如下数学模型的动力系统上,

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(t)x(t) + \xi(t) \quad (11.45)$$

则必须利用某个与微分方程

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = K_\xi \xi(t) + B_\xi q(t) \quad (11.46)$$

相应的辅助模型。其状态以方程(11.46)来描述的动力系统称为成型滤波器,其中 K_ξ 是成型滤波器的增益系数矩阵; $q(t)$ 是激励(引起)过程 $\xi(t)$ 的白噪声。将矢量 $x(t)$ 和 $\xi(t)$ 合并成矢量 $x_p(t) = [x(t); \xi(t)]^T$,并称 $x_p(t)$ 为增广状态矢量^[34]。对此增广矢量,方程(11.43)以及在实际非白噪声型扰动作用下将白噪声作为输入随机作用的方程(11.44)仍是正确的。在图 11.2 上所示的系统数学模型的函数模拟器的说明列于图 11.3 中。

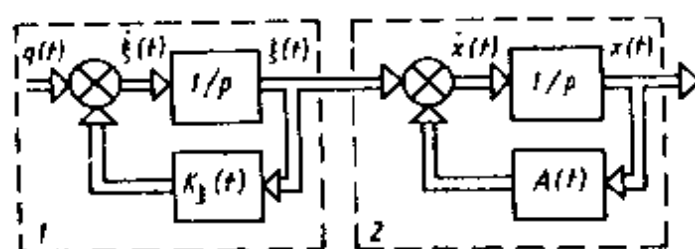


图 11.2 带有成型滤波器的系统的数学模拟器

1— 成型滤波器;2— 与状态方程(11.45)相应的系统。

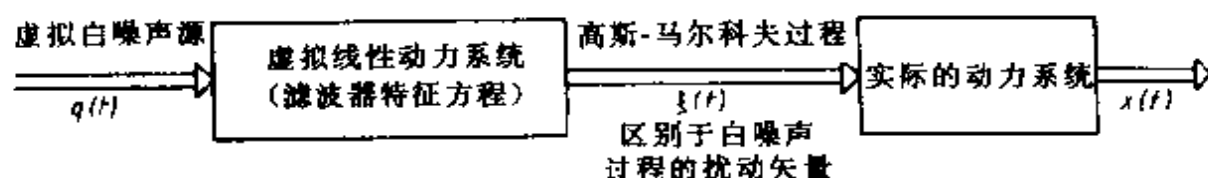


图 11.3 利用成型滤波器将白噪声转换成时间相关(“染色”)噪声

成型滤波器方法的优点在分析飞行器在湍流大气中的飞行时体现得最为充分和直观。

在求解大多数弹道问题时可以认为,在研究飞行器运动的某个空间域内湍流场是各向同性的(见第9章)。在相关理论范围内,各向同性场的全部特性就是横向(侧向)和纵向位移的相关函数 $K_x(\tau)$ 和 $K_z(\tau)$, 它们的表达式有如下形式^[39]:

$$K_x(\tau) = \sigma_T^2 \exp(-|\tau|T^{-1}) \quad (11.47)$$

$$K_z(\tau) = \sigma_T^2 [1 - |\tau|(2T)^{-1}] \exp(-|\tau|T^{-1}) \quad (11.48)$$

式中 σ_T^2 表征湍流强度; $T = LV^{-1}$ 是飞行器通过湍流尺度 L 的时间。

湍流尺度确定了在湍流空间不同点上阵风间的相关水平。当在平原地区飞行时,一直到飞行高度 $H \approx 500\text{m}$ 都有 $L \approx H$; 当在丘陵地区或山地上空飞行时 $L \approx 2H$; 当飞行器在大高度上运动时,参数 L 本质上取决于所研究地球表面上空空气域中的气候和气象条件。通常认为 $\sigma_T < 0.5\text{m/s}$ 时为弱湍流,而当 $\sigma_T > 2.5\text{m/s}$ 时为强湍流^[39]。

与关系式(11.47)和(11.48)相应的纵向和横向湍流分量的谱密度为

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma_T^2 T}{\pi(1 + T^2 \omega^2)} \quad (11.49)$$

$$S_z(\omega) = \frac{\sigma_T^2 T(1 + 3T^2 \omega^2)}{2\pi(1 + T^2 \omega^2)^2} \quad (11.50)$$

式中 ω 为具有因次为 $1/\text{s}$ 的频率。模拟与(11.49)和(11.50)相应的大气湍流场的成型滤波器方程具有如下形式:

对于纵向分量

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \xi(t); \\ x_2(t) &= \dot{x}_1(t) = K_{\xi_1} x_1(t) + b_1 q(t) \end{aligned} \quad (11.51)$$

式中 $K_{\xi_1} = -T^{-1} \quad b_1 = \sigma_T \sqrt{2T^{-1}}$

对于横向(侧向)分量

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \xi(t); \\ \dot{x}_1(t) &= x_2 + b_1 q(t); \\ \dot{x}_2(t) &= K_{\xi_1} x_1 + K_{\xi_2} x_2 + b_2 q(t) \end{aligned} \quad (11.52)$$

式中

$$K_{\xi_1} = -T^{-2} \quad K_{\xi_2} = -2T^{-1} \quad b_1 = \sigma_T \sqrt{3T^{-1}}$$

$$b_2 = (1 - 2\sqrt{3})\sigma_T T^{-3/2}$$

当利用计算机来实现时,采用成型滤波器方法的本质优点表现得特别明显,尤其是在用统计试验法确定散布特征时更是如此。此外还要着重指出,上面所述的方法属于模拟随机过程的近似方法。对于以成型滤波器算法来模拟随机过程的精度,最可靠的检验方法是模拟实现值的统计处理法^[117]。

11.1.4 用统计试验法确定散布特征

统计试验法(蒙特卡罗法)在文献中也称统计模拟法,一般说来此法是动力系统概率分析最为通用的方法,特别是在确定飞行器散布特征时更是如此。这个方法建立在所谓大数定理的基础上,此定理证明了,根据随机过程的几个实现计算出的平均值,在 $n \rightarrow \infty$ 时将不再是随机,而可以看作是所研究过程相应特征数的估值。当然,实际上要进行无穷多次试验是办不到的,但通常也没有这种必要,只要有比较多的试验结果也就够了,这时,随机事件出现的频率就接近于这个事件的概率,并且“近似的程度”取决于实现(试验)的次数。

这种方法适合于在先验统计分析范围内求解的外弹道问题,它包括利用计算技术进行统计试验,模拟所研究的飞行器在随机因素作用下的运动,然后将试验所得到的结果利用数理统计方法进行处理。

应用此法时要求:

查明所有影响飞行器运动的因素;

尽可能建立这些因素的分布规律;

组成能正确反映这些因素对过程影响的、最完整的飞行器运动数学模型。

在不可能保证以数学模型充分相似地反映飞行器系统个别元件作用功能的情况下(例如弹道修正弹控制系统的执行机构),可以用半实物模型进行统计试验,这种模型中除有通常在计算机上实现的数学关系式外,还含有出现在计算流程图中的具体仪器和设备的样品。统计试验法可以以连续的方式进行,也可以以离散的方式进行。

离散型方式可归结为在电子计算机上多次反复计算所模拟随机过程的参数。在模拟飞行器在扰动因素作用下产生的运动时,需要用物理方法或计算方法产生具有给定分布的随机量(函数)的实现值。通常在模拟机和数模混合计算机上研究随机过程和解决统计问题时都要采用随机序列(随机噪声发生器)的物理转换器。

当在通用电子计算机上模拟随机量的产生时,一般喜欢用程序方法形成随机数列,在一定的条件下可将相应的标准子程序称为伪随机数程序变换器,由它所产生的数列和伪随机性就在于,在变换器中每个随后的“随机值”是利用递推关系式算出的,而递推关系式中的自变量数值则在上一次套用子程序的过程中获得的。在统计模拟中进行计算的次数取决于所求解的问题的特性、精度要求以及对所获得的特征数估值的可靠性要求。此方法的优点是它的通用性好、精度高。

下面简短地研究一下在进行弹道计算时统计模拟方法的主要问题。这时最重要的是给定进行计算的随机函数的形式。在对实际扰动具有足够信息的条件下,可以以具体的实验值来表示,也可用从描述每个特征变化的、随机函数的正则分解式所求得的数值来表示。但情况往往是研究者没有这种信息,因此也不可能以较简单形式的随机过程之和来表示所模拟的随机过程,在这种情况下就不得不采用各种近似,这些近似都建立在对近似过程中的统计特征取某种假定的基础上,特别是可取白噪声或染色噪声作为这种近似过程。

我们先讨论一下采用正则分解式的处理方法。这种方法的本质在于将随机函数 $X(t)$ 以若干非随机(坐标)函数 $\varphi_j(t)$ 的某个线性组合来代替,组合中的系数是彼此无关并且数学期望为零的随机变量,也即它们满足如下关系式:

$$M[V_j] = 0 \quad M[V_j V_k] = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \dots) \quad (11.53)$$

式中 δ_{jk} 是按下述条件确定的克罗内克符号

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } j = k \\ 0 & \text{如果 } j \neq k \end{cases} \quad (11.54)$$

以上替换的正确性建立在如下定理的基础上,即任何连续随机函数 $X(t)$,都可分解为

$$X(t) = M[X(t)] + \sum_{j=1}^{\infty} V_j \frac{\varphi_j(t)}{\sqrt{\lambda_j}} \quad (11.55)$$

式中 λ_j 和 $\varphi_j(t)$ 是积分方程

$$\varphi(t) = \lambda \int_{t_1}^{t_2} K_x(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (11.56)$$

的特征数和特征函数。(11.55) 式是无穷数列,如果截断它而只保留(不大的)有限项,则数学模拟 $X(t)$ 的问题就可归结为以一组随机量 V_j 取代它的真值。当然,模型对实际过程近似的程度将取决于所考虑的分解式的项数。在这种情况下必须指出,为了寻求正则分解式(11.55),不一定非得求解积分方程(11.56) 不可,为此可再次利用各种近似方法,特别是可以用非随机函数 $\varphi_j(t)$ 与随机系数 A_j 乘积的线性组合来取代随机函数 $X(t)$ 。系数 A_j 可以这样来选取,即它应使对 $X(t)$ 的近似关系为最优逼近(例如在平均平方意义下的最优逼近)。但是,表达式

$$X(t) \approx \sum A_j \varphi_j(t) \quad (11.57)$$

还不是正则分解,因为在所选近似方法的情况下系数 A_j 还不是无关随机量,而具有由所选近似方法以及 $K_x(t_1, t_2)$ 的形式所决定的协变矩阵。为了从(11.57) 式转换成正则分解式,必须将 A_j 表示成新的随机量 V_k 线性组合的形式,其无关性条件的保证,以在上述随机量的条件下相应地选择系数 a_{jk} 来实现,也即有

$$X(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{jk} V_k \varphi_j(t) \quad (11.58)$$

作为扰动作用的特殊例子,下面研究一下阵风 W 型大气扰动以及大气密度对其标准值偏差 $\Delta\rho(H)$ 对飞行器飞行的影响。利用正则分解式,上述非稳态随机过程的表达式就可表示成如下形式:

$$W = \sum_{i=1}^n V_{w_i} \varphi_{w_i}(H) \quad (11.59)$$

$$\Delta\rho(H) = \sum_{i=1}^n V_{\Delta\rho_i} \varphi_{\Delta\rho_i}(H) \quad (11.60)$$

此分解式相应的相关函数如下:

$$K_W(H_1, H_2) = \sum_{i=1}^n \varphi_{W_i}(H_1) \varphi_{W_i}(H_2) \quad (11.61)$$

$$K_{\Delta\varphi}(H_1, H_2) = \sum_{i=1}^n \varphi_{\Delta\varphi_i}(H_1) \varphi_{\Delta\varphi_i}(H_2) \quad (11.62)$$

相关函数的变化特征可由大气探测统计处理得到,例如在文献[126]中就有介绍。根据第九章所述的理由,风的随机函数可合理地表示成如下两个函数^[32]。

在南北方向上

$$W_{c-n}(H) = \bar{W}_{c-n}(H) + \sum_{i=1}^m V_{W_{c-n}^i} \varphi_{W_{c-n}^i}(H)$$

在东西方向上

$$W_{B-3}(H) = \bar{W}_{B-3}(H) + \sum_{i=1}^m V_{W_{B-3}^i} \varphi_{W_{B-3}^i}(H)$$

式中 $\bar{W}_{c-n}(H)$ 和 $\bar{W}_{B-3}(H)$ 为风速矢量平均值沿高度的变化, $V_{W_{c-n}^i}, V_{W_{B-3}^i}$ 是随机变量, $\varphi_{W_{c-n}^i}(H)$ 和 $\varphi_{W_{B-3}^i}(H)$ 是确定相应方向上风速随机分量沿高度改变的坐标函数。

在每一个具体的弹道计算中,利用随机函数 $W_{c-n}(H)$ 和 $W_{B-3}(H)$ 的一个实现。随机变量及坐标函数是利用大气探测中所获得的大量试验资料经过极为复杂的概率分析后确定的,在弹道计算时,随机函数右边的项数由可用的试验数据、它们的可靠程度及数量来确定,在大多数情况下分解式可取 10 ~ 15 项。

下面研究一下在计算火箭散布特征时利用分解式的大致步骤。设随机函数 V_i 和坐标函数 φ_i 的特征是已知的,假定为确定 W_{c-n} 和 W_{B-3} 有 n 个坐标函数并且有 n 个随机系数的表,从每个表中取一个随机数 V_i ,将其中每个随机数乘以它自己的(同编号)的坐标函数然后相加,求得表示风速随高度变化的具体曲线(一个实现),并以函数 $W_{c-n}(H)$ 和 $W_{B-3}(H)$ 表示。为了减少计算,把风速矢量投影到射击方向和横侧方向上而获得 $W_x(H)$ 和 $W_z(H)$,而所求得的 $W_x(H)$ 和 $W_z(H)$ 将用于对第一次“发射”求解运动方程组,至于第二次、第三次等“发射”,也可用完全相同的方式先算出 $W_x(H)$ 和 $W_z(H)$ 。

利用所得到的随机参数值和随机函数,就可在电子计算机或模拟机上进行弹道计算(“试验”)。电子模拟机只能给出带有很大误差

的模拟结果,但是在不可能完全用数学方法描述客观现象而不得不将实际产品部件加入到计算机回路中去时,这种方法是很有用的。

将第一次“试验”得到的结果记入表中,然后以同样的方式进行第二次试验、第三次试验…直至下一次。在进行完所有的“试验”后从表上抄出我们所感兴趣的量(例如飞行距离、高度等),再确定它的分布规律和这种规律的数字特征。这样,根据试验结果,从概率观点讲就得到了所研究量的完整描述。

在电子计算机上模拟成形滤波器方程时必然会遇到两个问题:

由标准子程序软件产生的伪随机数序列获得具有单位谱密度的离散白噪声;

选择积分成型滤波器微分方程的最优步长。

具有协方差矩阵

$$M[q_i q_j^T] = Q_i \delta_{ij} \quad (11.63)$$

的离散白噪声是一种数学上的抽象,其中的 δ_{ij} 表示克罗内克函数(见 11.54)。为了在计算机上得到离散白噪声,要利用形成具有零数学期望和单位方差标准分布的伪随机数子程序。从这种程序转换器上发出的噪声强度为 $G = \Pi_q h_t$, 式中 Π_q 是由程序产生的随机量的方差; h_t 是转向程序的时间步长。按照(11.32)式,谱密度与白噪声强度间的关系为 $2\pi c = Q$, 式中 $c = \text{const}$ 。为了从程序产生的伪随机序列形成具有单位谱密度的白噪声,必须通过具有传递系数 $k = \sqrt{2\pi/\Pi_q h_t}$ 的环节将这个序列进行辅助变换。考虑到 $\Pi_q = 1$, 最后得 $k = \sqrt{2\pi/h_t}$ 。

成形滤波器方程积分步长的选取应根据保证以给定的精度再现指定频段上过程的谱密度这个条件来确定。

在 $h_t \rightarrow 0$ 以及在固定的频率范围 $\omega \in [0, \omega_0]$ 上,函数 $S_h(\omega)$ 趋于常值谱密度,而最大偏差出现在 $\omega = \omega_0$ 这个区间端点上。以离散型白噪声过程模拟连续型白噪声性质时,其相对误差用如下的量表示:

$$\frac{|S_h(0) - S_h(\omega_0)|}{S_h(0)} \leq \epsilon, \quad (11.64)$$

式中 ϵ_* 为预先给定的误差限。根据不等式(11.64) 得到选择步长 h_t

的不等式^[117]

$$h_i < h_* \leq 2 \sqrt{3\epsilon} \omega_0^{-1} \quad (11.65)$$

相应于成形滤波器方程(11.51)和(11.52), h_* 值相应地取为 $0.1T$ 和 $0.66T$ ^[117]。

此外在程序实现成形滤波器时,必须注意到,只有在过渡过程衰减后才能在滤波器出口处以要求的精度获得所需的随机过程。因此滤波器的微分方程必须比飞行器飞行动力学方程提前积分,其目的是为了消除滤波器过渡过程对散布特征计算精度的影响。利用成型滤波器形成随机过程的流程图绘在图 11.4 上。



图 11.4 形成具有给定性质随机作用的过程模拟图

现在在考虑大气湍流侧向分量的条件下求解飞行器侧向飞行稳定性问题,为了确定过程的精确特征,就需要用到形如(3.98)式的模型。

在所研究的情况下系统的状态矢量为

$$\mathbf{x}(t) = [z, \dot{z}, \psi, \omega_y, \beta]^T$$

对所讨论的情况,飞行器有控扰动运动线化模型具有如下形式:

$$\frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = a_{22}\dot{z} - a_{25}\beta + b_2\delta_y$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \dot{\psi}$$

$$\frac{d\omega_y}{dt} = a_{44}\omega_y + a_{45}\beta + b_4\delta_y + a_{45}\beta_w$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \dot{\beta} + a_{55}\beta + b_5\delta_y + a_{55}\beta_w$$

$$\beta_w = W_z(t)V^{-1}$$

$$\dot{\delta}_y = (\sigma - \delta_y)T_1^{-1}$$

$$\sigma = k_z \cdot z + k_z \dot{z} + k_\psi \psi + k_\psi \dot{\omega}_y$$

式中 T_1 是系统的时间常数。

对于所给的模型还需补充一组形如(11.52)式的成形滤波器方程。展开状态矢量

$$\mathbf{x}_p(t) = [z, \dot{z}, \psi, \dot{\psi}, \beta, \delta_y, x_1, x_2]^T$$

并转换成如下的离散模型

$$\mathbf{x}_p(k+1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}_p(k) + \mathbf{B}(k+1)\mathbf{q}(k+1)$$

其中 $\mathbf{A}(k)$ 和 $\mathbf{B}(k+1)$ 是 (8×8) 维矩阵; $\mathbf{q}(k+1)$ 是具有零数学期望和单位方差的标准分布伪随机序列, 此序列由相应的标准子程序产生。对所得到的随机实现进行统计处理就给出了考虑侧向(横向)大气起伏的稳定过程特性的相关函数值的基础。

统计试验法结果的精度在很大程度上取决于试验的次数和对所研究过程数学描述的恰当程度, 为保证达到给定的精度和结果的可靠性所必须的实现数 n , 可按照建立了未知量、置信水平和置信区间之间关系的著名公式来确定^[102]。为了在确定标准分布随机量相关矩阵时近似计算数字 n , 可推荐使用如下关系式:

$$n = 2\sigma_r^4 t_\epsilon \epsilon_\sigma^{-1} \quad (11.66)$$

式中 ϵ_σ 表示置信区间的大小, t_ϵ 是学生分布的参数, 其值取决于自由度和置信水平, 在概率论书籍中都列有专门的表可查。

§ 11.2 射击结果的统计处理

11.2.1 根据射击试验结果确定散布特征

直接进行射击试验可以最正确地估计散布特征。射击试验一般在火箭或火炮总体设计的最后阶段进行。当然, 随着火箭(炮弹)价格的增加, 采用射击方法获得足够统计资料的可能性也就逐渐减小,

因此总是将射击结果与理论计算相结合进行评估。在火箭射击的情况下解决此问题的主要困难在于统计资料十分有限,或者换句话说,在于火箭发射数量很少。此外,困难也在于预先不知道待处理量的分布规律。因此在根据试验结果计算其数字特征的过程中只好不谈它的精确值,而只谈所获得量的统计平均值。数字特征的统计平均值通常是在数字特征之上加一横线标记,例如 $\overline{m}[x] = \overline{m}_x$, 即为随机量数学期望的统计平均值; $\overline{\Pi}[x] = \overline{\Pi}_x$ 即为随机量方差的统计平均值等等,这些量称为相应数字特征的估值。

下面研究处理射击结果的基本步骤。假设发射了 n 次火箭,得到在 OXZ 平面上的 n 个落点(见图 11.5),落点坐标在起飞坐标系里确定。首先顺序写出每个落点的坐标 x, z , 然后根据坐标 x 和 z 算出它们的数学期望的统计平均值,

$$\overline{m}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (11.67)$$

$$\overline{m}_z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \quad (11.68)$$

再按下面的公式确定方差的统计平均值 $\overline{\Pi}_x, \overline{\Pi}_z$ 以及相关矩的统计平均值 \overline{K}_{xz}

$$\overline{\Pi}_x = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{m}_x)^2 \quad (11.69)$$

$$\overline{\Pi}_z = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (z_i - \overline{m}_z)^2 \quad (11.70)$$

$$\overline{K}_{xz} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \overline{m}_x)(z_i - \overline{m}_z) \quad (11.71)$$

最后再算出均方差的统计平均值 $\overline{\sigma}_x, \overline{\sigma}_z$ 以及相关系数的统计平均值

$$\overline{\sigma}_x = \sqrt{\overline{\Pi}_x} \quad (11.72)$$

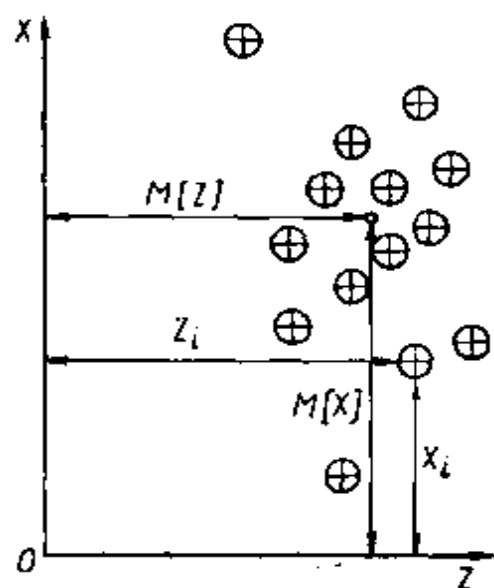


图 11.5 弹丸落点坐标散布图

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\bar{\Pi}_x} \quad (11.73)$$

$$\bar{r}_{xz} = K_{xz}(\bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_z)^{-1} \quad (11.74)$$

为了估计所得数字特征统计平均值的可靠性,需要计算它的置信区间。作为例子,下面研究一下对于随机量 x 的数学期望统计平均值置信区间的确定。

设根据射击结果的数据处理我们已获得 \bar{m}_x 而需要估计误差 $\bar{m}_x - m_x$, 这里 m_x 是随机量 x 数学期望的准确值。我们先约定某个足够大的 β (例如 $\beta = 0.9$), 使得具有概率 β 的事件可以认为实际上是可靠的, 再寻找一个这样的 ε 值, 使

$$P(|\bar{m}_x - m_x| < \varepsilon) = \beta \quad (11.75)$$

这样, 以 \bar{m}_x 代替 m_x 时产生误差的实际可能范围将是 $\pm \varepsilon$, 而绝对值大的误差出现的概率

$$\alpha = 1 - \beta \quad (11.76)$$

是很小的。将等式 (11.75) 改写成如下形式:

$$P(\bar{m}_x - \varepsilon < m_x < \bar{m}_x + \varepsilon) = \beta \quad (11.77)$$

所得到的等式 (11.77) 表示, 未知的准确值 m_x 以概率 β 落在如下的区间里 (见图 11.6)

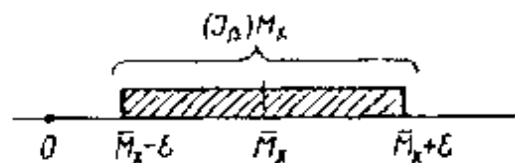


图 11.6 置信区间的定义

$$J_\beta = (\bar{m}_x - \varepsilon; \bar{m}_x + \varepsilon)$$

$$(11.78)$$

量 J_β 称为置信区间, β 为置信概率。对于现在的情况, β 是置信区间 J_β 含有量 m_x 的概率。

下面来确定对于随机坐标 x, z 平均数学期望的置信区间。为此先给定 β 值并由它求 t_β 。置信区间的相对边界由下式确定:

$$(\varepsilon)_{m_x} = t_\beta \sqrt{\frac{1}{n} \bar{\Pi}_x} \quad (11.79)$$

$$(\varepsilon)_{m_z} = t_\beta \sqrt{\frac{1}{n} \bar{\Pi}_z} \quad (11.80)$$

因而, 对于统计平均数学期望的置信区间将是

$$(J_\beta)_{m_x} = [m_x - (\epsilon)_{m_x}; m_x + (\epsilon)_{m_x}] \quad (11.81)$$

$$(J_\beta)_{m_z} = [m_z - (\epsilon)_{m_z}; m_z + (\epsilon)_{m_z}] \quad (11.82)$$

对于随机量 x 和 z 的统计平均方差, 置信区间的边界则可按如下式子确定:

$$(\epsilon)_{\bar{\Delta}_x} = t_\beta \sqrt{\frac{2}{n-1}} \bar{\Delta}_x \quad (11.83)$$

$$(\epsilon)_{\bar{\Delta}_z} = t_\beta \sqrt{\frac{2}{n-1}} \bar{\Delta}_z \quad (11.84)$$

在这种情况下, 统计平均方差的置信区间将是

$$(J_\beta)_{\bar{\Delta}_x} = [\bar{\Delta}_x - (\epsilon)_{\bar{\Delta}_x}; \bar{\Delta}_x + (\epsilon)_{\bar{\Delta}_x}] \quad (11.85)$$

$$(J_\beta)_{\bar{\Delta}_z} = [\bar{\Delta}_z - (\epsilon)_{\bar{\Delta}_z}; \bar{\Delta}_z + (\epsilon)_{\bar{\Delta}_z}] \quad (11.86)$$

如果记

$$\sigma_{1x} = \sqrt{\bar{\Delta}_x - (\epsilon)_{\bar{\Delta}_x}}$$

$$\sigma_{2x} = \sqrt{\bar{\Delta}_x + (\epsilon)_{\bar{\Delta}_x}}$$

则可得对均方差的置信区间:

$$(J_\beta)_{\sigma_x} = (\sigma_{1x}, \sigma_{2x}) \quad (11.87)$$

$$(J_\beta)_{\sigma_z} = (\sigma_{1z}, \sigma_{2z}) \quad (11.88)$$

数据处理的下一阶段就是建立射击结果的直方图, 由此图就可以获得对散布规律的可能特征取某种假设的基础。为了建立直方图要进行如下的工作, 将所得到的 x 和 z 的全部范围分成若干个区间, 设第 i 个区间为 (x_i, x_{i+1}) , (z_i, z_{i+1}) , 并统计随机量出现在第 i 个区间中的次数 m_i 。为便于

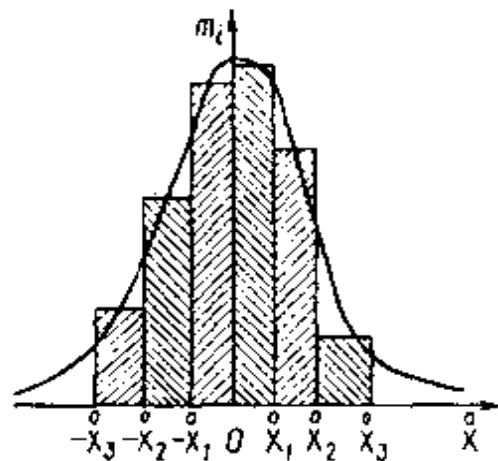


图 11.7 直方图的建立

建立直方图, 不取 x_i, z_i 的实际值, 而取它们与相应数学期望 \bar{x}_i, \bar{z}_i 的

偏差。通常区间数为 6 个、8 个,极少为 10 个。一般说来区间个数 k 取决于所进行的试验的数量,试验次数 n 越大则所取的区间数也越大,而区间的长度以取均方差较方便。

根据所得到的随机量 x 和随机量 z ,分别建立直方图。令横坐标为各个区间,而纵坐标为各区间中随机量 m_i 的值。分析所得到的直方图,对该随机量散布规律特征取某个假设,例如根据图 11.7 上列出的直方图可以采用随机量 x 服从正态分布的假设。

对于给定的随机量分布规律所取的假设还要按符合准则进行检查。为此常采用 χ^2 检验准则,该准则可以估计所采用的理论散布规律与统计散布规律之间符合程度。量 χ^2 按下式定义:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^K \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \quad (11.89)$$

式中 p_i 是按所采用的理论散布规律计算出的落在第 i 个区间中的概率。

例如,对于正态分布规律,随机量 x 落在给定区间中的概率按如下公式计算:

$$p_i = \frac{1}{2} \left[\Phi \left| \frac{\bar{x}_{i+1}}{\rho \sqrt{2} \sigma_x} \right| - \Phi \left| \frac{\bar{x}_i}{\rho \sqrt{2} \sigma_x} \right| \right] \quad (11.90)$$

式中 \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1} 是第 i 个区间的两个边界值; $\rho \sqrt{2} = 0.6745$, σ_x 是给定随机量的均方差,根据试验数据求得,而

$$\Phi \left| \frac{\bar{x}_i}{\rho \sqrt{2} \sigma_x} \right|$$

是引入的拉普拉斯函数的值。

其次要确定自由度数 r ,它等于区间数 k 减去加在所取理论分布规律上的条件(约束)个数 S ,即

$$r = k - S \quad (11.91)$$

在现在的情况下,附加条件(约束)数 S 为 3,即

- 1) 各频率之和必须等于 1;
- 2) 数学期望的理论值与统计平均值必须相等;
- 3) 理论方差与统计平均方差必须一致。

然后按所求得的 χ^2 和 r 值, 确定所取散布规律与实验数据不相矛盾的的概率 p 。如果所求得的概率较大, 则可认为所作的假设与实际数据不相矛盾。

概率 p 小到什么程度就可以抛弃对散布规律所作的假设呢? 这个问题是不确定的, 它不可能仅由数学考虑来解决。在实际中如果 $p < 0.1$, 则必须要么重新进行实验, 或者是试一试再找一个更为合适的分布规律。

除了 χ^2 判据外, 也常使用柯尔莫哥洛夫一致性准则, 作为理论分布与统计分布之差的限度。A. H. 柯尔莫哥洛夫建议研究统计分布与所采用的理论分布函数之差值模量的极大值^[22]。

应当指出, 应用柯尔莫哥洛夫准则以及 χ^2 一致性准则, 当概率 p 足够大时也只能得出所采用的分布规律假设与试验数据不相矛盾的结论。

将试验的散布特征与计算的散布特征相比较并一起进行评估, 在必要时可对计算的散布规律和散布特征引入某些修正。

炮弹和无控火箭的落点服从正态分布, 并且落点位于同一平面上散布椭圆范围之内, 椭圆的中心与散布中心(或聚集中心)一致, 在射击旋转炮弹时由于有向右的偏流, 散布椭圆的中心自射击平面向右移出。当以旋转炮弹对地面进行射击而且 $r_{xz} = 0$ 时, 椭圆的纵轴等于 $8B_{\Delta}$, 横轴等于 $8B_{\sigma}$, 并且通常 $B_{\Delta} > B_{\sigma}$ 。

在无控尾翼式炮弹以小射角对地面射击时, 以及在射击旋转炮弹时都有 $B_{\Delta} > B_{\sigma}$ (见图 11.86)。在接近最大射程角射击时 $B_{\sigma} > B_{\Delta}$, 从而使椭圆的长轴与射击方向垂直(见图 11.8a)。

依据决定散布的实际随机因素组合的不同, 椭圆的纵轴可以与射击方向不一致($r_{xz} \neq 0$)。在以平直弹道对立靶射击炮弹时, 散布椭

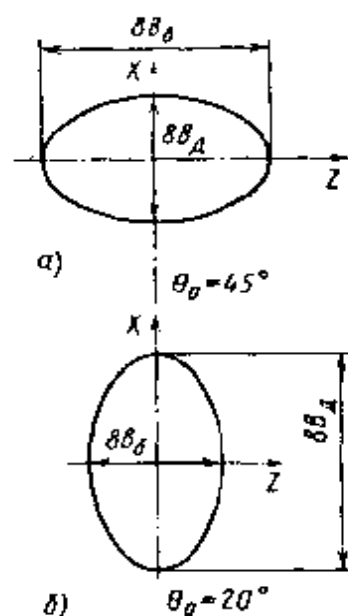


图 11.8 无控火箭弹在不同射角下的散布椭圆

圆接近于一个圆,其轴等于 $8B_{\sigma}$ 和 $8B_B$,这里 B_B 是沿高低方向的平均概率的偏差。

根据总散布还可以计算某个确定量的散布特征。例如,如果火炮在接近最大射程角的射角上进行射击,并且得到了 B_{μ} 的实验值,则因为已知在这个射角下 $\partial x_c / \partial \theta_0 = 0$,于是可从公式(11.25)求得

$$r_c = \frac{\partial x}{\partial x_c} \sqrt{B_{\mu}^2 - \left(\frac{\partial x_c}{\partial V_0} r_{V_0} \right)^2}$$

其中 r_{V_0} 根据弹道射的结果利用如下公式确定:

$$r_{V_0} = 0.6745 \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\delta V_i)^2} \quad (11.92)$$

式中 $\delta V_i = V_i - V_{cp}$ 是单发射击的初速 V_i 与一组射击的算术平均速度 $V_{cp} = [\sum_{i=1}^n V_i] / n$ 的偏差。

在对地区进行射击或对垂直遮蔽物进行射击而在各方向上概率偏差相同的情况下,在研究中就引入圆概率偏差的概念,也常称为圆偏差或圆误差。

中心位于散布中心,落入其中的概率等于0.5的圆的半径称为圆概率误差。显然,圆概率误差将大于沿方向上的相应偏差,圆概率偏差 E_{kp} (圆误差)与沿方向上的概率偏差间的关系为

$$E_{kp} = 1.75E \quad (11.93)$$

或者相应于对地面或对立靶的射击关系

$$r_{kp} = 1.75B_{\mu} = 1.75B_{\sigma}$$

显然,当 $B_{\mu} \approx B_{\sigma} \approx B_B$ 时可以引入球坐标的概念,而其特征为球概率偏差。所谓球概率偏差是指炸点落入以此偏差为半径的球中的概率等于0.5。球概率偏差可由一个方向上的概率偏差用下式求出:

$$E_{\phi} \approx 2.28E \quad (11.94)$$

11.2.2 试射数据和野战火炮射击数据的处理

野战火炮射击的任务是给敌人以打击,压制它的战斗力。战斗射击的实施按如下方式进行:

将火力自瞄准点转移进行精密准备;使用试射炮(ΠOP)数据,利用技术手段(目标跟踪雷达、直升机等)以及声测分队对目标试射。

装定诸元通常是用试射法确定。如果采用先将火力线自目标移开,再利用试射炮(ΠOP)的数据进行精密法准备确定诸元的方法,就可以在确保己方部队安全的条件下不经试射对有限个目标进行效力射。

试射的目的就是要根据落点对目标偏差采用逐次逼近法得到齐射的平均弹道。试射中的修正可根据一组炸点(不少于3个)或齐射的平均偏差值进行。

为了解决上述问题,必须对射击结果进行观察,根据观察方法的不同将射击分为:按观察落点符号射击;按偏差测量射击;按距离测量射击。

远距离确定射击结果最简单的办法是落点符号观察,近弹记以“-”号,远弹记以“+”号。落点符号观察仅当炮弹的落点沿“观—目”线时才是可行的,基本的观察形式是利用光学器材进行目视观察。在许多情况下(例如在对海上目标射击时),当目视能见度较低时,可在炮兵无线电台(АПAC)的显视器上观察炮弹落入水中的浪花。

另外两种观察方法就费劲得多,它要求有十分复杂的设备,但就准确确定目标位置来说,它们所需时间比用落点符号法进行观察的时间要少。根据偏差测量进行试射的主要工作是确定单发炮弹或齐射炮弹的炸点偏差,在侧方向上这是利用瞄准镜进行,在距离上则是利用测距机、炮兵交会观察站(ЧБ)以及炮兵雷达站(АПЛС)进行。在地炮射击中是以计算出的装定诸元开始进行单炮试射。如果测得炸点离目标的偏差在距离上不超过100m,方向上不超过0~20个密位,那么就可用修正后的装定诸元转入效力射,否则就要进行第二次试射、再根据第二个炸点与目标的偏差进行修正并转入效力射。

在对海上目标进行射击时,通常以具有宽表尺间隔(ΠΠ)4B_д的三个表尺依次进行试射。根据测得的距离再类似地进行试射,但在这

里是从最远的点开始射击。射程修正量可定为考虑到点射间隔的情况下所有齐射修正量的平均值,在进行完各组试射后,再以测得的偏差量重新修正表尺。将在一次齐射中每发弹的落点距离转到中心射击火炮(ЦАС)上,将齐射距离偏差的符号和量值定义为火炮至目标的距离与火炮至各个落点距离之差。三个齐射的平均偏差就是三个测得的偏差之和除以不考虑点射间隔的测量次数。

如果点射间隔不超过 $\Delta t = 8B_{\Delta}$,则在一级近似中可以认为由仪器产生的试射误差通常服从正态分布,其量值与所用测量仪器的精度、观测条件、平均弹道与目标偏差的估计方法以及弹丸的工艺散布有关。

试射结果的远距离测定以及对目标的效力射给所利用的试射数据的统计处理方法带来一些特点,特别是试射的平均误差或概率误差(以米为单位)按照所测得的距离由下式确定:

$$E_r = \sqrt{E_{\text{ном}}^2 + (183\tau_{\text{нр}})^2 t_H^2} \quad (11.95)$$

式中 $E_{\text{ном}}$ 是确定平均弹道相对于目标位置的概率误差(m), $\tau_{\text{нр}}$ 是在 1min 内距离改变量的概率误差($\tau_{\text{нр}} = \frac{1}{6}V\cos q$, V 是目标的速度, q 是航向角), t_H 是考虑目标移动的误差积累时间,常认为是从偏差测量瞬时到经修正后齐射弹丸落地瞬时的时间。

在采用平均弹道偏差时,至一族齐射弹中心的距离与至目标的距离之差为

$$E_{\text{ном}}^2 = \frac{(m+1)\Delta B_{\text{ном}}^2 + B_{\Delta}^2}{m} \quad (11.96)$$

式中 $\Delta B_{\text{ном}}$ 是至目标和至落点距离测量的概率误差(m); B_{Δ} 是射程概率误差; m 是观测到的落点数。

注意到在战斗中时间是很紧迫的,故只好对战斗条件下的结果处理进行最大程度的简化。为了进行射击效率的简化计算,建议将射击中的误差分为两类:重复误差和非重复误差,这两类误差的概率误差由下面的式子确定:

$$E_{\Delta 0} = E_{XB} \sqrt{r_{x_0}} \quad (11.97)$$

$$B_{x_0} = \sqrt{E_{XB}^2 - E_{x_0}^2} \quad (11.98)$$

$$\text{式中} \quad r_{x_0} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{j \neq i} r_{x_{ij}}^2} \quad (11.99)$$

式中, $r_{x_{ij}}$ 是第 i 次和第 j 次射击的相关系数; E_{XB} 是射击的概率误差, 并且 $r_{x_{ij}} = E_{x_{ij}}^2 E_{XB}^{-2}$; n 是射击发数。

以类似的方式也可将侧方向上的射击误差分为两类。

第十二章 弹道修正弹和子母弹的弹道特性

提高炮弹射击精度和密集度的方法之一是修正它的弹道,用以反抗作用在弹上的扰动,补偿由它产生的脱靶量。

弹道修正时弹丸的角运动动力学,弹丸相对质心运动所需形式的安排以及运动稳定性的保证,这都是进行这种弹设计时要解决的、最重要的问题。

在求解子母弹、集束战斗部的作战打击元件的弹道问题时,必须考虑它们在加工制造方面的结构特点。小长细比,大多数情况下为非流线型以及偶然的或故意制造的外形和质量不对称是这类弹药的结构特征^[44,128,133]。要建立这种对象空间运动动力学相应的数学模型并描述其物理图画通常是十分困难的。

§ 12.1 弹道修正弹的空间运动

12.1.1 修正弹弹道问题求解的特点

修正弹的弹道具有很复杂的特征,它可以由一个或几个弹道段组成,相应地也就是由一个或几个修正段组成。在弹道上修正位置的选择与作用在飞行炮弹上的不同扰动的影响大小有关,例如,如果炮弹的脱靶是由于被动段期间的扰动因素产生的,则必须在扰动形成的过程中或是在弹道末段目标附近进行修正。

如果研究的是火箭弹的运动,终点脱靶量的极大部分是由于主动段弹道上的扰动产生的,则应在主动段上修正这些扰动的影响。

为了寻找稳定修正弹的方法,需要研究利用陀螺稳定或利用尾翼稳定的可能性。

描述修正炮弹在修正段空间运动的数学模型可在普通炮弹一般

运动方程组[(3.7)~(3.25)或(3.165)]的基础上获得,只不过在动力学方程组中要增加用以确定修正系统执行机构的力和力矩的项以及增加描述制导系统工作的方程。

在执行机构动力作用时间不长的情况下,例如在脉冲修正的情况下,引入动力修正冲量的概念是很方便的,我们将在这种概念下来理解修正系统执行机构所产生的力的冲量。这种冲量可以是修正发动机装置的推力冲量,也可以是可控空气动力的冲量(舵、制动板)等。这时 $I_k = \int_{t_1}^{t_2} F_k dt$, 式中 I_k 是动力修正冲量, t_1 和 t_2 是修正力作用的开始和结束时刻。

如果忽略执行机构工作时弹丸质量的变化,则当已知修正冲量大小后就可以估计在冲量作用下弹丸速度矢量的改变 $\Delta V = I_k/m$ 。这里假设在修正时间内其它力的影响小得可以忽略。关于修正冲量作用瞬时性的假设在每一个具体情况中必须说明理由,因为不计修正冲量作用时间间隔的有限性,就会影响修正后弹道计算的精度。

修正时弹道的改变与施加在炮弹上的修正力的形成方法,力的大小以及作用位置有关,这些因素决定了炮弹修正过程的动力学并影响到修正作用结束后炮弹沿修正弹道自由运动的弹道参数。在对高速旋转弹丸进行修正时,修正力的大小、方向和作用点将影响弹丸旋转运动的特性,经修正后可能出现弹丸绕质心剧烈运动,故在进行修正弹的稳定性分析和射击精度估算时必须予以考虑。修正冲量大小的选取实际上是一个现实的独立问题,它直接与弹丸结构以及整个控制系统的参数优化问题有关。

12.1.2 脉冲修正弹的空间运动

脉冲修正弹在普通弹道段上的运动方程与普通弹丸的运动方程是一样的,但在修正段上,为了描述弹丸的运动则必须在弹丸一般运动方程中补充描述修正系统工作的数学模型。我们研究一个具有垂直于弹丸纵轴的动力冲量的修正弹,选取固连坐标系的 OY 轴的方向为修正力 F_k 的方向,即

$$\mathbf{F}_k = [F_{kx} \quad F_{ky} \quad F_{kz}]^T = [0 \quad F_k \quad 0]^T \quad (12.1)$$

在下面的研究中引入不随弹丸绕纵轴旋转的坐标系 $OX'Y'Z'$ ，矢量 \mathbf{F}_k 在这个轴上的投影为

$$\begin{bmatrix} F_{kx'} \\ F_{ky'} \\ F_{kz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_k \cos\gamma \\ F_k \sin\gamma \end{bmatrix}$$

利用从坐标系 $OX'Y'Z'$ 向弹道系转换的转换矩阵，不考虑风的影响 ($V_k = V$)，得到矢量 \mathbf{F}_k 在弹道系上的投影

$$\begin{bmatrix} F_{kx_k} \\ F_{ky_k} \\ F_{kz_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha \cos\beta & -\sin\alpha \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha \sin\beta & \sin\alpha \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F_k \cos\gamma \\ F_k \sin\gamma \end{bmatrix}$$

写出各分量得

$$\begin{aligned} F_{kx_k} &= -F_k \cos\gamma \sin\alpha \cos\beta + F_k \sin\gamma \sin\beta; \\ F_{ky_k} &= F_k \cos\gamma \cos\alpha; \\ F_{kz_k} &= F_k \cos\gamma \sin\alpha \sin\beta + F_k \sin\gamma \cos\beta \end{aligned} \quad (12.2)$$

在进行修正时攻角和侧滑角都不大的情况下可以利用近似关系 $\sin\alpha \approx \alpha, \cos\alpha \approx 1, \sin\beta \approx \beta, \cos\beta \approx 1$ ，则有

$$F_{kx_k} \approx 0 \quad F_{ky_k} \approx F_k \cos\gamma \quad F_{kz_k} \approx F_k \sin\gamma \quad (12.3)$$

考虑到 (12.3) 式，描述弹道修正弹质心运动的方程 (3.7) ~ (3.9) 就可写成如下形式：

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -c_r \frac{\rho V^2}{2m} S - g \sin\theta; \\ \dot{\theta} &= c_y^a \frac{\rho V}{2m \cos\theta} S \alpha - \frac{g}{V} \cos\theta + \frac{\Phi(t) F_k \cos\gamma}{mV}; \\ \dot{\Psi} &= -c_z^{\beta} \frac{\rho V}{2m \cos\theta} S \beta - \frac{\Phi(t) F_k \sin\gamma}{mV \cos\theta} \end{aligned} \quad (12.4)$$

在这几个方程中，函数 $\Phi(t)$ 表示修正系统工作的逻辑值。当满足必要的修正条件时加入修正力，即满足 $t_k < t < t_k + \tau$ (t_k 是修正开始时间， τ 是力 F_k 作用的持续时间) 时 $\Phi(t) = 1$ ，在相反的情况下 $\Phi(t) = 0$ 。

如果修正冲量准确地通过质心,则在修正时不会引起附加力矩,因而描述弹丸相对质心运动的动力学方程(3.10)~(3.12)也就不变;当故意地不满足此条件或由于加工误差偶然地不满足此条件时,在方程中就必须考虑附加力矩的存在。

如果认为力 F_k 严格地平行于 OY 轴而矢量 F_k 作用点在固连坐标系里的坐标为 $\Delta x, \Delta z$,则可写出在进行修正时相应的力矩沿固连坐标系三轴的分量

$$M_{kx} = -\Phi(t)F_k\Delta z \quad M_{ky} = 0 \quad M_{kz} = \Phi(t)F_k\Delta x$$

这时相对质心运动的方程就可写成如下形式

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_x &= \frac{\rho V^2}{2C}Slm_x + m_{xz}^* \frac{\rho V}{C}Sl^2\omega_x - \Phi(t) \frac{F_k\Delta z}{C} \\ \dot{\omega}_y &= (1 - \frac{C}{A})\omega_x\omega_z + m_y^* \frac{\rho V^2}{2A}Sl\beta + m_{yz}^* \frac{\rho V}{A}Sl^2\omega_y \\ \dot{\omega}_z &= -\left[1 - \frac{C}{A}\right]\omega_x\omega_y + m_z^* \frac{\rho V}{2A}Sl\alpha + m_{zx}^* \frac{\rho V}{A}Sl^2\omega_z + \Phi(t) \frac{F_k\Delta x}{A}\end{aligned} \quad (12.5)$$

这里我们不去详细地讲述各种修正方法实施的特点,因为它们既与制导方法有关,也与具体的仪器工作过程有关。在这里我们指出,弹丸空间运动一般模型的其它方程是不变的。

12.1.3 在冲击力矩作用下弹丸的角运动

本节研究在短时冲击力矩作用下弹丸的角运动^[74]。设冲击时间小于一个自转时间周期 $T_x = 2\pi/\omega_x$,我们要研究在有限个冲击的短时间间隔内弹丸的运动,设在此短时间间隔内空气动力矩的量值比冲击力矩小得多,因而前者可以忽略,这样,在一般情况下有

$$\begin{aligned}1) \quad C\dot{\omega}_x &= M_{kx}(t); \\ 2) \quad A\dot{\omega}_y - (A - C)\omega_x\omega_z &= M_{ky}(t); \\ 3) \quad A\dot{\omega}_z + (A - C)\omega_x\omega_y &= M_{kz}(t)\end{aligned} \quad (12.6);$$

设沿对称轴的冲击力矩分量为零,即 $M_{kx}(t) = 0$,则由方程组(12.6)的第一个方程得 $\omega_x = \omega_{x0} = \text{const}$ 。引入新的变量

$$d\varphi = \omega_x dt \quad (12.7)$$

并注意到

$$\dot{\omega}_j = \frac{d\omega_j}{dt} = \frac{d\omega_j}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega_j \omega_z \quad (j \sim y, z) \quad (12.8)$$

式中“ $'$ ”号表示对变量 φ 的导数, 则第二和第三个方程就变成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_y - \mu\omega_z &= m_{ky}; \\ \dot{\omega}_z + \mu\omega_y &= m_{kz} \end{aligned} \quad (12.9)$$

式中

$$\mu = 1 - \frac{C}{A} \quad m_{ky} = \frac{M_{ky}}{A\omega_x} \quad m_{kz} = \frac{M_{kz}}{A\omega_x}$$

引进复数 $\omega_y + i\omega_z = \omega$; $m_{ky} + im_{kz} = m_k$, 将方程(12.9) 变成如下形式:

$$\omega' + i\mu\omega = m_k \quad (12.10)$$

考虑到变量代换式(12.7), 则复作用力矩 $m_k = m_k(t)$ 就可表示成新变量 φ 的函数。方程(12.10) 的一般解具有如下形式:

$$\omega = e^{-i\mu\varphi} \left(\omega_0 + \int_0^\varphi m_k(\psi) e^{i\mu\psi} d\psi \right) \quad (12.11)$$

式中 $\omega_0 = \omega(0)$ 为任意常数, 或将上式表示成实数形式:

$$\begin{aligned} \omega_y &= \omega_{y0} \cos \mu\varphi + \omega_{z0} \sin \mu\varphi \\ &+ \int_0^\varphi [m_{ky} \cos \mu(\varphi - \psi) + m_{kz} \sin \mu(\varphi - \psi)] d\psi \\ \omega_z &= \omega_{z0} \cos \mu\varphi - \omega_{y0} \sin \mu\varphi \\ &+ \int_0^\varphi [m_{kz} \cos \mu(\varphi - \psi) - m_{ky} \sin \mu(\varphi - \psi)] d\psi \end{aligned} \quad (12.12)$$

短时冲击的连续性可用狄拉克(Дирак)函数 $\delta(t)$ 表示,

$$M_k(t) = \sum_j M_{kj} \delta(t - t_j) \quad (12.13)$$

式中 t_j 是第 j 个冲击的时间, M_{kj} 为第 j 个冲击的量值, $m_k(t)$ 则相应地由式(12.13) 确定。一般解(12.11) 可写成如下形式:

$$\omega = \omega_0 e^{-i\mu\omega_x t} + \omega_{x0} \int_0^t e^{-i\mu\omega_{x0}(t-\tau)} \sum_j m_{kj} \delta(\tau - t_j) d\tau \quad (12.14)$$

每一个冲击都引起瞬时角速度的突变

$$\Delta\omega_j = \omega_{x0} m_{kj} \int_{t_j-\varepsilon}^{t_j+\varepsilon} \delta(\tau - t_j) d\tau \quad (12.15)$$

再引入单位阶跃函数

$$1(t - t_j) = \int_0^t \delta(\tau - t_j) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{当 } t < t_j \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } t > t_j \text{ 时} \end{cases} \quad (12.16)$$

则一般解(12.14)可归结为如下形式:

$$\omega = \omega_0 e^{-i\mu\omega_{x0}t} + \omega_{x0} \sum_j m_{kj} 1(t - t_j) e^{-i\mu\omega_{x0}(t-t_j)} \quad (12.17)$$

这个解是单个冲击力矩激起的弹轴特征振动的相互叠加。

12.1.4 旋转稳定脉冲修正弹的角运动稳定性

在选择炮弹弹道修正的冲量值时,至少要考虑到两个方面的限制:一个是从结构强度的观点出发确定出冲击载荷的极限值;另一个是要保证进行冲击修正后弹丸角运动的稳定性。如果修正冲量过大,弹丸会失去稳定性,章动角增大一直到弹丸“翻倒”,也即绕赤道轴旋转。为了估计产生这种运动状态的修正冲量的极限值,必须知道弹丸的空气动力特征,首先是翻转力矩与章动角在 $-\pi < \delta < \pi$ 范围内变化的关系。

实际中最重要的问题是:已知进行冲量修正前的角坐标和角速度值,要求确定一个动力修正冲量的极限值,在此极限冲量作用下经修正后的运动章动角不超过给定的极限允许值 $\delta_{j\max}$ (即当 $t > t_k$ 时 $\delta < \delta_{j\max}$, 这里 t_k 为进行修正的瞬时)。

我们指出,在求解这个问题时,利用小章动角条件下得出的数学模型一般说来是没有根据的,只有在问题的技术提法上有根据时才可以采用这种模型。下面我们将研究没有此种限制的情况下求解上述问题的途径。

设动力对弹丸作用的时间比弹丸绕纵轴旋转的周期 $T_x = 2\pi/\omega_x$ 要小,于是可以认为,在修正冲量作用的瞬时,弹丸的角坐标和角速度瞬时地改变,也即在 $t = t_{k-0}$ 时

$$\delta = \delta_k \quad \dot{\delta} = \dot{\delta}_k \quad \nu = \nu_k \quad \dot{\nu} = \dot{\nu}_k \quad r = r_k \quad (12.18)$$

式中 $\delta_k, \dot{\delta}_k, \nu_k, \dot{\nu}_k, r_k$ 是进行修正以前的相坐标。在 $t = t_k + 0$ 时

$$\delta = \delta_0 \quad \dot{\delta} = \dot{\delta}_0 \quad \nu = \nu_0 \quad \dot{\nu} = \dot{\nu}_0 \quad r = r_0 \quad (12.19)$$

是修正冲量作用以后的相坐标。角坐标及其导数的改变量 ($\Delta\delta = \delta_0$)

$-\delta_k$ $\Delta\dot{\delta} = \dot{\delta}_0 - \dot{\delta}_k$ $\Delta\nu = \nu_0 - \nu_k$ $\Delta\dot{\nu}_0 = \dot{\nu}_0 - \dot{\nu}_k$ $\Delta r = r_0 - r_k$) 既与修正冲量的大小有关, 也与冲量在弹上的作用点有关。对于每一个具体的动力修正冲量实施方案, 当已知其在弹体固连坐标系中的方位后, 就可以确定相坐标的改变量。

如果修正冲量准确地沿着一条通过弹丸质心的直线作用, 则它只改变角坐标 (δ, ν) , 因为在采用上述假设的情况下速度矢量的大小发生了瞬时改变: $V_0 = V_k + \frac{1}{m}I_k$, 这里 V_k 是施加动力作用以前 ($t = t - 0$) 的弹丸速度矢量, 而在修正作用以后有 $t = t_k + 0$ 。在一般情况下动力冲量不通过质心, 这时还有冲击力矩作用在弹上, 它将使角速度矢量的大小和方向发生改变, 这时除了 δ 和 ν 之外, 它们的导数 $\dot{\delta}$, $\dot{\nu}$ 和 r 也将改变。

如果修正作用是由方向相反而作用点又关于质心对称分布的动力冲量所形成的力偶来实现, 则在弹上将只有冲击力矩作用, 它将只引起角速度分量 $\dot{\delta}$, $\dot{\nu}$ 和 r 的改变。如果动力冲量的作用线与弹的纵轴相交, 则在修正后 r 的值不变。因此在知道了 I_k 在固连坐标系里的大小和方向后就可以确定经修正后弹丸运动的初始角扰动 $(\delta_0, \dot{\delta}_0, \nu_0, \dot{\nu}_0, r_0)$ 。此时为了估算章动角的极限值就可利用 H. Γ. 契塔耶夫方法 (参见 8.1.12 节)。设经冲量修正后弹丸的轨迹接近于直线, 质心速度是已知的时间函数, 而弹丸的转动运动是在翻转力矩和表面摩擦力矩的作用下进行的。在这种情况下弹丸的转动运动方程可由方程组 (3.157) 获得。如在其中设

$$f_2 = f_3 = f_5 = f_7 = 0 \quad \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$$

则得到如下形式的方程组

$$\begin{aligned} \ddot{z}_3 \ddot{z}_1 - \ddot{z}_3 \dot{z}_1 + 2\alpha \dot{z}_2 &= -f_4 z_3 & z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= 1; \\ z_1 \ddot{z}_2 - \ddot{z}_1 \dot{z}_2 + 2\alpha \dot{z}_3 &= f_4 z_2 & \dot{\alpha} &= -f_6 \alpha \end{aligned} \quad (12.20)$$

利用与 (4.3.1) 中相同的变换后可以指出, 在这种情况下简约运动方程 (4.60) 的两个首次积分可表示成如下形式

$$z_2 \dot{z}_3 - z_3 \dot{z}_2 = h_1 - 2\alpha z_1 - \int_0^t 2f_6 \alpha z_1 dt;$$

$$\dot{z}_1^2 + \dot{z}_2^2 + \dot{z}_3^2 = 2h_2 - 2f_4 z_1 + \int_0^t 2 \frac{df_4}{dt} z_1 dt \quad (12.21)$$

这里将进行修正的瞬时取作时间的零点。在表达式(12.21)中,消去变量 $z_2, z_3, \dot{z}_2, \dot{z}_3$ (见 8.1.2 节)后即可得类似于式(8.49)对于变量 $z_1 = \cos \delta$ 的表达式

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^2 &= (2h_2 - 2f_4 z_1 + \int_0^t 2 \frac{df_4}{dt} z_1 dt)(1 - z_1^2) - \\ &\quad - (h_2 - 2\alpha z_1 - \int_0^t 2f_6 \alpha z_1 dt)^2 = f(z_1) \end{aligned} \quad (12.22)$$

设在动力修正冲量作用以前弹丸具有最小的章动角(在理想情况下 $z_1 = \cos \delta = 1$),考虑到弹丸作减速运动 $\left[\frac{df_4}{dt} < 0\right]$,可得^[114]

$$\begin{aligned} 2h_2 - 2f_4 z_1 + \int_0^t 2 \frac{df_4}{dt} z_1 dt &< 2h_2 - 2f_4 z_1 + z_{1\min} 2(f_4 - f_{40}); \\ h_1 - 2\alpha z_1 - \int_0^t 2f_6 \alpha z_1 dt &> 2\alpha(1 - z_1) \end{aligned} \quad (12.23)$$

因而

$$\begin{aligned} f(z_1) &< \varphi(z_1) = (2h_2 - 2f_4 z_1 + z_{1\min} 2(f_4 - f_{40}))(1 - z_1^2) \\ &\quad - 4\alpha^2(1 - z_1)^2 \end{aligned} \quad (12.24)$$

根据表达式(12.22) $\dot{z}_1^2 = f(z_1)$,弹丸的实际转动运动将与变量 z_1 的变化区段($z_1 \in [-1, 1]$)的区段相应,在此区段上函数 $f(z_1)$ 为正。这时

$$0 < f(z_1) < \varphi(z_1) \quad (12.25)$$

因而对于实施运动校正后的任一瞬时, z_1 的实际值应位于区间 $[-1, 1]$ 使多项式 $\varphi(z_1)$ 为正的区段上。在(12.24)式中取 $z_1 = \pm 1$, 可以证明 $\varphi(-1) < 0, \varphi(+1) = 0$ 以及在 $|z_1| > 1$ 时 $\varphi(z_1) > 0$ 。对于固定的 t 值,多项式 $\varphi(z_1)$ 在区间 $[-1, 1]$ 内有一个根 z_{11} (见图 12.1)。在随时间变化的区间 $[z_{11}, 1]$ ($z_{11} = z_{11}(t)$) 上可以找到与弹丸实际运动相对应的、变量 z_1 的值

$$z_{11} < z_1 < 1 \quad (12.26)$$

因而在弹丸经修正后的全部有限飞行时间内,根 $z_{11} = \cos \delta_{\max}$ 愈是接近于 1,则章动角 δ 与 0 的偏差就越小。由此可建立多项式 $\varphi(z_1)$ 的根在全部飞行时间里都大于 $(1 - \Delta)$ 的条件(见图 12.1),式中 Δ 是—

个给定的小正值,它用于确定章动角的最大允许值,即

$$z_{1\min} = 1 - \Delta; \\ \delta_{1\max} = \arccos z_{1\min} \quad (12.27)$$

条件 $\delta < \delta_{1\max}$ 等价于条件 $\cos \delta = z_1 > z_{1\min} = 1 - \Delta$ 。如果 $1 - \Delta - z_1 < 0$, 或者如下多项式的根都是负值, 则后面一个条件将被满足

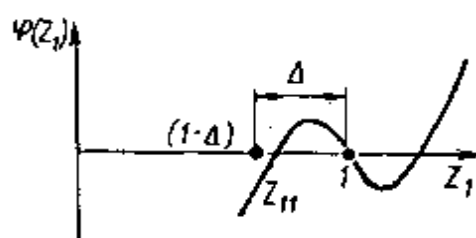


图 12.1 多项式 $\varphi(z_1)$ 的图形

式中

$$F(x) = -\varphi(1 - \Delta - x) = 2f_4x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \quad (12.28)$$

$$a_1 = 4(\alpha^2 - f_4) + 2(h_2 - f_{40}) + \Delta^2(f_{40} + 2f_4); \\ a_2 = -4(h_2 - f_{40}) + 2\Delta[4\alpha^2 - 2(f_4 + f_{40}) + 2(h_2 - f_{40})] \\ + \Delta^2 2(f_4 + 2f_{40}); \\ a_3 = -4\Delta(h_2 - f_{40}) + \Delta^2[4(\alpha^2 - f_{40}) + 2(h_2 - f_{40})] \\ + 2f_{40}\Delta^3 \quad (12.29)$$

按照霍尔维茨理论, 多项式 $F(x)$ 之根为负的条件是如下的不等式:

$$a_1 > 0 \quad a_1 a_2 - 2f_4 a_3 > 0 \quad a_3 > 0$$

或者在代入 $a_i (i = 1, 2, 3)$ 的值以后得

$$4(\alpha^2 - f_4) + 2(h_2 - f_{40}) + \Delta(2f_{40} + 4f_4) > 0; \\ -4(h_2 - f_{40})[4(\alpha^2 - f_4) + 2(h_2 - f_{40})] \\ + \Delta[2(4(\alpha^2 - f_4) + 2(h_2 - f_{40}))(4(\alpha^2 - f_{40}) \\ + 2(h_2 - f_4) - 4f_{40}(h_2 - f_{40})) + \Delta^2[4\alpha^2 + 2(h_2 - f_{40}) \\ - (f_{40} + 3f_4)]8(f_{40} - f_4) + \Delta^3 8(f_4 + f_{40})^2 > 0; \\ -4\Delta(h_2 - f_{40}) + \Delta^2[4(\alpha^2 - f_{40}) + 2(h_2 - f_{40})] + 2f_{40}\Delta^3 > 0$$

下面研究两种特殊情况。

设在冲击瞬时仅有冲击力矩作用在弹上, 因此在 $t = t_k + 0$ 时有 $\delta_0 = \nu_0 = 0; \dot{\delta} = \dot{\delta}_0$ 。将式(12.21)中的变量 $z_{11}, z_i (i = 1, 2, 3)$ 转换成角坐标 δ 和 ν , 得到 h_2 的表达式如下

$$2h_2 = \dot{\delta}^2 + \dot{\nu}^2 \sin^2 \delta + 2f_4 \cos \delta - \int_0^t 2 \frac{df_4}{dt} \cos \delta dt \quad (12.30)$$

由此式,对于初始瞬时($t_k = 0$)得

$$2h_2 - 2f_4 = \dot{\delta}_0 \quad (12.31)$$

考虑到式(12.31),对于修正后的运动起始条件,不等式(12.29)将取如下形式:

$$\begin{aligned} 1) \quad & 4(\alpha^2 - f_4) + \dot{\delta}_0^2 + \Delta(2f_{40} + 2f_4) > 0; \\ 2) \quad & -2\dot{\delta}_0^2[4(\alpha^2 - f_4) + \dot{\delta}_0^2] + \Delta[2(4(\alpha^2 - f_4) + \dot{\delta}_0^2) \\ & (4\alpha^2 - (2f_{40} + 2f_4) + \dot{\delta}_0^2) - 2f_{40}\dot{\delta}_0^2] \\ & + \Delta^2[4\alpha^2 - (f_{40} + 3f_4) + \dot{\delta}_0^2]8(f_{40} + f_4) \\ & + \Delta^3 8(f_4 + f_{40})^2 > 0; \\ 3) \quad & -2\Delta\dot{\delta}_0^2 + \Delta^2[4(\alpha^2 - f_{40}) + \dot{\delta}_0^2] + 2f_{40}\Delta^3 > 0 \quad (12.32) \end{aligned}$$

如果

$$4(\alpha^2 - f_4) + \dot{\delta}_0^2 > 0 \quad (12.33)$$

则(12.32)式中的第一个不等式将恒能满足而与 Δ 无关。按照式(12.32)中的最后一个不等式,如果

$$4(\alpha^2 - f_{40}) + \dot{\delta}_0^2 > 0 \quad (12.34)$$

则章动角可以是很小的。如果

$$-2\dot{\delta}_0^2 + \Delta(4\alpha^2 - 4f_{40} + \dot{\delta}_0^2) > 0$$

则第三个不等式也将被满足。考虑到 $2f_{40}\Delta^3 > 0$,则在一级近似中 Δ 的边界值可用下式估计^[114]:

$$\Delta < \frac{2\dot{\delta}_0^2}{4(\alpha^2 - f_{40}) + \dot{\delta}_0^2}$$

如果

$$(4(\alpha^2 - f_4) + \dot{\delta}_0^2)(4\alpha^2 - (2f_{40} + 2f_4) + \dot{\delta}_0^2) - 2f_{40}\dot{\delta}_0^2 > 0$$

并且

$$\Delta(4\alpha^2 + \dot{\delta}_0^2 - (2f_{40} + 2f_4)) > 2\dot{\delta}_0^2$$

则式(12.32)中的第二个不等式也将被满足。在 Δ^2 和 Δ^3 项的系数是正的并且按照上面第二个不等式, Δ 的边界值为

$$\Delta < \frac{2\dot{\delta}_0^2}{4\alpha^2 + \dot{\delta}^2 - (2f_{40} + 2f_4)} \quad (12.35)$$

则对经修正后弹丸不长的飞行时间($f_4 \approx f_{40}$), 如果

$$\Delta < \frac{2\dot{\delta}_0^2}{4(\alpha^2 - f_{40}) + \dot{\delta}_0^2} \quad (12.36)$$

则三个不等式都将被满足。

我们指出, 条件 $\alpha^2 - f_{40} > 0$ 是马也夫斯基稳定条件(见第 4 章)。不等式(12.36)中的 $\dot{\delta}_0$ 取决于动力修正冲量的大小, 按照式(12.27)量 $\dot{\delta}_0$ 的这个不等式可以用来估计章动角的最大值或者相反。

下面再研究第二种特殊情况, 即作用在弹上的动力修正冲量使得 $t = t_k + 0$ 时 $\dot{\nu} = 0, \dot{\delta} = 0, \delta = \delta_0$ 。于是按照(12.30)式在初瞬时有 $2h_2 = 2f_{40}\cos\delta_0$ 。记 $\Delta_0 = 1 - \cos\delta_0, s = \alpha^2 - f_4, s_0 = \alpha^2 - f_{40}$, 则不等式组(12.32)就可写成如下形式:

$$\begin{aligned} 4s - 2f_{40}\Delta_0 + 2\Delta(f_{40} + 2f_4) &> 0; \\ 4f_{40}\Delta_0[2(2s - f_{40}\Delta_0) + \Delta(8(2s - f_{40}\Delta_0) \\ &\quad (2s_0 - f_{40}\Delta_0 + f_{40} + f_4) - 4f_{40}^2\Delta_0)] \\ &\quad + \Delta^2 8(f_{40} + f_4)[4s - 2f_{40}\Delta_0 - (f_{40} - f_4)] \\ &\quad + \Delta^3 8(f_4 + f_{40})^2 > 0; \\ \Delta[4f_{40}\Delta_0 + \Delta(4s - 2f_{40}\Delta_0) + 2f_{40}\Delta^2] &> 0 \end{aligned} \quad (12.37)$$

如果给定了修正冲量的值及相应的 Δ_0 值, 则可对 Δ 求解不等式组(12.37), 求出经修正后的章动角极限值。如果给出了允许的极限章动角, 也即给定了 Δ , 则可相对于 Δ_0 求解不等式组, 也即是确定允许的极限动力冲量。在一般起始条件下则必须直接求解方程组(12.29)。

§ 12.2 复杂外形战斗部和子母弹的弹道特性

12.2.1 具有可变弹道系数的运动

在计算与运载器(母弹)相比弹道系数增大的集束子弹^[44, 133]或

战斗部的弹道时得到由两段组成的弹道：第一段相应于运载器的运动，第二段相应于从运载器分离后的运动，并且子弹弹道计算的初条件应根据集束子弹分离时运载器的相坐标值以及考虑分离扰动和弹道系数突变等来确定。通常子弹的弹道系数远大于运载器的弹道系数，甚至可以超过后者一个数量级。

这样，我们就得到带有一次弹道系数改变的弹道计算方法。有的炮弹和火箭为改变射程而装有在弹道末段开始工作的减速装置（例如降落伞、制动板），它们的弹道也可用与此类似的方法进行计算^[44, 128, 133]。

在设计集束弹时要解决的一个问题就是选择弹仓打开时间和确定战斗部散布特征与开仓点弹道参数以及战斗部从运载器分离时的扰动之间的关系。这个问题可用第 9 章中所述的方法解决，利用弹丸质心运动分析定性结果，我们将给出具有弹道系数突变的弹道散布计算问题的几何描述。

下面我们研究在重力、迎面阻力和空气升力作用下飞行器的纵向运动，这个问题就像关于滑翔机飞行的儒可夫斯基问题一样是十分著名的，在此假设下由飞行器的质心运动方程组(3.68)令 $P_x = P_y = X_p = Y_p = 0$ 就得如下方程：

$$\begin{aligned} 1) \quad \dot{V} &= -\bar{c}_x V^2 - g \sin \theta & 3) \quad \dot{y} &= V \sin \theta; \\ 2) \quad \dot{\theta} &= \bar{c}_y V - \frac{g}{V} \cos \theta & 4) \quad \dot{x} &= V \cos \theta \end{aligned} \quad (12.38)$$

式中

$$\bar{c}_x = \frac{\rho S}{2m} c_x \quad \bar{c}_y = \frac{\rho S}{2m} c_y$$

先研究一下方程(12.38)中的头两个方程，令 $\bar{c}_x = \text{const}, \rho(y) \approx \rho(y_{cp}) = \text{const}$ ，就可以认为它们与其它两个方程无关，即有

$$\dot{V} = -\bar{c}_x V^2 - g \sin \theta \quad \dot{\theta} = \bar{c}_y V - \frac{g}{V} \cos \theta \quad (12.39)$$

为寻找方程组(12.39)的奇点，对 V 和 θ 求解如下方程

$$\bar{c}_x V^2 + g \sin \theta = 0 \quad \bar{c}_y V - \frac{g}{V} \cos \theta = 0$$

由此得知此方程组(12.39)有三个奇点,设其坐标为 $(V_{*i}, \theta_{*i}) (i = 1, 2, 3)$

$$\begin{aligned} V_{*1} &= 0 & V_{*2} &= 0 & V_{*3} &= \sqrt[4]{\frac{g^2}{\bar{c}_x^2 + \bar{c}_y^2}}; \\ \theta_{*1} &= \frac{\pi}{2} & \theta_{*2} &= -\frac{\pi}{2} & \theta_{*3} &= \arctg(-\bar{c}_y/\bar{c}_x) \end{aligned} \quad (12.40)$$

为了确定奇点的类型及在奇点邻域中相应相轨线的性态特征,将方程(12.39)在每个奇点的邻域中线性化并求出线化方程组特征方程的根。线化方程组如下:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta V}{dt} &= a_{V\theta}\delta\theta + a_{VV}\delta V \\ \frac{d\delta\theta}{dt} &= a_{\theta\theta}\delta\theta + a_{\theta V}\delta V \end{aligned} \quad (12.41)$$

式中

$$\begin{aligned} a_{V\theta} &= -g\cos\theta_* & a_{VV} &= -\bar{c}_x 2V_* & a_{\theta\theta} &= \frac{g}{V_*}\sin\theta_* \\ a_{\theta V} &= \frac{g\cos\theta_*}{V_*^2} & \delta V &= V - V_* & \delta\theta &= \theta - \theta_* \end{aligned}$$

方程组(12.41)的特征方程有如下形式:

$$a_{V\theta} + (a_{VV} - a_{\theta\theta})\lambda - a_{\theta V}\lambda^2 = 0 \quad (12.42)$$

根据量

$$(a_{VV} - a_{\theta\theta})^2 + 4a_{\theta V}a_{V\theta} = V_*^2(\bar{c}_x^2 - 4\bar{c}_y^2) \gtrless 0 \quad (12.43)$$

的符号不同,将得到方程(12.42)不同的根以及在该奇点邻域中积分曲线不同性态的定性图画。将(12.40)式表示的 V_{*i} 和 θ_{*i} 值代入到系数 $a_{V\theta}, a_{VV}, a_{\theta\theta}$ 和 $a_{\theta V}$ 的表达式中,就得到相应于每个奇点的特征方程(12.42)的根。由此可以证明,前两个奇点是鞍点(二根为实数,符号相反),它们在相空间中的位置与参数 \bar{c}_x, \bar{c}_y 无关,因而也就不随这些参数的改变而改变。第三个奇点 (V_{*3}, θ_{*3}) 的类型,它在相空间中的位置及在其邻域中相轨迹的性态特征则完全取决于参数 \bar{c}_x 和 \bar{c}_y 的值。

分析表达式(12.43)可以看出,参数 (\bar{c}_x, \bar{c}_y) 被由方程 $|\bar{c}_x| = |2\bar{c}_y|$ 确定的分界线分成两个域,如果 $\bar{c}_x^2 > 4\bar{c}_y^2$ 则方程(12.42)的根

是不相同的实根,奇点 (V_{*s}, θ_{*s}) 是结点;如果 $\bar{c}_x^2 = 4\bar{c}_y^2$,则奇点是退化结点;如果 $\bar{c}_x^2 < 4\bar{c}_y^2$ 则第三个奇点是焦点,当 $\bar{c}_x = 0$ 时第三个奇点则是中心。

在图 12.2 上表明了不同参数 \bar{c}_x 和 \bar{c}_y 情况下系统相空间结构划分图。在 9 个可能的相轨迹图中,第 6~9 个相图是相应的第 1~4 个相轨迹图的镜像反射,这实际上表示了升力作用线方向(或飞行器攻角的符号)改变。方程(12.39)的右边是 θ 的周期函数,这表示 (V, θ) 值和 $(V, \theta + 2\pi)$ 值所相应的是动力系统的同一状态。因此取圆柱表面作为这个系统的相空间是较方便的,在此表面上沿母线放置速度 V ,而沿方向放置角度 θ 。在这种情况下,图 12.2 上的相空间是角度在 $-\pi \leq \theta \leq \pi$ 变化的圆柱展开面,这种动力系统就称为具有圆柱相表面的系统。

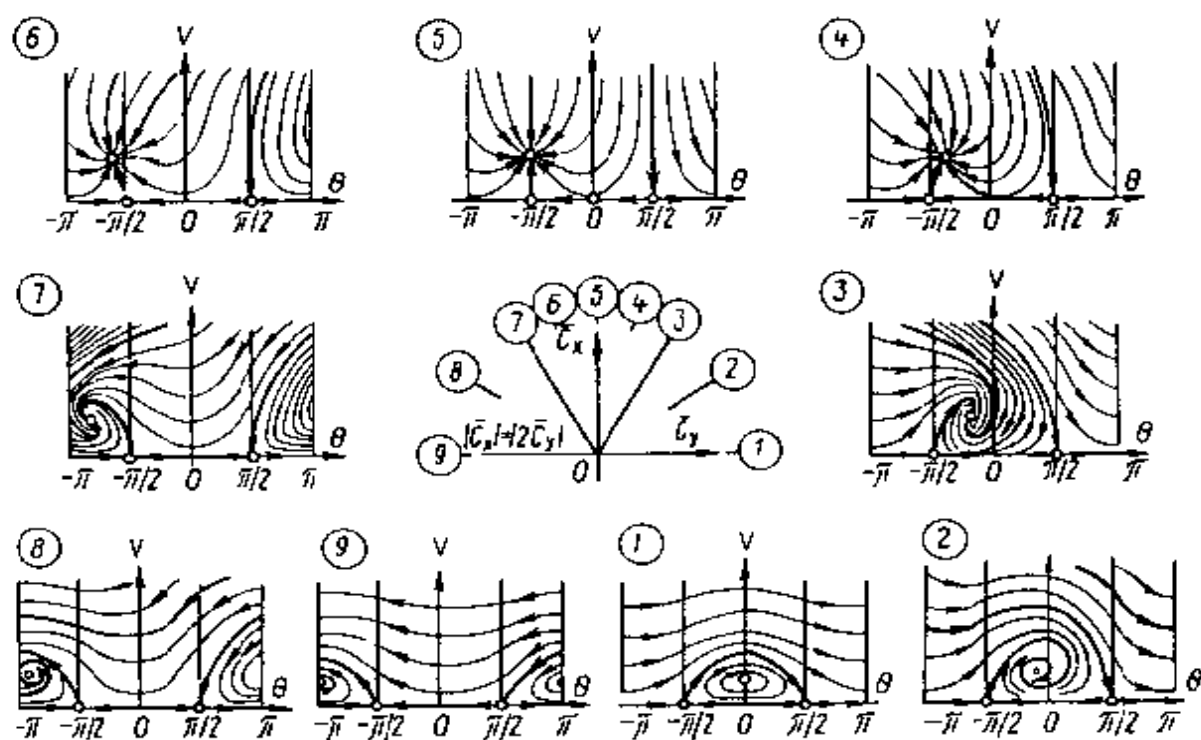


图 12.2 当参数 \bar{c}_x 和 \bar{c}_y 改变时,方程组(12.36)相空间可能的结构划分

对于与普通炮弹相应的 $\bar{c}_y = 0$ 的情况,弹道上相圆柱的划分如图 12.3 所示。

如果再考虑方程组(12.3)中的第三和第四个方程,则可在三维相空间 (V, θ, y) 和 (V, θ, x) 中描述在固定起始初速 $V = V_0$ 及坐标 $x_0 = y_0 = 0$ 情况下相轨迹的特征。在图12.4上对于 $0 \leq \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$ 的不同射角画出了此情况下得到的三维相空间中的相表面。

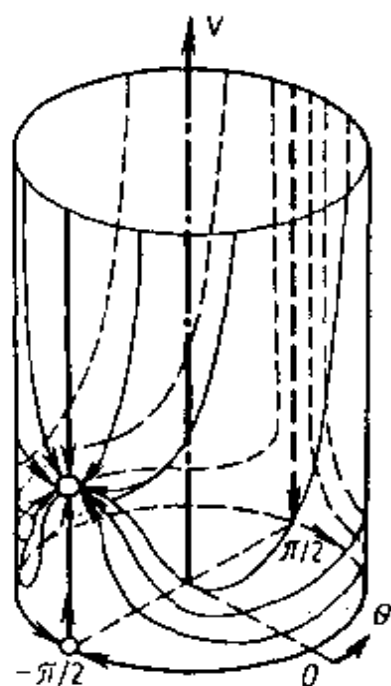


图 12.3 圆柱表面上的相轨迹图

终止于“山”峰的相轨线(图12.46)与最大射程 X_{\max} 的相轨线相应,而它的起点就确定了在给定初速 $V = V_0$ 条件下的最大射程角。运载器和子弹质心的运动由方程组

(12.38) 确定,描述子弹“在运载器内”以及从运载器分离以后运动的总的相轨迹图由相应系统的相图叠加而成。子弹在从弹仓中抛出瞬时的相坐标值由运载器的相坐标值确定,例如可以认为准确地以零相对速度分离。这样,直到分离瞬时,所描述的相点都处在由运载器动力参数确定的稳定结点域内,而在分离后它的运动则由稳定的奇点 $(V_{*3cy0}, \theta_{*3cy0})$ 确定。与(12.40)相应的这些奇点的位置则由 $V_{*3} = \sqrt{g/\bar{c}_x}$ 确定,这里 $\bar{c}_x = \frac{\rho S}{2m} c_x$,并且由于 $\bar{c}_{x_{cy0}} > \bar{c}_{xH}$,故对于子弹和运载器则有 $V_{*3cy0} < V_{*3H}$ 。

战斗部落点的散布与运载器起始值 V_{0H} 和 θ_{0H} 的散布以及它的弹道系数的散布有关,弹道系数与标准值的小偏差只引起奇点 (V_{*3H}, θ_{*3H}) 沿 $\theta = -\frac{\pi}{2}$ 直线的小移动(见图12.5),而 V_0 和 θ_0 值的散布则在运载器弹道散布中起主要作用。设在起飞瞬时运载器坐标 x_0 和 y_0 是准确知道的,在 $(V - \theta)$ 平面上(见图12.5)我们在 (V_0, θ_0) 点的邻域内取面积 Π_0 ,它的范围表示初始条件与计算值之间的可能偏差; $(V_0 - 3\sigma_{V_0}, V_0 + 3\sigma_{V_0})$ 和 $(\theta_0 - 3\sigma_{\theta_0}, \theta_0 + 3\sigma_{\theta_0})$ 。面积 Π_0 中的每

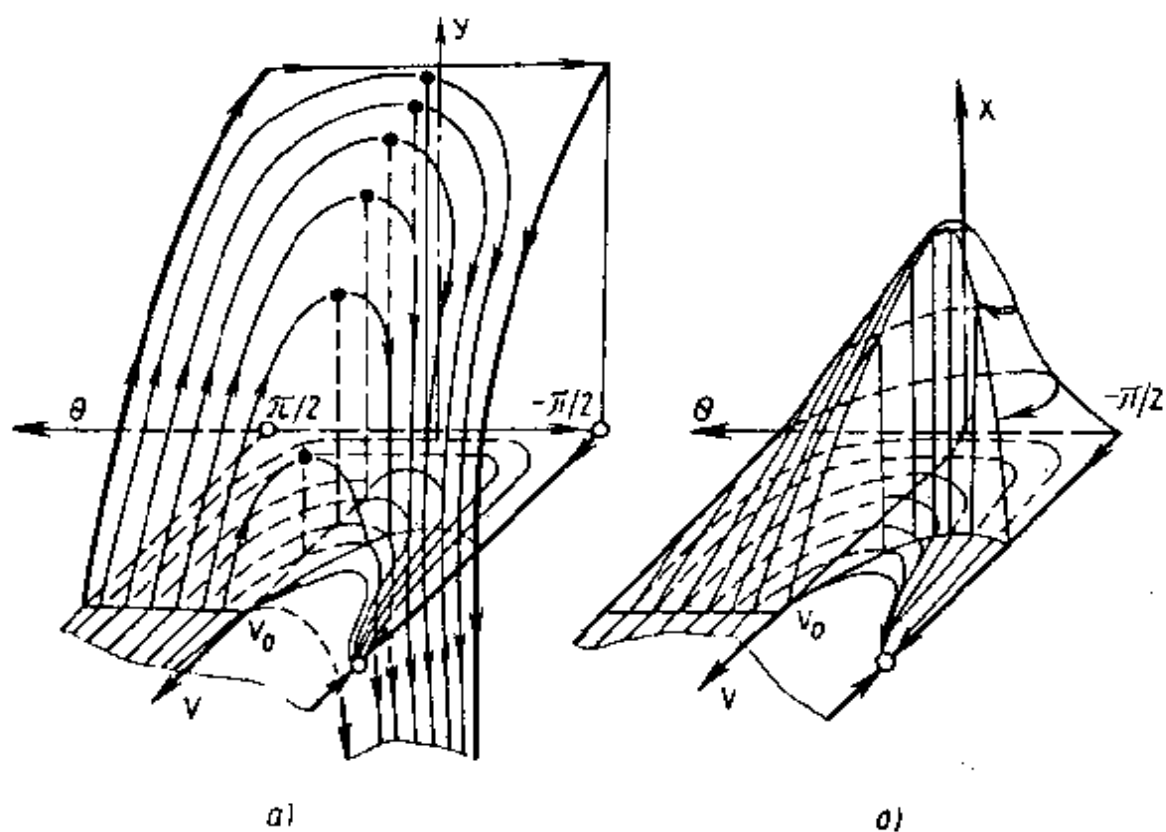


图 12.4 在三维相空间中系统(12.38)的相轨迹
(a) 在坐标系 (V, θ, y) 中; (b) 在坐标系 (V, θ, x) 中。

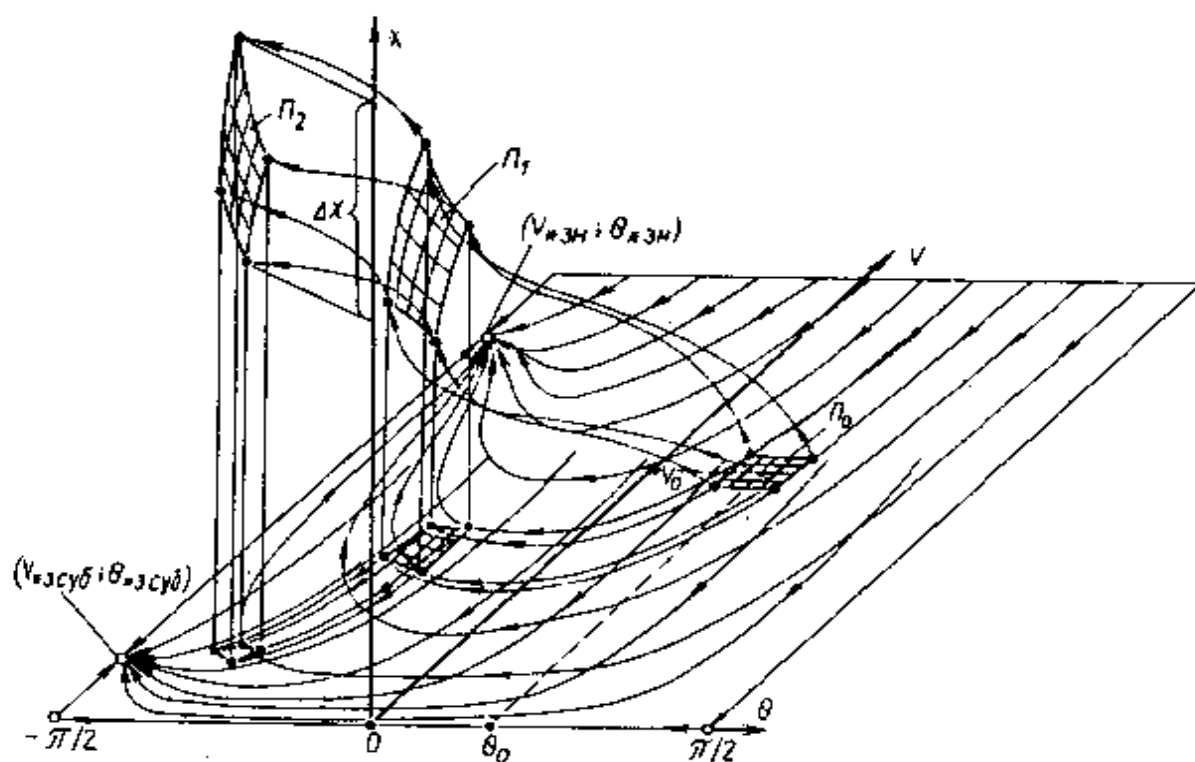


图 12.5 在具有可变弹道系数的情况下,弹丸运动的相轨迹特征

个点沿自己的相曲线运动直到弹仓打开的瞬时 t_1 。相轨线的集合与系统的相流相应,并确定了从 Π_0 到 $t = t_1$ 时的 Π_1 表面的转换(见图 12.5)。在分离后子弹飞行的时间内,确定子弹本身运动的相流将表面 Π_1 转换到 Π_2 。

无论是子弹从运载器分离以前或分离以后, V 和 θ 的变化特征都由稳定的结点 (V_{*3H}, θ_{*3H}) 和 $(V_{*3cy0}, \theta_{*3cy0})$ 来决定。因而全系统的相流总的来说是沿 V 和 θ 轴压缩(见图 12.5),而沿 X 轴伸展。显然,最小散布将相应于 Π_0 沿 X 轴、以量 Δx 表示的最小伸展。因此可以提出关于选择弹仓打开时间的问题,这个时间应保证对于所需的子弹飞行距离使量 Δx 最小,而 Δx 最小是可以利用改变子弹弹道系数(它决定了奇点 $(V_{*3cy0}, \theta_{*3cy0})$ 的位置)以及开仓时间来达到的。

12.2.2 高速非对称战斗部弹道的确定

战斗部元件以高速抛射^[44,133]可以引起元件形状的改变,计算这种元件的弹道就应考虑到它的外形不对称,这是引起弹道散布的又一个原因。

在战斗部元件高速飞行的情况下,实际上最重要的是引起沿弹道的飞行时间小于它相对赤道轴特征振动的周期,并且元件既可以是静稳定的,也可是静不稳定的。在这种情况下,非对称的外形使得在初瞬时元件的空气动力轴与速度矢量不一致,因此在计算这种元件的弹道时必须考虑非零等价攻角及其相应升力的存在。

在这种情况下质心的运动可用方程组(12.38)描述,我们利用无因次变量

$$\bar{V} = V/V_0, \quad \bar{x} = x/l, \quad \bar{y} = y/l, \quad \bar{t} = t/\tau \quad (12.44)$$

式中 $\tau = l/V_0$; $l = 2m/c_x \rho S$, 可将它转换成无因次形式(在以下的运算中略去无因次记号“ \sim ”)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{V}} + \bar{V}^2 &= -\varepsilon \sin \theta & \dot{\bar{x}} &= \bar{V} \cos \theta \\ \dot{\theta} - k\bar{V} &= -\varepsilon \cos \theta & \dot{\bar{y}} &= \bar{V} \sin \theta \end{aligned} \quad (12.45)$$

在方程组(12.45)中 $k = c_y/c_x$, $\varepsilon = G/X_0 = mg/(c_x \frac{\rho V_0^2}{2} S)$ 是在初瞬时战斗部元件对迎面阻力的相对重量。考虑到战斗部元件的高速度,

知方程(12.45)中的 ϵ 是小参数,这就允许我们用小参数渐近方法对它求解^[79]。

未知函数 $V(t, \epsilon), \theta(t, \epsilon), x(t, \epsilon), y(t, \epsilon)$ 可以表示成小参数 ϵ 的幂级数

$$\begin{aligned} V(t, \epsilon) &= V_1(t) + \epsilon V_2(t) \cdots +; \\ \theta(t, \epsilon) &= \theta_1(t) + \epsilon \theta_2(t) \cdots +; \\ x(t, \epsilon) &= x_1(t) + \epsilon x_2(t) \cdots +; \\ y(t, \epsilon) &= y_1(t) + \epsilon y_2(t) \cdots + \end{aligned} \quad (12.46)$$

我们先看一下方程组(12.45)的头两个方程,将其右边分解成泰勒级数而左边代入相应的分解式(12.46),令方程两边 ϵ 相同阶的项相等,得到求解 $V_1, V_2, \theta_1, \theta_2$ 的方程组:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 + V_1^2 &= 0; \\ \dot{\theta}_1 - kV_1 &= 0; \end{aligned} \quad (12.47)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 + 2V_1V_2 &= -\sin\theta_0 + \theta_0\cos\theta_0 - \theta_1\cos\theta_0; \\ \dot{\theta}_2 - kV_2 &= -\cos\theta_0 - \theta_0\sin\theta_0 + \theta_1\sin\theta_0 \end{aligned} \quad (12.48)$$

在起始条件 $t=0$ 时 $V_1=1, \theta_1=\theta_0$ 下积分方程组(12.47)得

$$V_1 = \frac{1}{1+t} \quad \theta_1 = \theta_0 + k\ln(1+t) \quad (12.49)$$

考虑到方程(12.43),方程(12.48)的第一个方程具有如下形式:

$$\dot{V}_2 + \frac{2}{1+t}V_2 + k\cos\theta_0\ln(1+t) = -\sin\theta_0 \quad (12.50)$$

此方程的一般解可写成如下形式:

$$V_2 = e^{-\int \frac{2}{1+t} dt} \int [-\sin\theta_0 - k\cos\theta_0\ln(1+t)] e^{\int \frac{2}{1+t} dt} dt + Ce^{-\int \frac{2}{1+t} dt} \quad (12.51)$$

积分上式并由起始条件 $t=0, V_2=0$ 确定常数 C ,最后得

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{3} \left[\sin\theta_0 - \frac{k}{3}\cos\theta_0 \right] \left[\frac{1}{(1+t)^2} - (1+t) \right] \\ &\quad - \frac{k}{3}\cos\theta_0(1+t)\ln(1+t) \end{aligned} \quad (12.52)$$

以类似的方式求解方程组(12.48)的第二个方程,得

$$\begin{aligned}\theta_2 = & \left[-\cos\theta_0 + \frac{k^2}{3}\cos\theta_0 - k\sin\theta_0 \right]t + \frac{k}{3} \left[\sin\theta_0 - \frac{k}{3}\cos\theta_0 \right] \\ & \left[\frac{t}{1+t} - \ln(1+t) \right] - \frac{k^2}{3}\cos\theta_0(1+t^2)\ln(1+t) \\ & + k\sin\theta_0(1-t)\ln(1+t)\end{aligned}\quad (12.53)$$

再研究方程组(12.45)中的第三个和第四个方程,按照(12.46)式,像前面一样将右边的三角函数分解成泰勒级数,得到确定未知量 x_1, x_2, y_1, y_2 的方程组

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= aV_1 + bV_1\theta_1; \\ \dot{y}_1 &= cV_1 + dV_1\theta_1\end{aligned}\quad (12.54)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= aV_2 - bV_1\theta_2 - bV_2\theta_1; \\ \dot{y}_2 &= cV_2 + V_1\theta_2 - dV_2\theta_1\end{aligned}\quad (12.55)$$

式中

$$\begin{aligned}a &= \cos\theta_0 + \theta_0\sin\theta_0 & b &= \sin\theta_0 \\ c &= \sin\theta_0 - \theta_0\cos\theta_0 & d &= \cos\theta_0\end{aligned}$$

考虑到(12.49)式,在初始条件 $t=0, x_1=0, y_1=y_0$ (设战斗部元件飞行距离的数值是从某个 $y_c \neq 0$ 的高度上开始沿 x 方向量出的),积分方程组(12.54)得

$$x_1 = \cos\theta_0 \ln(1+t) - \frac{k}{2}\sin\theta_0 \ln^2(1+t) \quad (12.56)$$

$$y_1 = y_0 + \sin\theta_0 \ln(1+t) + \frac{k}{2}\cos\theta_0 \ln^2(1+t) \quad (12.57)$$

方程组(12.55)的一般解为

$$x_2 = aI_1(t) - bI_2(t) - bI_3(t) \quad (12.58)$$

$$y_2 = cI_1(t) + I_2(t) + dI_3(t) \quad (12.59)$$

式中

$$I_1(t) = \int_0^t V_2(t)dt \quad I_2(t) = \int_0^t V_1(t)\theta_2(t)dt \quad I_3(t) = \int_0^t V_2(t)\theta_1(t)dt$$

所引入的积分 I_1, I_2, I_3 相应地由以下表达式确定:

$$\begin{aligned}I_1(t) = & -\frac{1}{6} \left[\sin\theta_0 - \frac{k}{3}\cos\theta_0 \right] \frac{t^2(t+3)}{1+t} \\ & - \frac{k}{3}\cos\theta_0 [(1+t)^2 \ln(1+t) - t]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2(t) &= \left[\frac{k^2}{3} \cos \theta_0 - \cos \theta_0 - k \sin \theta_0 \right] [t - \ln(1+t)] \\
&\quad + \frac{k}{3} \left[\sin \theta_0 - \frac{k}{3} \cos \theta_0 \right] \left[\ln(1+t) - \frac{t}{1+t} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \ln^2(1+t) \right] - \frac{k^2}{3} \cos \theta_0 [(1+t)^2 \ln(1+t) - t] \\
&\quad + k \sin \theta_0 [(1+t) \ln(1+t) - t] \\
I_3(t) &= -\frac{1}{6} \theta_0 \left[\sin \theta_0 - \frac{k}{3} \cos \theta_0 \right] \frac{t^2(1+3)}{1+t} \\
&\quad - \frac{k}{3} \theta_0 \cos \theta_0 [(1+t)^2 \ln(1+t) - t] \\
&\quad - \frac{k}{3} \left[\sin \theta_0 - \frac{k}{3} \cos \theta_0 \right] \cdot \\
&\quad \left[\frac{t}{1+t} (t - \ln(1+t) - (1+t)^2 \ln(1+t) + t) \right] \\
&\quad - \frac{k}{3} \cos \theta_0 \left[\frac{1}{2} (1+t)^2 \ln^2(1+t) + \ln(1+t) + t \right]
\end{aligned}$$

这样,如果只限于取级数分解式(12.46)的两个一次项,则战斗部元件的弹道参数将由以下式子确定:

$$\begin{aligned}
V(t, \varepsilon) &= \frac{1}{1+t} + \varepsilon \frac{1}{3} \left[\sin \theta_0 - \frac{k}{3} \cos \theta_0 \right] \left[\frac{1}{(1+t)^2} - (1+t) \right] \\
&\quad - \varepsilon \frac{k}{3} \cos \theta_0 (1+t) \ln(1+t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta(t, \varepsilon) &= \theta_0 + k \ln(1+t) + \varepsilon \left[\frac{k^2}{3} \cos \theta_0 - \cos \theta_0 - k \sin \theta_0 \right] t \\
&\quad + \frac{k}{3} \left[\sin \theta_0 - \frac{k}{3} \cos \theta_0 \right] \varepsilon \left[\frac{t}{1+t} - \ln(1+t) \right] \\
&\quad - \varepsilon \frac{k^2}{3} \cos \theta_0 (1+t)^2 \ln(1+t) + \varepsilon k \sin \theta_0 (1+t) \ln(1+t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x(t, \varepsilon) &= \cos \theta_0 \ln(1+t) - \frac{k}{2} \sin \theta_0 \ln^2(1+t) \\
&\quad + \varepsilon (aI_1 - bI_2 - bI_3);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(t, \varepsilon) &= y_0 + \sin \theta_0 \ln(1+t) + \frac{k}{2} \cos \theta_0 \ln^2(1+t) \\
&\quad + \varepsilon (cI_1 + I_2 + dI_3)
\end{aligned} \tag{12.60}$$

所得到的解(12.60)足够精确地描述了系统(12.45)在时间间隔 0

$< t < 1/\epsilon$ 内的运动。利用(12.44)式还可将方程(12.60)中的无因次变量转换成有因次相坐标。

方程(12.45)的解可以简单地在电子计算机上用数值方法求得,但从分析非对称战斗部元件散布的观点讲,在确定各个动力学参数和空气动力参数对弹道相对于标准值的偏差的影响时,(12.60)式更受欢迎一些。

12.3.3 非对称子弹的运动

本节研究非旋转子弹从弹仓抛出后的运动。如果对称弹在空气中以零章动角运动,则总空气阻力沿其几何轴方向,或相应地沿固连坐标系纵轴的方向。在存在由壳体和子弹产生的外形不对称时,总空气动力将沿空气动力轴方向。一般情况下该方向与纵轴方向不一致(见8.3.2节)。因此,由非对称性形成的章动角将产生空气动力的法向分量。设相对于质心的运动已经建立,并且角 δ_{1a} 和 δ_{2a} 的平衡值由非对称性确定,则根据方程组(3.166)可将质心运动方程写成如下形式:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -g \sin \theta - V^2 \bar{c}_m (1 + k \delta_a^2); \\ \dot{\theta} &= -g V^{-1} \cos \theta + V \bar{c}_N \delta_{2a}; \\ \dot{\Psi} &= V \bar{c}_N \delta_{1a}\end{aligned}\quad (12.61)$$

式中 $\delta_a = \sqrt{\delta_{1a}^2 + \delta_{2a}^2}$, k 是确定诱导阻力的系数; \bar{c}_m 是零章动角下的阻力系数。

在小章动角 δ_a 情况下,迎面阻力系数增加不多,故空气动力非对称对速度大小的改变不大,将方程组(12.61)中的第一式与第二式相比

$$\frac{V \bar{c}_N \delta_{2a}}{g V^{-1} \cos \theta} = \frac{\rho V^2}{mg} \cdot \frac{S}{\cos \theta} \bar{c}_N \left[\frac{V}{a} \right] \delta_{2a}$$

由此可以估计出空气动力对速度矢量方向改变的相对影响。显然,非对称的相对影响正比于速度的平方,并且系数 \bar{c}_N ($\bar{c}_N \sim c_a^2$) 越大这种影响越大,但子弹质量越大,空气动力非对称的相对影响越小。子弹

相对于质心的运动与它从弹仓中抛出时扰动的强度有关。在振荡运动中相对于赤道轴旋转运动的过渡过程曾在第2章中对于静力矩与攻角(章动角)成正弦关系的情况作过研究(见图8.18~8.19),在实际中,当子弹长细比较小时可以观察到它尾部向前稳定飞行的情况。对于不绕纵轴旋转的子弹,在一定的静力矩与攻角关系下,例如在攻角 $\alpha = \pi$ 的某个邻域里它是静稳定的,这种情况是可以发生的。

作为例子,我们研究图12.6所示的静力矩系数 $m_z(\alpha)$ 或 $m_y(\beta)$ 关系。在考虑了自然阻尼后,系统相应的相轨迹图如图12.66所示。在这种情况下奇点 $\alpha = \pi, \alpha = 0$ 是稳定的焦点,并且确定了子弹尾部向前运动的稳定奇点($\alpha = 0, \alpha = \pi(1 + 2n)(n = 0, \pm 1 \dots)$)的相空间吸引域比确定了子弹正确飞行的奇点($\alpha = 0, \alpha = 2n\pi(n = 0, \pm 1 \dots)$)的相空间吸引域要小,因此在大多数初始条件下子弹能正确稳定地飞行,只有在个别初始条件下才出现“尾部向前”的运动。

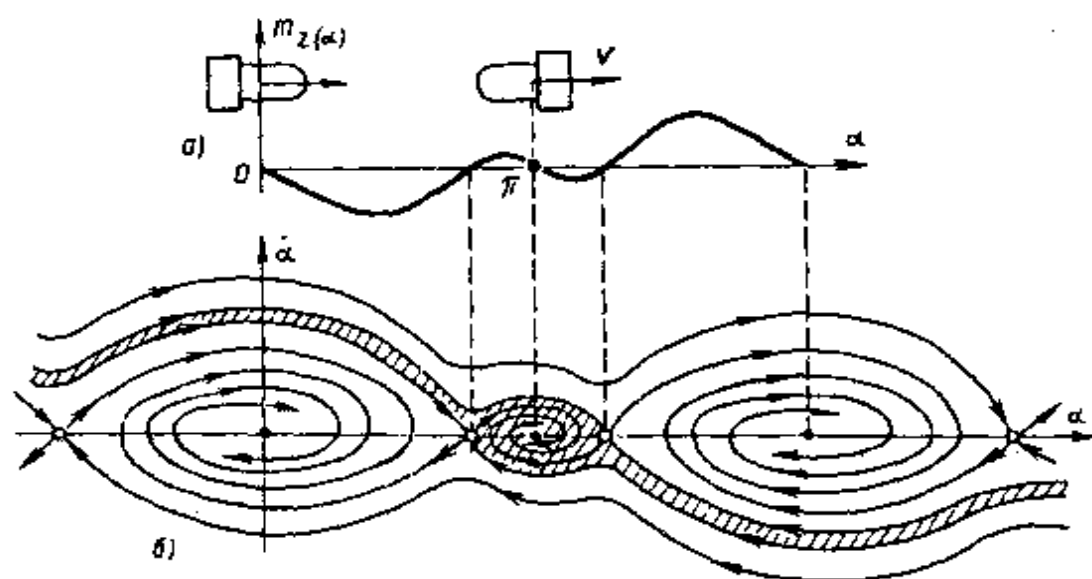


图12.6 物体稳定在尾部向前飞行中的可能性

a) 可能的 $m_z(\alpha)$ 关系; b) 系统的相轨迹图

加工的工艺误差以及子弹抛出时壳体和稳定器的变形都可以引起空气动力非对称的发生,在这种情况下,在 $\alpha = \pi$ 处稳定焦点的位置可能有不大的移动,例如平衡状态稳定在 $\alpha = \alpha_s < 0$ 和 $\alpha = \alpha_s <$

π 处,此时相轨迹图大致不变。

子弹外形和质量的不对称也可以是为了在弹道上形成某种形式的角运动而故意制造的,这时攻角和侧滑角可以很大,并使质心运动特征发生本质变化。

在某些情况下要求形成子弹纵轴相对于速度矢量一定形式的运动,例如为了在固定坐标位置的目标区域里进行地区扫描,我们研究一下为此而利用非对称子弹稳定共振旋转的特点。为了保证子弹以很大的攻角和侧滑角共振旋转,必须要保证子弹的动力学参数和空气动力参数(m_x, m_x^*, c_y^a, m_z^*)以及非对称参数($\alpha_a, \beta_a, \Delta y, \Delta z$)满足一定的关系(见 8.3.3

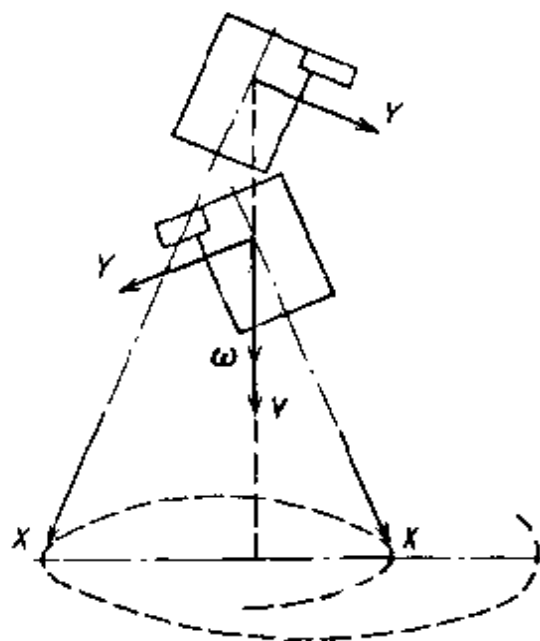


图 12.7 在共振旋转状态下非对称元件的角运动

节)以产生位于共振峰斜坡上、确定共振旋转的稳定奇点(见图 8.15)。

这时(见 8.3.2 节和图 8.12)就产生了阻力面固定在弹体坐标系内的“月球运动”,由于固连坐标系本身又以角速度 ω_x 旋转,故在弹道坐标系内这种形式的运动将相应于子弹纵轴绕速度矢量作圆锥运动(精确到具有章动振幅 ρ_2 的振动)(见图 12.7)。

在子弹质心沿着接近于铅直降落的弹道运动时,子弹纵轴就实现了所需要的(扫描)角运动(见图 12.7)。

如果子弹关于纵轴和赤道轴的惯量矩很接近,则倾斜角速度的临界值将与子弹俯仰和偏航角的特征振动频率 ω_c 不同,因为根据(8.109 式)

$$\omega_{kp} = \omega_c \left[1 - \frac{I_x}{I} \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{qSl|m_z^a|}{I - I_x} \right]^{\frac{1}{2}}$$

在 I 与 I_x 接近时, ω_{kp} 将比 ω_c 大得多。

检查题

1. 列举引起飞行中火箭和炮弹扰动的原因。“小扰动法”的前提是什么?修正系数(弹道导数)改变表示着什么?为什么弹道导数是按所需要的参数计算而不是按扰动运动参数计算?试确定修正系数 $\frac{\partial x_c}{\partial \theta_H}, \frac{\partial x_c}{\partial m}, \frac{\partial x_c}{\partial h_0}, \frac{\partial x_c}{\partial W_x}$ 的符号。等时变分 and 全变分的相同之处和不同之处在哪里?列举确定弹道导数的方法。
2. 阐述风如何影响无控火箭和炮弹的飞行,给出弹道平均值的定义。
3. 火箭运载器运动对火箭和炮弹飞行的影响是通过什么因素和参数表现出来?写出相对于与发射器固连的坐标系、并且不考虑空气动力作用时的火箭动力学方程。解释动不平衡和静不平衡的概念。弹丸质心的径向偏心如何影响初速偏差?
4. 描绘弹道管和散布椭圆,平均弹道和集束中心的位置。哪些特征数决定了散布的大小?其中哪些是较通用的量?
5. “影响矩阵”法的本质是什么?有什么用途?写出模拟大气扰流场纵向分量的成形滤波器方程。
6. 将由试验结果确定散布特征的计算方法以数列的图形表示出来。
7. 说明试验射击的目的,通常推荐将试验射击误差归为哪一类。
8. 写出在修正段上,在沿弹丸纵轴方向作用的脉冲修正力作用下弹丸质心运动的动力学方程,列出决定子母弹子弹散布的基本因素。给出弹形非对称对质心弹道影响的定性特性。

第四部分 实验外弹道基础,射击试验和射表编制

第十三章 实验外弹道的基本任务和方法

弹道试验的方法,所使用的测试装置及测试结果处理的方法取决于被试炮弹和火箭的结构和试验目的。外弹道试验可分为两类——在实验室里用专门的发射装置或身管武器进行的射击试验以及在靶场对火箭、火炮进行的综合试验。

由身管武器及火箭发射的射击旨在测定射击的初始条件、确定射击的射程和落点散布特性。

在新型火箭和其它飞行器的制造和加工过程中,最后阶段是进行飞行试验,其目的是为了获得火箭整体及单个部件工作情况的最完整的信息。

任何一个新产品都要通过三种形式的试验——检验试验、使用试验和验收试验。

第一种试验用于检验安装在火箭上的各个系统的功能以及火箭在整体上的飞行质量。

使用试验用于检验火箭的使用质量,其目的是为了评估新产品的作用效率。

验收阶段飞行试验的最终和最基本的目的是确定火箭特性是否符合技术要求。

为了获得关于产品特性必须的、可靠的信息,测试结果的处理成了弹道试验最重要的组成部分。测试信息量大、对信息处理质量要求高,所要求的快速求解时间之短——所有这一切都要求在试验时广泛使用现代化的电子计算机。因此,为了组织火箭飞行试验,不

仅需要建立外弹道测量系统,而且需要建立快速自动处理这些高价值信息的系统。

因为进行试验(特别是飞行试验)的费用高,故对试验预先进行优化设计是十分现实的问题。这种设计应在考虑到产品用途,所用测试设备完善情况以及其它一系列因素的条件下保证产品整个加工周期的综合要求。

§ 13.1 弹道靶道上的试验

13.1.1 弹道靶道的一般特点

弹道靶道是具有专门设备的测试综合体,用于进行实物和模型(子弹、炮弹、火箭模型等)自由飞行动力学特性的试验。

靶道可分为空气弹道靶道、流体弹道靶道和固体弹道靶道,它们的差别在于其中的介质成分不同。

在空气弹道靶道(ABT)中,空气介质的密度可以是不变的(敞开式空气靶道),也可以是可变的(气压真空靶道)。当空气弹道设施用辅助设备按预先给定的特性形成迎着飞行器或其模型运动的介质流时,则称之为弹道管(风洞)。水弹道靶道是一种能让所发射的物体在水中自由运动的设备综合体。水弹道靶道在结构上可以做成水洞(井)形式,也可以做成水槽形式,第一种结构用于研究具有陡直弹道或急转弯弹道的发射体的运动,第二种结构用于研究具有微倾弹道的发射体的运动。固体弹道靶道里含有装填了固体介质的集装箱,这些介质的成分和结构与弹丸穿透障碍物时所遇到的介质(砂、混凝土、金属等)的结构和成分相同。根据组成介质的成分数不同可以分为单介质(一种成分)和多介质(多种成分)。除了结构特点不同外,各类靶道所共同具有的设备有:发射装置、记录装置(测试系统)、测试结果处理系统以及炮弹和模型的接收装置(受弹器)。

以下的一些实验外弹道问题是利用靶道来解决的最一般的问题:

确定由发射装置发射的物体的移动运动和转动运动的速度及其

它参数；

寻求作用在飞行中飞行器上的空气动力和力矩的气动系数；

研究飞行器的运动稳定性；

分析各种扰动因素(射击起始条件、级间分离、尾翼张开等)对飞行器运动参数变化的影响；

对上述问题求解的“统计采集”。

必须强调一下,上列问题并不是靶道中所可能进行的全部实验研究问题,因为其中尚未包括许多专门问题,如一簇物体运动的空气动力学问题,在前导物体尾流中运动的问题以及其它许多需要进行特别复杂和“精细”试验的问题。

靶道试验的明显优点是：

试验时,靶道中介质参数的控制比较简单；

测量精度高；

可以在较小的测量基地上、在运动物体的近旁完成测量和观察；

可在广阔的范围内改变介质的参数和被试物体(或其模型)的特征；

试验费用较少。

但同时也要清楚地认识到,靶道试验也有严重的缺点,这首先是：

所试验的飞行器模型较小；

在许多情况下不能模拟飞行器的实际运动；

试验中所使用的个别设施对模型在靶道中的运动有影响；

进行一次试验的时间很短而准备的时间很长。

上述引起“尺度效应”(模拟误差)的缺点,以及在揭示飞行器与介质和与某些技术设施相互作用中的不确定性,使得必须将飞行器设计成具有很大的强度储备量和其它特征储备量。因此靶道试验并不能取代所设计的武器样品在最重要的制造、加工和交付使用阶段的靶场射击试验和飞行试验。

13.1.2 弹丸速度的靶道测定

测定物体在弹道上运动速度的一个最普遍的方法就是测定物体通过一定长度 l 靶道段的时间 t , 在这种情况下再设速度是线性变化的, 则可用如下关系式

$$V = lt^{-1}$$

来计算所要求的、属于被测段中点的速度值(以米/秒为单位)见图(13.1)。

为了减小由平均速度产生的误差, 应使被测量弧段的长度 l 尽可能地小到测量仪器所允许的程度(从允许的时间测量误差出发)。从所述方法的实质很容易明白, 实现这个方法的测量仪器应由两个互

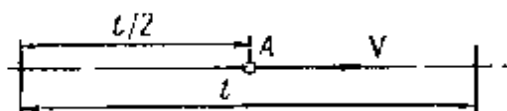


图 13.1 确定测量段上平均速度值的示意图

相关联的环节组成, 第一个环节是测时仪, 它用于测量物体通过弹道段的时间; 第二个环节是区截装置——它安置在所测弹道段的两端, 按信号依次启动和停止测时仪的记录装置。

目前靶道中最常用的测时仪是电子测时仪(ЭХ), 其工作原理是将需测的时间间隔与高频石英电信号振荡器(БКГ) 振荡周期之和进行比较来确定时间间隔的数值。图 13.2 为这种测时仪装置和工作的原理图。

在靶道测量所用的测时仪中, 采用能产生频率不低于 $f = 10^5 \text{ Hz}$ 电流的高频石英振荡器, 其振荡周期不大于

$$T = f^{-1} = 1 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

因为由高频石英振荡器振荡频率不稳所带来的误差不超过 0.01%, 故这种误差实际上可以忽略。

由被测时间间隔记录不准所造成的误差不会超过一个周期, 这是因为被测时间间隔的起点要么与振荡器脉冲一致, 要么在两个脉

冲间隔之间,故 $\Delta t = T$ 是电子测时仪在整个待测区间上误差的极限值。区截装置可采用静电靶、光电靶、惯性靶以及其它的区截靶。作为例子我们研究如下几种区截装置:

网靶(图 13.3)是一种平面靶,通常为矩形,靶的尺寸可随被测物体的口径 d 变化,靶框上按图中所示方式绝缘地缠绕着直径为 $d_{np} = 0.20 \sim 0.25\text{mm}$ 的细导线(金银线,也即铜丝线)。

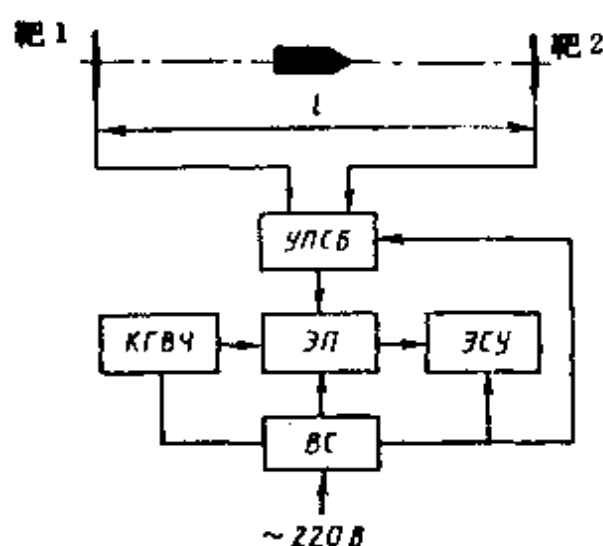


图 13.2 测时仪图

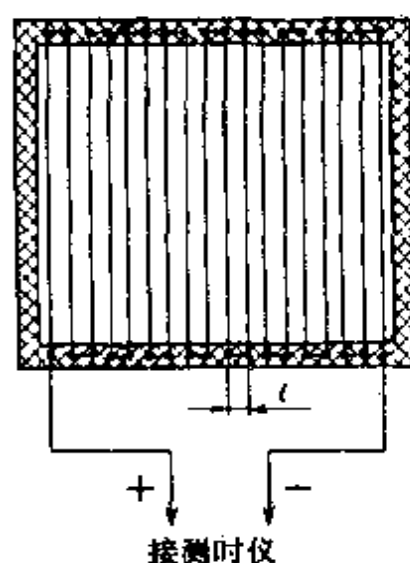


图 13.3 网靶图

网靶布置在靶道上,其靶面垂直于物体运动的弹道,靶上缠绕的导线应与测时仪(**Y ПСБ**)接通并供给直流电。在物体通过网靶平面时撞断靶的绕线,形成启动或中断测时仪的信号。

为了保证运动物体可靠地撞断网靶导线,两相邻导线线匝之间的距离 l_{np} 应满足 $l_{np} < 0.25d$,并且导线要以一定的张力缠绕,以减小导线向两侧分开或被拉长的可能性。为此,在测定小口径弹的速度时,将网靶导线糊在薄纸上。网靶在使用上有如下一些缺点,即每次测量后要恢复绕线的完好,此外每次撞断绕线导线的情况不一致,这必然会产生速度 V 的测量误差。

但尽管如此,由于网靶的简单性和可靠性,在进行射击时仍得到广泛的应用。

螺管线圈区截装置的敏感元件是两个装在金属套管中的线匝

(见图 13.4a),螺管线圈中的线匝被供给直流电以产生不变的磁通,当具有磁性的金属物体穿过螺管线圈时磁通发生改变(因为导磁率发生改变),于是在与电子测时仪 Ψ ПСБ 回路相连通的工作线圈内感应出电信号脉冲(见图 13.46)

这种信号是很微弱的,因此需在电子测时仪 Ψ ПСБ 线路中将其稳定下来,然后变换成具有陡直前沿的信号,以便启动电子测时仪的电子启动装置。

螺管线圈区截装置有许多优点:

可以长期多次使用,这是因为对于恢复它的完好性不必作任何操作;此外,不影响所研究物体的飞行并能给出准确的、相同的物体通过螺管平面的时间记录。

但采用螺管线圈区截装置必须要用磁化弹进行射击,这使测时仪装置复杂化。

近年来由于有了快速响应光电元件,故对于实验室弹道靶道已开始广泛采用光电区截装置($\Phi\Theta\Delta Y$),图 13.5 所示即为光电区截装置分离部件简图,它由灯管(Γ),快速响应光电元件($\Phi\Theta$)和具有电子闸流管的三级放大器组成。

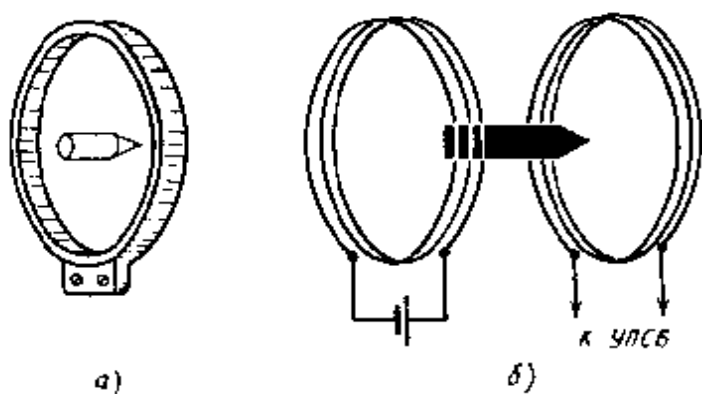


图 13.4 螺管线圈区截装置

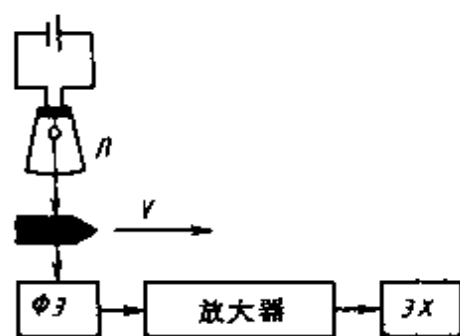


图 13.5 光电区截装置
分离部件简图

当弹丸模型在灯管与光电元件之间通过时,光线被切断,引起光电元件照度的瞬时改变,于是产生了电信号,电信号经放大后触发电

子继电器的闸流管,闸流管输出的脉冲加到电子测时仪(ЭХ)上,启动或中断测时仪的记录装置。

最现代化的光电区截装置是带有挠性光导管的高速光电区截装置(ФЭБУ)。高速光电区截装置可产生一个垂直于模型运动弹道的“光平面”,在这里光平面是由光源 ИС(也即由所提供的直流电)和各挠性光导管(ГС)输入窗口之间的光通量形成。光导管安放在伸向光源一侧的两个阻光板之间的支架内(见图 13.6),收集成一束的光导管与光敏元件 Φ 相连,并将模型飞过“光平面”瞬时的信息传到光敏元件上^[106]。

我们看一下光电区截装置的优缺点:它比螺管线圈区截装置复杂和昂贵,这使其应用范围变窄,但同

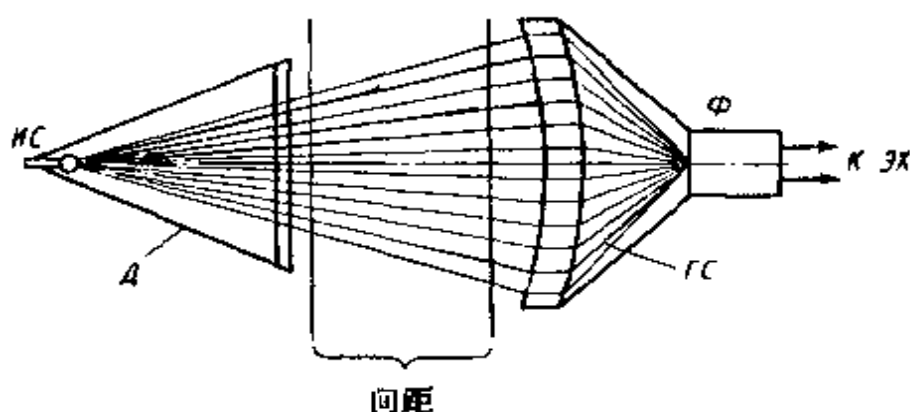


图 13.6 具有挠性光导管的光电区截装置

时任何不透光材料做成的模型都可以有效地工作,而最重要的是,由它所产生的、确定模型飞过瞬时的“光平面”引起测量基线的误差可以不超过十分之几毫米。

因此,甚至在长度仅为 100 ~ 300mm 的测量基线上确定模型的速度也可以达到很高的精度,因而从本质上简化了确定模型或物体运动速度的问题。由高质量光电区截装置 ФЭБУ 和高分辨率电子测时仪 У ПСБ 组成的测试系统通过试验数据确定速度的最大相对误差可以不超过万分之一。

在测量身管火炮初速时,区截装置沿弹道的布置如图 13.7 所示。这时,距离 l 按上述各种考虑来选取,而第一区截装置离开弹丸射出点的距离 l_0 应使从发射装置排出的燃气对它没有影响,但通常不超过 20 ~ 30m(在用靶框区截装置的情况下),所测得的弹丸平均

速度 $V_{cp} = V$ 可认为是两靶之间中点上的速度。为了将此速度转换到炮口截面,也即为了确定初速 V_0 ,需利用由适于平直弹道的假速度分析方法所求得公式:

$$D(V) - D(V_0) = cx \quad (13.1)$$

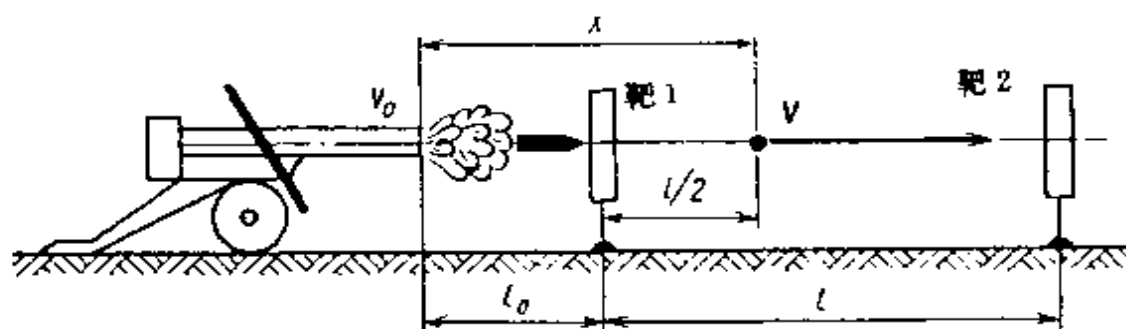


图 13.7 用于确定初速的图

对于所研究的特殊情况,可将速度变化与函数 $D(V)$ 变化之间的关系取作线性关系,于是得到如下比例式:

$$\frac{D(V) - D(V_0)}{V - V_0} = \frac{\Delta D(V)}{10} \quad (13.2)$$

式中 $\Delta D(V)$ 是相应于自变量 V 改变 10m/s 函数 $D(V)$ 的改变量。记 $V - V_0 = \Delta V$, 并比较 (13.1) 和 (13.2) 式得

$$\frac{\Delta D(V)}{10} \Delta V = cx$$

代入弹道系数的表达式,则得到将速度转换到炮口截面的修正量

$$\Delta V = \frac{id^2}{Q} \times 10^4 \frac{x}{\Delta D(V)} \quad (13.3)$$

式中 x 是炮口截面至弹道区截段中点间的距离(见图 13.7)。 i 是被试弹丸(或子弹)的弹道系数。

相应于西亚切函数的 $\Delta D(V)$ 值可按文献[118]中的表 3.1 取值,利用 43 年标准阻力定律可以给出更精确一些的结果。

在研究物体高速运动的实验工作中,为了更精确地确定运动速度常采用摄影方法。在空气弹道靶道(ABT)中,摄影法是利用专门的仪器实现的,这些仪器在经过严格确定的时间间隔上以很小的曝光量将运动物体摄影在有基准读数系统(也即坐标网格)的背景上,在

根据摄影底片测出物体的空间坐标及相应的时间(精确到微秒)后,就可以以万分之一的精度计算出运动速度。

与此同时,对于超声速运动物体的摄影还可以获得物体绕流的流谱,它能给出伴随物体运动而发生的物理现象的丰富信息。根据照片可以确定接近物体表面临界点的激波脱体,激波的形状,在物体表面上声波脱离点的位置等。即使对物体运动速度未作专门的测量,也可通过这些信息来估计物体的运动速度。当然,这时速度估计的精度要比上面所研究的方法低一些。

在物体以超声速运动时,一般在它的前方形成弯曲激波,这种激波在离开物体的远方衰减成弱扰动波(声波),它与运动方向线倾斜成角度

$$\mu = \arcsin \frac{1}{M} \quad (13.4)$$

式中 M 为马赫数。

在紧靠运动物体附近,激波的形状取决于物体的形状、马赫数和气体比热比 $k = c_p/c_v$ 。因此,利用任何一种摄影系统将环绕物体的激波记录下来并知道进行试验时气体状态的特征(也即 a, c_p, c_v)后,原则上就可以计算出速度。但 M 数(或速度 V)与激波形状之间的关系仅对于一些简单形状的物体——如楔形、锥形等具有解析式。

图 13.18 表示在圆锥形物体绕流情况下的激波形状,在此处激波具有圆锥形形状,激波倾角为 θ_c ,倾角 θ_c 可以通过处理圆锥绕流图谱来确定。

为了根据已知的激波倾角计算圆锥物体的运动速度,可利用如下的近似关系式:

$$M \sin \theta_c = 1 - \cos \beta_k + \left\{ 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \sin^2 \beta_k \right\}^{1/2} \quad (13.5)$$

式中 β_k 是物体的半锥角。按此公式在足够宽的 M 和 β_k 数值范围内进行计算所给出的速度 V 的误差为 5%。对于 $k = 1.4$,也即对于空气,用下面的公式也给出大致相同的精度:

$$M = (\sin^2 \theta_c - 1.2 \sin^2 \beta_k)^{-1/2} \quad (13.6)$$

利用更复杂的分析方法,还可以根据绕流的倾角求得圆锥体的运动速度,但这种方法的精度不高却很复杂。

任何一种形状的钝头体在以超声速运动时所形成的头部激波都将在离开头部的某个距离上脱体。在最简单的情况下,物体前沿与激波波阵面之间的距离就像激波形状一样取决于物体头部形状、马赫数和气体比热比 $k = c_p/c_v$ 。因而根据照片上的激波脱体也可以确定物体的速度。用来进行激波脱体研究的钝头体通常选球体、半球体、椭球体等。

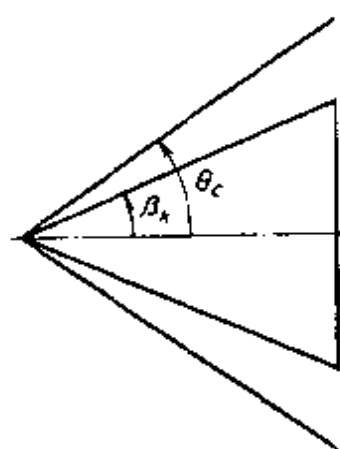


图 13.8 在锥体绕流情况下的激波形状

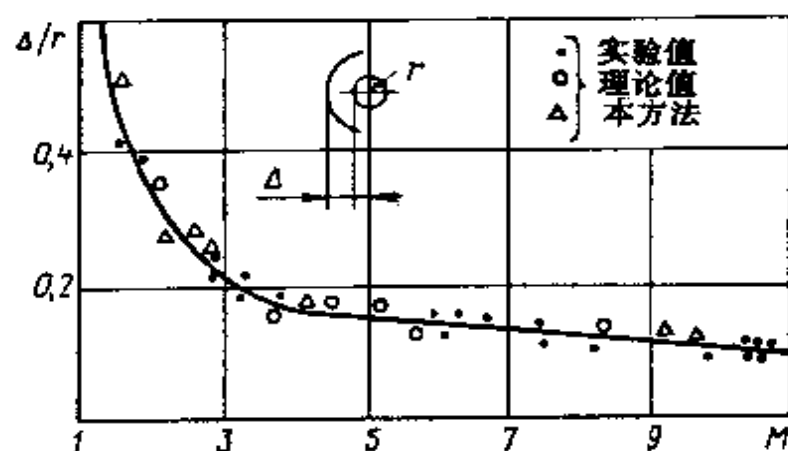


图 13.9 Δ/r 作为马赫数函数的图形

众所周知,在 $\theta_0 = 90^\circ$ 处测得的头部激波脱体可以通过气体的相对压缩表现为垂直波(也即正激波)的波阵面。

最著名的关系式有谢尔宾(Сербин)提出的关系式

$$\bar{\Delta} = \frac{2}{3}(\bar{\rho} - 1)^{-1} \quad (13.7)$$

谢依伏(Сейф)提出的关系式

$$\bar{\Delta} = 0.78\bar{\rho}^{-1} \quad (13.8)$$

和阿姆伯罗吉(Амброзио)与沃尔特曼(Уортман)提出的关系式

$$\bar{\Delta} = 0.52(\bar{\rho} - 1)^{-0.861}$$

式中 $\bar{\Delta} = \Delta/\bar{\rho}$ 为在一倍球半径 r 处测得的波的相对分离量, $\bar{\rho} = \rho/\rho_\infty$ 为气体密度在激波上的相对变化。

这几个关系式在 k 和 $\bar{\rho}$ 变化相当宽广的范围内都是正确的,最

通用的是最后一个关系式,它在马赫数变化很大的范围内都是适用的。对于 $k = 1.4$,只有在 $M < 1.1$ 的情况下误差才大于 4%。

因此,在知道了球的半径并从照片上测得激波脱体量 Δ 后,利用 (13.7) ~ (13.9) 式就可算出量 $\bar{\rho}$ 。而对于压缩正激波, $\bar{\rho}$ 又以如下关系式与马赫数单值相关

$$\bar{\rho} = 6M^2 / (5 + M^2)$$

利用此法算出的数据,以及其它的理论和实验数据就可以建立起 $\bar{\Delta}(M)$ 的图线(见图 13.9)。按激波相对分离量 $\bar{\Delta}$ 就可以相当精确地确定马赫数以及物体运动速度 V 。

类似地也可建立半球体以及具有不同半轴比的椭球体相应的 $\bar{\Delta}(M)$ 曲线。

13.1.3 由靶道射击确定迎面阻力系数

在弹道靶道中为测定阻力系数 $c_{x_a}(M)$ 进行试验时,通常使弹道测试段实际上是水平的,其目的是为了排除重力做功(见图 13.10),于是根据动能变化规律得

$$\frac{m}{2}(V_1^2 - V_2^2) = \int_{s_1}^{s_2} X_a ds \quad (13.10)$$

式中 $s_2 - s_1 = L$ 是测定迎面阻力平均值 $X_{a_{cp}}$ 的测量段的长度,在此段上 $X_{a_{cp}}$ 取为常数,于是有

$$X_{a_{cp}} = \frac{m}{2} \cdot \frac{V_1^2 - V_2^2}{L} \quad (13.11)$$

由试验数据获得的 $X_{a_{cp}}$ 应对应于被试体的一定速度值,一般以平均速度 $V_{cp} = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$ 作为这个速度值。为了从迎面阻力 $X_{a_{cp}}$ 换算出空气阻力系数,要利用如下关系式

$$X_{a_{cp}} = S \frac{\rho V_{cp}^2}{2} c_{x_a} \left[\frac{V_{cp}}{a} \right] \quad (13.12)$$

式中 ρ 和 a 是进行试验时相应的空气密度和声速, S 是物体的特征面积。比较 $X_{a_{cp}}$ 的表达式 (13.11) 和 (13.2), 得

$$\frac{m}{2} \left[\frac{V_1^2 - V_2^2}{L} \right] = S \frac{\rho}{2} \left[\frac{V_1 + V_2}{2} \right]^2 c_{x_a} \left[\frac{V_{cp}}{a} \right]$$

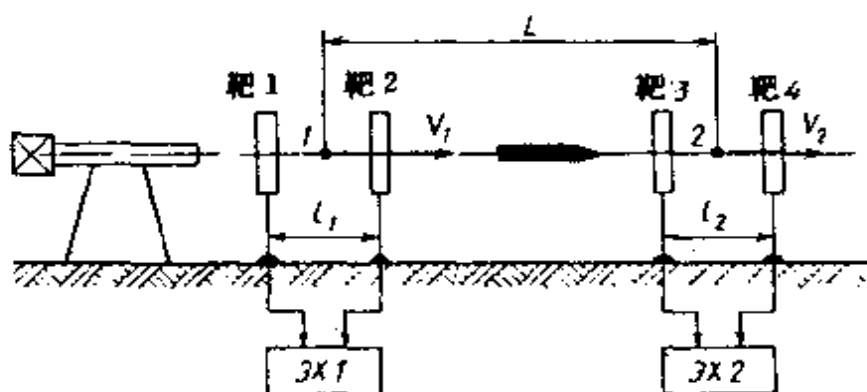


图 13.10 在水平弹道段上用射击法测定阻力系数 $c_{x_a}(M)$

由此求得 $c_{x_a}(M)$ 为

$$c_{x_a}\left(\frac{V_{cp}}{a}\right) = \frac{4m}{SL\rho} \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2} \quad (13.13)$$

合并所有的常量和比例系数,最后得

$$c_{x_a}\left(\frac{V_{cp}}{a}\right) = 5.09 \frac{Q}{d^2 L \Pi} \cdot \frac{V_1 - V_2}{V_1 + V_2} \quad (13.14)$$

式中 d 为物体特征面积的直径, Π 是空气比重。

在计算以上公式中的量时应选如下的量纲: Q —— 牛顿, d —— 毫米, L —— 米, Π —— 牛顿 / 米³, V —— 米 / 秒。对于另一种气压 h —— 毫米汞柱和气温 t °C, 空气比重 Π 以公斤 / 米³ 为单位的值, 由相应的比重表查取。

在测量 c_{x_a} 时, 基线长度应选择得使 X_a 有正确的平均值, 同时又保证物体有显著的速度降, 以获得必要的计算精度^[33]。在实验室条件下, 当靶道长度受到限制时可以取基线长为几十米, 这取决于物体运动速度 V 和测时仪的性能。

13.1.4 法向力和翻转力矩系数的确定

翻转力矩 $K_M(V/a)$ 和升力 $K_N(V/a)$ 气动函数也可以根据射击结果测定, 为此在试验中应测出弹丸旋转运动诸元 $\delta, \dot{\delta}, \nu, \dot{\nu}, r$, 然后用相应的计算公式确定这两个气动系数。

在弹丸沿靶道运动过程中测定其角位置的方法有两种,一种是在两个互相垂直的平面上对其摄影;另一种对纸靶进行射击。在第一种方法里,弹丸纵轴相对于质心运动方向的姿态角从照片上确定。在第二种方法里可以通过测量在专门加工的薄纸板上的弹孔来获取这些角度,当弹丸纵轴与速度矢量线一致时纸靶上的弹孔是圆形;如果章动角 $\delta \neq 0$,则弹孔为椭圆形(见图 13.11)。椭圆长轴与铅直线轴之间的夹角即为进动角。在已知弹丸的尺寸后,根据椭圆轴的长度 a 和 a_1 就可确定章动角 δ 。

当在章动角变化的每个周期上确定弹丸姿态的截面数量足够多时,就可以获得试验曲线 $\delta = f(\nu)$ 。在测定弹丸姿态的截面之间安装区截装置就可以测得弹丸通过相应截面的时间,这样就可以建立试验关系

$$\delta = f_1(t) \quad \nu = f_2(t)$$

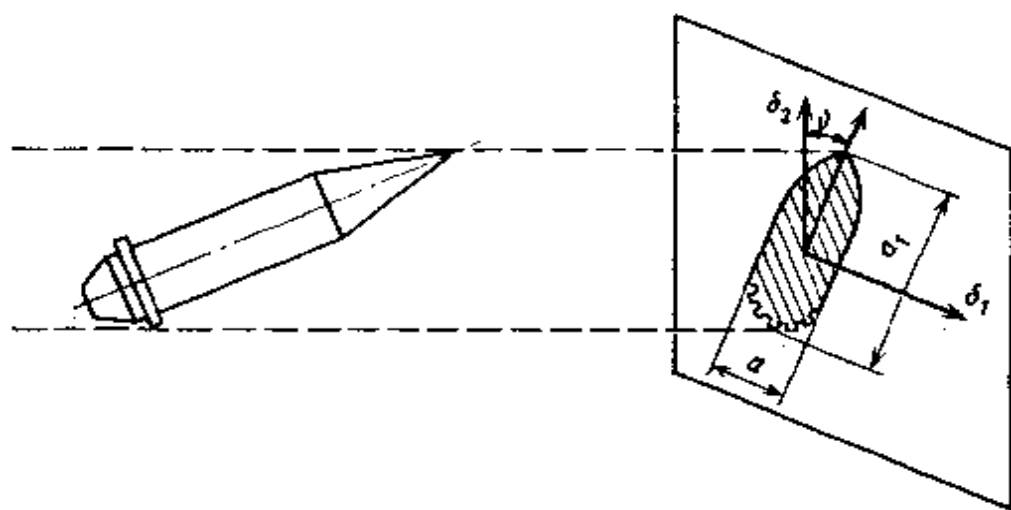


图 13.11 在对纸靶射击时章动角的确定

对于陀螺稳定弹在弹道起始段以小章动角(小于 $10^\circ \sim 15^\circ$)运动的情况,正如过去曾讲过的那样(见第 8 章),章动运动方程具有如下形式:

$$\delta = \dot{\delta}_0 (\alpha \sqrt{\sigma})^{-1} \sin \alpha \sqrt{\sigma} t$$

式中 α 为进动角速度,可以取为常量,即 $\alpha = \frac{1}{2} A^{-1} C \dot{\varphi}_0$,而在沿靶道

运动的情况下,取陀螺稳定因子 σ 等于它的平均值,即 $\sigma = \sigma_{cp}$ 。

于是由章动运动方程不难确定它的半周期

$$\frac{T_s}{2} = \frac{\pi}{\alpha \sqrt{\sigma}} \quad (13.15)$$

由(13.15)式得

$$\sigma = \frac{4\pi^2}{\alpha^2 T_s^2}$$

再考虑到 $\alpha^2(1 - \sigma) = \beta$,则

$$\beta = \alpha^2 \left[1 - \frac{4\pi^2}{\alpha^2 T_s^2} \right] \quad (13.16)$$

将含有参数关系的表达式代入(13.16)中得

$$\frac{d^2 h}{gA} \times 10^3 H(y) V_{cp}^2 K_{M_{cp}} \left[\frac{V_{cp}}{a} \right] = \frac{c^2 \pi^2 V_0^2}{A^2 \eta^2 d^2} - \frac{4\pi^2}{T_s^2}$$

在空气弹道靶道中射击时可以认为 $H(y) = 1$,于是在所测量的一段弹道上和 $V = V_{cp}$ 条件下得

$$K_{M_{cp}} = \left[\frac{V_{cp}}{a} \right] = \frac{\pi^2 g}{d^2 h V_{cp}^2 10^3} \left[\frac{c^2 V_0^2}{A \eta^2 d^2} - \frac{4A}{T_s^2} \right] \quad (13.17)$$

关系式(13.17)中的 T_s 值可根据试验曲线来取。而 h 值取为常数,它可用经验公式算出,其中最简单的公式是高巴尔公式的简化关系式:

$$h = h_1 - \frac{1}{3} h_r$$

式中 h_1 是弹丸质心至卵形部起点的距离, h_r 是卵形部长度。

更复杂的、但更全面反映弹丸参数并保证对各种弹丸试验数据一致性好的公式应是下面的公式

$$h = (W - S_b l_u) d^{-2}$$

其中 S_b 是弹丸底部面积, l_u 是弹丸底截面至重心的距离, W 是弹丸体积, d 为口径。

$K_M \left[\frac{V}{a} \right]$ 函数值表是对于完全确定的 h 值计算方法而编制的,故需专门地说明(见第1章)。

在靶道射击条件下确定法向力空气动力系数的方法也有两种:

在第一种方法里,为了计算空气动力系数 K_N ,需要进行两次射击,在第二次射击时使弹丸质心沿弹轴移动一个给定的距离,但不改

变弹丸几何外形；

第二种方法建立在根据所研究物体质心空间运动测量的结果，将含有关于量 K_N 信息的周期分量分离出来的基础上。

在这里我们仅限于简单地研究第二种方法的基础。

在法向力作用下，弹丸质心在铅直平面和侧向平面内的线位移用下面的关系式描写：

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{m_N \delta_{\max}}{2\beta} \left\{ -2\alpha \sqrt{\sigma} t - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \omega_1 t + \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right\}; \\ z_1 &= \frac{m_N \delta_{\max}}{2\beta} \left\{ \left[\frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \omega_1 t - 1 \right] - \left[\frac{\omega_1}{\omega_2} \cos \omega_2 t - 1 \right] \right\} \quad (13.18) \end{aligned}$$

分析关系式(13.18)可以得出结论：弹丸质心的运动是由一个非周期运动和角速度分别为 ω_1 和 ω_2 的两个周期性圆运动组成的复合运动。角速度为 ω_1 的周期运动的振幅比角速度为 ω_2 的圆运动的振幅要小，在实际上它对质心运动没有显著影响。

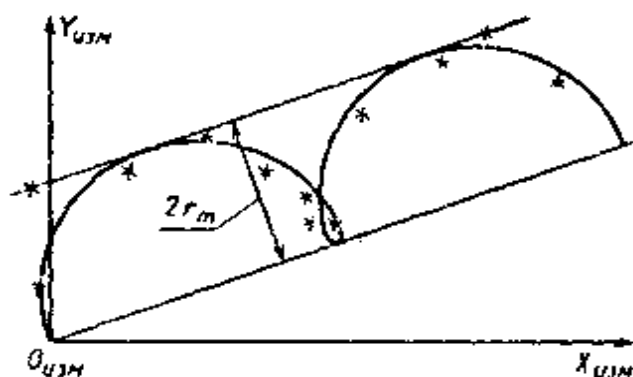


图 13.12 在垂直于速度矢量的平面内
弹丸质心运动的实验记录

当在不动坐标系 $O_{U3M} Y_{U3M} Z_{U3M}$ (图 13.12) 里记录质心运动时，可以分离出周期分量 $2r_m$ ，而

$$2r_m = \frac{m_N \delta_{\max}}{\beta} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

于是有

$$K_N = \frac{2\sigma r_m (1 - \sqrt{\sigma})^2 \alpha^2}{dl 10^3 V^2 \delta_{\max}} \quad (13.19)$$

按此式计算 K_N 的误差主要取决于参数 r_m 和 δ_{\max} 测量的误差。

在利用对纸靶射击的方法时，弹孔测量的绝对精度大约为 0.5mm，因此，如果射击时 r_m 值不大于 10mm，则它的误差将为 20%

或更大一些。考虑到对纸靶射击时测量 δ_{\max} 的误差为 $5\% \sim 10\%$, 则得出测定 K_v 的大约误差为 $25\% \sim 32\%$ 。采用在两个互相垂直的平面上照相的方法可以从本质上提高精度。

对纸靶的射击不仅可以确定系数 K_v 和 K_u , 在利用多参数拟合方法时, 由弹孔形状及其坐标也可以确定通常的气动函数, 但在这种情况下处理实验数据图形的工作就要复杂得多。

§ 13.2 靶场试验

13.2.1 根据靶场试验数据确定速度和迎面阻力系数

在靶场试验实践中常遇到发射装置(例如迫击炮)不能获得水平弹道的情况, 在这种情况下如再加上靶场的测量基线很长($200 \sim 400\text{m}$), 那么在用弹道射方法确定 c_{x_a} 时, 就需要考虑重力的影响。

对于所说的情况, 表达式(13.10)就有如下形式:

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = \int_{s_1}^{s_2} X_a \cos(X_a, s) ds + \int_{y_1}^{y_2} mg \cos(g, y) dy \quad (13.20)$$

考虑到 $\cos(\hat{X}_a, s) = \cos(\hat{g}, y) = \cos 180^\circ = -1$, 得

$$\frac{m}{2}(V_1^2 - V_2^2) - mg(y_2 - y_1) = \int_{s_1}^{s_2} X_a ds \quad (13.21)$$

利用对于弹道测量段迎面阻力“平均值”的概念, 得

$$X_{a_{cp}} = \frac{m}{2} \cdot \frac{V_1^2 - V_2^2 - 2g(y_2 - y_1)}{s_2 - s_1} \quad (13.22)$$

或者考虑到表达式(13.12), 最后得

$$c_{x_a} \left[\frac{V_{cp}}{a} \right] = \frac{4m}{S_M(s_2 - s_1)\rho} \cdot \frac{V_1^2 - V_2^2 - 2g(y_2 - y_1)}{(V_1 + V_2)^2} \quad (13.23)$$

但这种处理方法像过去研究过的在空气弹道靶道中确定 c_{x_a} 的方法一样, 其缺点是应用它只能得到对应于某个测量段平均速度那一点的待求系数的估值, 这就成为限制这种方法使用机会的误差源。

在这种意义下, 更有发展前景的方法是基于测定弹丸通过几个测量基点的时间来确定弹丸在待求点上速度的方法。在此方法里要

测定弹丸从炮口截面至弹道上彼此相距 h 的若干等间隔点的时间, 根据时间测量结果求出差值

$$\Delta t_{n-1} = t_n - t_{n-1}$$

然后由关系式 $\Delta t = f_1(s)$ 的数值微分得到函数 $f_2(s) = dt/ds$, 于是得 $V = ds/dt = f_3(s)$ 。有了函数 $dV/ds = f_4(s)$ 后就有可以求出 $c_{x_a} = f_5(s)$ 。对于所寻求的第 k 个弹道点有

$$|c_{x_a}|_k = \frac{2m}{\rho S_M V_K^2} \left[\frac{dV}{ds} + g \sin \theta \right]_K$$

或者考虑到

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dV}{ds} V$$

最后得

$$|c_{x_a}|_k = \frac{2m}{\rho S_M} \cdot \frac{1}{V_K} \left[\frac{dV}{ds} \right]_K + \frac{2Q}{\rho S_M V_K^2} \sin \theta_K \quad (13.24)$$

这个方法的优点是在一次试验中可以同时获得与 n 个确定速度值相对应的 c_{x_a} 值, 而其主要缺点是比较复杂并且必须对表格函数进行数值微分, 正如所知, 这必然会产生误差。

13.2.2 根据靶场射击的外弹道测量数据确定弹丸运动速度

为了确定弹丸运动参数(坐标、速度矢量、在个别情况下还有姿态角), 可利用设置于离运动物体一段距离的无线电和光学仪器进行外弹道测量(BTH)。

光学测量建立在光在一种介质中是直线传播这一性质的基础上。通常将光学设备分为两类:

一类具有可动光学部分和窄视场物镜(例如摄影经纬仪);

另一类具有不动光学部分和阔视场物镜(例如广角弹道照相机)。

光学测量系统是一种预定目视跟踪运动物体的测角装置, 其特点是所得的精度高、直观, 但光学测量只能在天气良好的条件下进行, 这就是它的很大缺点。

为了进行弹丸运动速度的外弹道测定,常采用摄影经纬仪方法。此法进行的是方位角测定,也就是用两台(或三台)摄影经纬仪同时对同一物体的运动进行跟踪,对它照相并测出它的角坐标(方位角和高低角),将其记录成时间的函数。通常有三个跟踪点,一个只起辅助作用,用于检查物体坐标的测定。此外,用三个摄影点同时跟踪还可以排除在锐角交会物体以及在逆光摄影情况下测量的偶然误差。

摄过影的底片上含有在跟踪过程中自动记录下来的、关于弹丸运动的基本信息。在每张底片上都有约定的、用于观测的经纬仪的编号,用于与时间进行联测对比的图片编号,用于确定主物镜光轴位置的坐标网格(或十字线),物体的图像以及测角标尺,在标尺上记录有用于确定主望远镜光轴方向的高低角和方位角的数值。

在摄影经纬仪的主望远镜“捕获”目标的瞬时,以及在跟踪高速移动目标的过程中,由于可能的操作误差,目标的图像与坐标网格的十字中心通常不一致,也就是说摄下的物体相对于望远镜光轴有了移动,为了在进行底片判读时能精确地确定它的角坐标,必须引进高低角和方位角的修正。修正量的符号取决于物体相对于坐标网格的配置。例如,如果物体位于第一象限,则角度修正量为正;如果在第三象限,则修正量必须从测角标尺的示度读出。

对摄影底片的判读是一种十分困难的工作,它包括对高低角和方位角测角示度的量取以及确定由于物体图像与摄影经纬仪光轴不一致产生的修正量。

从每张底片的测角标尺上读出方位角值 A_m 和 高低角值 ϵ_m , 以及由于物体图像与主望远镜(带有十字线中心)光轴不一致在此二角上产生的修正量(考虑符号) ΔA_m 和 $\Delta \epsilon_m$, 通常将它们记入专门的表格中,并同时算出方位角真值 $A_i = A_m + \Delta A_m$ 和 高低角真值 $\epsilon_i = \epsilon_m + \Delta \epsilon_m$ 。

根据用最小二乘法平滑以后的角 $A_i(t)$ 和 $\epsilon_i(t)$ 值,在已知基线 b (两摄影经纬仪之间的距离)时就可以计算出坐标 $x(t)$, $y(t)$ 和 $z(t)$ 的值。

火箭沿坐标轴 OX, OY, OZ 的运动速度分量可用数值微分法求得

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} \quad v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

总速度按下式计算

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

基于无线电作用原理上的外弹道测试仪器(BTH)具有更大的作用距离和更好的通用性。利用不同的无线电测量方法,可以测定运动物体到测量系统的斜距、至两个测量系统的距离差或距离和、径向速度以及速度矢量在所取坐标系里的方向余弦。在无线电系统里,距离的测量归结为发送信号与反射信号之间时间间隔的测量,物体通过的距离与这个时间间隔成正比。根据所采用的信号不同,这个时间间隔可用相位测量、频率测量或直接用所采用信号相对于基准信号的时间位移来估计。速度的测量主要是基于多普勒效应。

在实际中测量径向速度可用下面的方法进行:

- 1) 在从测量站到运动物体的方向上发射无线电波并接收反射波;
- 2) 在指向运动物体的方向发射无线电波,由安装在运动物体上的接收机接收,然后转发到测量站方向上;
- 3) 由运动物体发射无线电波,在测量站上接收。

第一种方案是最常用的,它适合于测量任何可以反射无线电波而其上又无任何附加仪器的物体的径向速度。

第二种方案失去了第一种方法的通用性,但它可用外形尺寸和功率都很小的收发机实现并具有更高的测量精度。

第三种方案中,测量系统的仪器组成比第二种简单,但多普勒频率偏移的大小及所收到的信号幅度受到限制。

根据所测得的多普勒频率改变只能确定物体的径向速度分量,为了确定物体的速度,还必须测出“测量站—物体”连线转动角速度以及从测量站到物体的距离。

13.2.3 确定物体角运动的磁测法

在靶场试验条件下要想把物体的姿态角记录在基准读数系统背景上,在绝大多数情况下实际上是不可能的,在这种情况下当需要获得关于角运动参数的信息时,只能要么采用专门设计的测试系统和仪器;要么采用现有的一些用于此目的系统和仪器,它们是测量物体在相应坐标系里角速度和角方位的测量仪(传感器)的综合体,最常见的这种系统便是陀螺仪系统。但在当前测试技术发展阶段,这种系统所具有的尺寸仍较大,还不可能用于测量小尺寸发射体的姿态角。它的另一个重要缺点就是抵抗在火炮身管中运动的试验弹丸高过载作用的能力差。由于有这些缺点,就迫使我们注意寻找那些相应没有这些缺点的测试系统,其中特别是建立在铁磁基础上的磁力计($\Phi 3M$)就属于这种系统。磁力计的工作原理是将被测磁场的强度换成成正比的电信号。单元磁力计只能测出磁场(B)强度的一个分量,为了确定矢量场,必须利用三个正交布置的磁力计。有了多元磁力计($\Phi 3M$)后就可以同时测得矢量 B 的几个分量。在利用单元磁力计时,测力计的输出信号可以表示成矢量点乘形式:

$$U = BU^0$$

式中 U^0 是仪器敏感轴方向的单位矢量,因此磁力计可以测量矢量 B 的分量。为了建立弹丸方位与输出信号之间的联系,必须在同一个坐标系中给出矢量 B 和矢量 U^0 (敏感轴的位置),可以选择沿相对于轴摆置的磁力计系统作为给出所说矢量的固连坐标系,以便直接测量飞行过程中飞行器的方位。

磁场强度的地区矢量应是高精度已知的,因为在计算 B 和 U^0 之间夹角时的误差直接与 B 的方向和模值的精度有关:

$$k = \arccos[(B \cdot U^0)B^{-1}] \quad (13.25)$$

在最原始的表示方法中,这个矢量通常在大地测量坐标系中以三个正交投影分量给出,这时为了适合在地球局部地区对它进行描述,广泛采用了各种函数的级数表示法,例如泰勒级数、第二类傅氏级数、球函数展开式、切比雪夫多项式等。

如果已知弹丸的动力力矩矢量 K , 则可以确定旋转弹正规进动锥的张开角、进动速度和其它运动参量。但必须注意, 矢量 K 在惯性空间中的方位只有当测量时间间隔内矢量 B 的方位不是一直不变的情况下才能用磁力计单值地测定, 这时须至少有三个非共面的磁场强度矢量的分量, 因而对基线长度的选择提出了相应的要求。

在大致估计了采用上述方法的可行性后, 必须强调指出, 这种方法原则上达不到采用陀螺仪测量所能达到的高精度, 特别是在测量小角度时更是如此。之所以精度不高是由于磁场强度参数不确定、磁测概念的方法误差、从被试体向地球传送信息的遥测系统内部噪声的存在以及测试仪器本身的仪器误差等因素所造成。

磁力计测量具有价格低、重量轻、在弹体承受高过载时工作可靠等优点。

13.2.4 飞行器模型运动识别基础

由以上对于在实验性靶场试验范围内所要解决的问题的分析可以得出结论, 在绝大多数情况下根据直接测量结果是不可能直接确定所需表征被试体状态以及它与外部介质相互作用的全部参数的。因此就产生了动力系统识别的提法和求解这个问题。通常将动力系统识别分成广义的狭义两种, 就广义的识别而言, 通常理解为确定被试体及其参数最优描述的形式、同构性、线性和定常性程度以及其它一些能确定对被试体原型规律性反映水平的基本性质。在本教科书里只在狭义上研究识别问题, 也就是要根据运动的空间-时间特征测量并利用先验的(试验前的)系统(客体)模型和(或)相应的研究过程来确定那些不可直接测得的运动参数、物体特征以及它与外部过程相互作用的过程参数。在这种情况下问题的原始提法就假定了可以根据模型试验数据获得全尺寸(实际)过程的结果。

考虑到具有独立意义的这个问题的复杂性, 在这里我们只限于研究它的一般数学表述。

设所研究的对象为实际(真实)飞行器的比例模型或实际模型, 其状态的数学模型已给定为

$$\frac{d}{dt}x(t) = F(t, x(t), \lambda(t)) \quad x(0) = x_0 \quad (13.26)$$

式中 $x(t)$ 是 n 维相坐标运动参数列向量; $x(0)$ 是需要确定的、系统 (13.26) 在 $t = 0$ 时的起始条件向量; $\lambda(t)$ 是待估计的(待识别的)客体参数、外部介质参数等; F 是表征与矢量方程 (13.26) 相应的状态微分方程右端结构的 n 维函数向量。

同时还设联系待测参数 $y(t)$ 向量与物体运动参数向量的关系式已知:

$$y(t) = C[t; x(t), N(t; x(t))] \quad (13.27)$$

方程 (13.27) 称为测量方程, 式中 C 是 p 维函数向量, 由它可以给出与方程 (13.27) 相应的标量方程形式。 $N(t; x(t))$ 是具有预先给定特征(统计的或确定的)的测量噪声分量的向量。

根据存在噪声时矢量 $y(t)$ 的测量结果, 获得矢量 $x(t)$ 在一定意义上的最优估计问题就归结为动力学滤波。尽管问题的名称与参数识别问题密切相关, 但后者还有另外的一些意义。

假设没有测量噪声, 也即 $N(t; x(t)) = 0$, 那么 $C[t, x(t)]$ 将是这样一种矢量, 在绝对精确的条件下它恒等于整个 ($p = n$) 测量参数矢量或测量参数的截短矢量 ($p < n$)。

注意到 (13.26) 式, 我们将需识别的矢量表示成

$$\Phi = [f_1, \dots, f_q]^T = [x_{10}, \dots, x_{n0}; \lambda_1, \dots, \lambda_m]^T; \quad q = n + m \quad (13.28)$$

通常运动特征的测量是在一些离散时间点 $t_i (i = 0, 1, \dots, k)$ 上进行的, 并且通常有不等式 $k > n$ 。

在寻求矢量 Φ 的估值时, 需引进某个品质判据

$$J(\Phi) = J[k; y(t_i; \Phi), C(t_i)] \quad (13.29)$$

式中 y 是在某个瞬时的被测参数向量; $y(t_i; \Phi)$ 是被测参数的计算值, 也即 $C(t_i)|_{N=0}$; $C(t_i)$ 是测量的权矩阵。

品质判据函数 (13.21) 形式的选择具有人为性, 但它的结构应反映所得估值接近待测量真值的要求。可提出如下等式

$$\partial J(\Phi) / \partial \Phi = 0 \quad (13.30)$$

$$\text{或} \quad J(\hat{\Phi}) = \min J(\Phi) \quad (13.31)$$

作为最优化条件,式中 $\hat{\Phi}$ 为向量 Φ 的估值。

在所研究的提法下,上述问题在一般情况下是非线性参数识别问题,它的解可用各种数值方法获得。

在问题的随机提法范围内,为了获得相应的估值须预先求得协变矩阵

$$K_{\Phi} = K_{\Phi} \left[\frac{\partial y}{\partial x}, p^* \right] \quad (13.32)$$

式中 p^* 是事先给定的概率,其值由所求解问题的特征以及所得到的结果必须具备的可靠性来确定。

以上所述对于任何动力学过程识别问题的求解都是正确的,与后一种情况相应,当提出根据模型试验数据求全尺寸飞行器运动特征时,矢量 $\hat{\Phi}$ 应作修正。矢量 $\hat{\Phi}$ 的变换建立在关于运动飞行器与外部介质相互作用时动力过程模拟的方法和相似理论的基础上^[99]。

根据对模型物体运动参数识别的结果求解真实飞行器状态的工作是基于检查是否满足对于全尺寸飞行器写出的(13.27)类型的等式来进行的。

§ 13.3 靶场弹道射

13.3.1 确定定起角的射击

定起角为弹丸通过炮口截面瞬时的速度矢量方向与射击前身管轴线之间的夹角。试验测定定起角的必要性与试验前求得的弹形系数、因而弹道系数的误差有关。通常这个误差不超过试验前计算出的弹道系数平均值的 20%, 尽管相应的误差值不大,但却可以明显地影响射角的真值。火炮口径、弹丸初速越大以及给定的射程越小则这种误差也越小。

在炮兵实践中通常根据射击结果分别测定铅直面和水平面内的定起角,为此要对设置在离火炮一定距离(约 100m) 上的立靶进行射击。

定起角的大小按两个角度之差计算

$$\gamma = \theta_0 - \varphi \quad (13.33)$$

式中 θ_0 为计算射角; φ 为射击时实际测得的高角。

高角 φ 用象限仪测定, 在象限仪经过校订和炮尾平台经过检测的条件下, 可以保证最大测量误差不超过 $1'$ 。

再根据测得弹孔对靶心坐标的统计处理结果, 就可以确定铅直方向和侧方向上一组弹孔中心坐标的数学期望。在靶距为 x 的靶上, 平均弹着点相对于靶心的高差就给出了角位移 φ_m 的正切值, 于是对于已知的 φ_m 和 ε 值 (ε 为立靶几何中心相对于炮口水平面的高低角) 有

$$\varphi = \varphi_m - \varepsilon - \varphi_{\text{外}} \quad (13.34)$$

θ_0 角的值按下式 (见第 6 章) 计算:

$$c^* x = D(V) - D(V_0) \quad (13.35)$$

$$\sin 2\theta_0 = \frac{1}{c^*} \left[\frac{A(V) - A(V_0)}{c^* x} - I(V_0) \right] \quad (13.36)$$

与前面提到过的先验确定弹道系数的极限相对误差值相应, 此公式的误差不超过 0.1 密位。速度 V_0 按 13.1.2 节中讲述的方法求得, 对标准空气密度的折算弹道系数 c 可用 $c^* = cH(y)$ 确定。

在这里还要指出, 定起角还可以在空气弹道靶道中以射击法测定初速 V_0 的过程中求得, 特别是对于小口径武器更为合适。为此应在第二个区截装置平面处布置画有瞄准点的靶 (按每次射击), 并且每次射击前火炮的装定是使沿炮尾和炮口截面十字线中心的直线对准靶上画出的瞄准点 (十字线)。由于存在定起角和重力引起的弹道降, 弹丸穿过靶后留下的弹孔离瞄准点有一定的距离。在这种情况下 γ 角可按如下关系直接算出

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{y}{x} + \frac{gx}{2V_0^2} \quad (13.37)$$

式中 y 是偏差的铅直分量。三角函数的代数符号也就是定起角的符号。

13.3.2 距离射和密集度射

进行距离射和密集度射击的目的是:

寻求在确定的弹道气象条件下弹丸飞行距离与射角之间的关系；

估计拟作为装备的一批武器弹药样品的综合特性。

在此情况下——组射击在同一射角下进行，射击的同时进行气象准备，在每个射角上气象探测的最大高度可以用近似给出的弹形系数查外弹道表预先求得。

距离测量应精确到 1m，同时还需记录下弹丸的初速（炮口速度）值。对于一定的 V_0 和 c ，关系式 $x_c = f(\theta_0)$ 是射表编制的主要材料。在所讲的关系式 $x_c = f(V_0, \theta_0, c)$ 中，泛函关系 $x_c = f(c)$ 尽管是不显著的，但它对确定 x_c 精度的影响还是很大的。由于弹丸旋转运动的特征与射角有关，因而在不变的初速下就有 $c = f(\theta_0)$ ；此外，由于实际的（特定的）迎面阻力系数并不是在全部飞行马赫数范围内都与标准阻力系数成正比，故 c 的大小还与空气阻力函数的值有关，由此可用实验方法建立起弹道系数随射角和初速变化的规律。弹道试验的实践证明，在射角为 $25^\circ \sim 50^\circ$ 范围内确定弹道系数的精度最高，并且为了以相同精度获得弹道系数，必须使不同射角 θ_0 上重复试验次数之比与在这些射角下获得的弹道系数的均方差之比相等。

密集度试验在从工业部门接收用于装备的整批弹药或样品时单独进行，甚至在本批次弹不是新弹而根据其生产数据可以详细说明其密集度特性的情况下，炮兵实践表明进行这种试验仍然是必要的。让我们研究一下进行这种试验的基本原则。首先讲一下射击密集度这个概念本身。在进行任何距离射时都要算出中间偏差 B_x 和 B_y ，因为 B_x 的值平均大于 B_y 一个数量级，故在实际上主要是要检查弹丸沿距离上的散布，不管射击距离多大以及进行射击的条件本身如何， B_y 不可能成为信息判据，因此表征散布的中间偏差应是距离中间偏差，这种关系就称为密集度。

再讲一下进行射击的条件问题，可以证明，在最大射程附近的射角进行射击时，对于给定射击距离上的密集度大小将只与弹道系数散布和初速的散布有关，因此在进行密集度射击时不仅要测落点的坐标，还必须同时测量初速并按初速值估计相应的中间偏差值。初眼

看来,在这种情况下为了提高所得结果的精度和可靠性,用提高射击数量的方法去作试验是合理的,但这个方法的优点只是表面上的。事情在于增加一组的射击数量时也增加了该组弹的射击时间,这同样导致射击条件(首先是天气)变化的概率增加,同时还由于身管的加热和磨损引起内弹道性能的改变。弹道射的实践可以证实,一组射击的最佳发数是 $7 \sim 10$ 发。用此一组射击发数进行一次射击可以确定出相对中间偏差 B_n/x 的值,其误差不超过均值的 20% 。为了提高精度,必须进行多组重复试验,但这并不总是可能的。

13.3.3 偏流的测定

测定偏流,也即测定右旋炮弹向右的侧偏(或左旋炮弹向左的侧偏)的射击是为了确定偏流的试验值,进而根据它计算出偏流的表定值。原则上偏流可以在进行距离射或密集度射同时测定,也可以用迎面射测定,或由两门膛线缠度方向相反的同型号火炮同向射击测定。

在上述几种方法中,技术上实现最简单的、从获得偏流结果来说大概也是最有效的方法是迎面射方法,其实质如下所述。挑选出两门弹道性能尽可能相同的火炮,两门火炮彼此相对放置在一条直线上,相距一定的距离(见图 13.13),此距离要确保进行射击的安全性。两门火炮互相瞄准使射击面重合,在特殊情况下允许在保证射击面严格平行的条件下两门火炮的瞄准点作不

大的平行移动。两门火炮尽可能同时射击,以保证外界因素,特别是风对弹道有相同的影响。在有横风 W_z 时,第一门火炮的侧偏减少 z_{W_z} ,而第二门火炮的侧偏增大同一个量。射击中所得侧偏之和将等于两

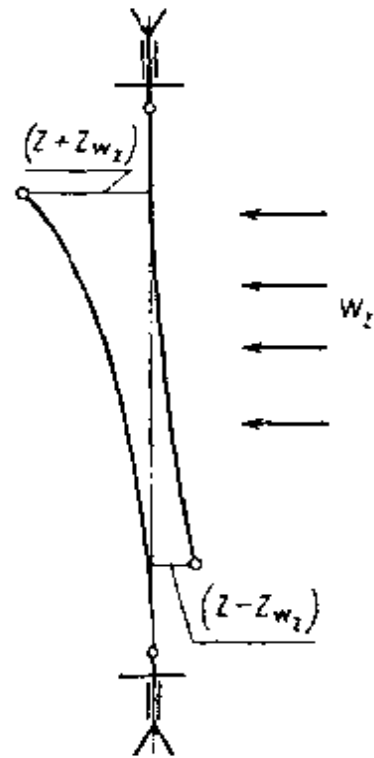


图 13.13 在有风时用迎面射确定偏流

倍偏流值,即

$$z_{\mu} = z_{w_x} + z_{\mu} + z_{w_x} = 2z_{\mu} \quad (13.38)$$

13.3.4 弹药结构诸元变化时距离和初速的对比射击

在弹药生产中即使有极小的结构和技术改变都会引起弹道性能的明显改变,特别例如在其它特性相同的情况下涂漆弹和不涂漆弹就有不同的飞行距离。根据所说的这个情况,在编制射表时必须注意当弹药的任何一个元件改变时都必须测定相应的射程。为了解决这个问题,要求在尽可能相同的条件下对变体弹和未变体弹进行交替射击,用这种方法进行的射击就称为验差射。

距离验差射时的交替射击使得两门不同射击组的射击准备误差实际上是相同的,因此,其作用就是使两个验差组的集群中心在同一方向移动,实际上不改变二者的差值 δx 。确定射程差的精度从理论上讲与一次消耗掉所有的试验弹药或是保持射击总数不变分 n 次试验无关,但实际上如同在密集度射时一样,我们不主张增加一组中的射击数,因为这样会增长了射击时间而必然增加了因气象条件和身管内弹道性质变化而造成的弹丸散布。

初速验差射主要用来确定被试身管和弹丸初速的表定值,以及用于确定本组装药相对于标准装药的弹道特性。

§ 13.4 火箭和导弹飞行试验的基本理论

13.4.1 飞行弹道试验设计基础

飞行弹道试验设计问题(ЛБЭ)表述如下:要求选择可行的飞行器状态模型,建立与所选模型相应并在技术上可实现的待测参数的组成,拟定测量方案以及测量结果处理方法,以便以必要的精度和最少的费用测量和分析实际运动和(或)寻找被试飞行器的飞行-结构特征(如质量、惯性、空气动力特征等)。

上述问题的提法已预示了要将飞行试验过程本身作为研究对

象。如果说在靶场火炮射击条件下试验者只是在最后阶段——也即在试验(射击)结果处理阶段才有必要转向理论分析,那么在火箭和有控弹飞行试验中则情况大不相同。

现代飞行器样机(即便最简单的无控火箭、更不用说有控火箭和炮弹了)的飞行试验在时间、经费和其它物资设备的消耗上已大为增加,以致使预先制定试验计划来提高试验效率的要求已从希望这样做转变成必须这样做,试验设计的目的是制定清晰的、进行飞行弹道试验的逻辑图,科学地给出在执行它的过程中所产生问题的及有根据的解决办法。

飞行弹道试验(ПБЭ)设计应从研究那些在指定靶场进行飞行试验时所利用的测试仪器的单独测量及综合测量的不准确性和不精确性入手。必须清楚地意识识别,如果测量系统本身的精度过低,则任何优良的方案都无济于事。但如果不准确性的分析认为所设置的仪器的误差在允许的极限范围以内,那么试验者就可以转入更加精细的设计。

在确定最优方案时,最自然的是从单一的、最重要的实验指标为判据的观点出发优化飞行试验准备阶段及随后进行的每个阶段。它的综合性指标就是在试验中要以最小的消耗获得最大数量的可靠数据。当然,所说的综合性指标判据的具体数学表述可以是各种各样的。

设有与某个参数向量 $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ 有关的评估函数 $\varphi[q]$, 其中参数向量带有被试对象的信息,并且除测试结果外向量 q 还可以包括完整的或非完整的先验信息。例如设

$$q \in Q(m_q, K_q) \quad (13.39)$$

式中 m_q 是向量 q 的数学期望; K_q 是它的相关矩阵。

在进行试验后,有关向量 q 的所有信息都将包含在按下式确定的、它的估计 \hat{q} 的概率密度 $p(\hat{q})$ 中:

$$p(\hat{q}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |K_q|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\hat{q} - m_q)^T K_q^{-1} (\hat{q} - m_q)^T \right\} \quad (13.40)$$

当然, 概率密度 $p(\hat{q})$ 将与确定集合 $\{Q\}$ 所进行实验的条件有关, 这些条件是: 从给定的集合 $\{X\}$ 中选取运动模型, 选择被测函数 $Y \in \{Y\}$ 的组成、测量方案 $U \in \{U\}$ 以及测量结果 $W \in \{W\}$ 的处理方法。于是在先验未知 q 的分布规律的前提下, 可以将给定范围内找到估值的概率取作优化试验的判据^[17], 即

$$J(Q) = p_Q\{|\hat{q} - q| < \epsilon\}$$

式中 ϵ 为预先给定的小量。

在这种情况下, 如果

$$J(\hat{Q}) = \max_{\{Q\}} J(Q) \quad (13.41)$$

则试验计划 Q 将是按概率最优的。其中 Q 属于集合 $\{Q\}$ ($\hat{Q} \in \{Q\}$), 而集合 $\{Q\}$ 定义为这 n 个集合直接相乘的积

$$\{X\} \times \{Y\} \times \{U\} \times \{W\}$$

如果 q 的分布规律可以以足够的根据预先认为是正态的(高斯的), 则确定估值向量的精度可用相关矩阵

$$K_q = |k_{ij}(Q)| \quad (13.42)$$

单值地描述。在这种情况下, 上述矩阵的各种标量特征可用来作为^[168] 最优试验的判据。如果相关矩阵具有最小的迹

$$\min_{\{Q\}} \text{Sp} K_q \quad (13.43)$$

则此设计称为 A 优化。

正如所知, 矩阵对角线元素之和 $\text{Sp} K = \sum_{i=1}^m K_{ii}$ 称为矩阵的“迹”, 考虑到方差位于矩阵的主对角线上, 故 A 优化设计使参数估计的均方差达到极小。这个判据以及下面要讲的判据的物理意义可以最简单地利用未知参数估计相关矩阵的几何解释来加以说明(见图 13.14)。在观测结果为标准分

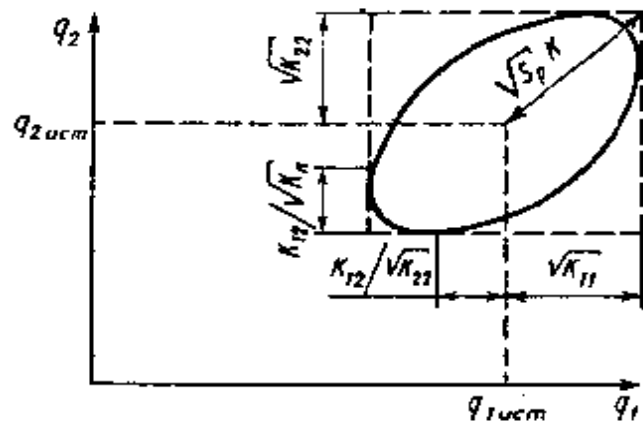


图 13.14 未知参数估计的相关矩阵的几何说明

布规律的情况下,密度函数为常值的表面是一个椭球,其特征完全由矩阵 K_q 的元素确定。为了方便,在图 13.14 上只画出了两维($m=2$)情况下的椭圆,由图可知, A 优化设计使与相关椭球(对于所研究的情况是椭圆)相切的正六面体的对角线的值极小。

如果相关矩阵的行列式具有极小值,即

$$\min_{\{Q\}} \det K_q \quad (13.44)$$

则与之相应的设计称为 D 优化设计。我们注意到, n 阶方阵 K 的行列式是由其系数按公式 $|K| = |K_{ik}|_1^n = \sum (-1)^k K_{1k_1} K_{2k_2} \cdots K_{nk_m}$ 得到的一个数,式中 $K_i (i=1,2,\dots,n)$ 取由数 $1,2,\dots,m$ 组成的所有可能的阶乘 $m!$, k 等于每个排列中的逆序数。这种设计使得参数估计的广义方差或相关椭球的体积达到极小。

最后,如果与之相应的相关矩阵最大特征数达到极小,即

$$\min_{\{Q\}} \lambda_{\max}(K_q) \quad (13.45)$$

则这种设计称为 E 优化设计。矩阵 K 的特征数即特征方程 $|\lambda E - K| = 0$ 的根 $\lambda_i (i=1,2,\dots,m)$, 矩阵 $\lambda E - K$ 的行列式即为矩阵 K 的特征多项式。

所说的这种设计将使相关椭球的最大轴达到极小值。必须指出,在一般情况下某种设计可能在一个或几个判据的意义上比另一种设计更受欢迎一些,也即根据第一类判据公认非最优的第二个试验计划从另一个观点看可能是更受欢迎的。

我们用以下简单的例子来说明这一点,设在一测量数 $n=24$ 下进行两个同一类型的试验,结果分别得到相关矩阵如下:

$$K_{1q} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ -3 & 0 & 4.5 \end{bmatrix} \quad K_{2q} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

对于它们有 $|K_{1q}| = 3.75 \times 12^{-3}$; $|K_{2q}| = 4 \times 12^{-3}$; $\text{Sp} K_{1q} = 3/8$; $\text{Sp} K_{2q} = 1/3$ 。因此,按 A 优化设计判据应是第二个设计更受欢迎,但按 D 优化设计判据却是第一种设计更受欢迎。

根据试验结果获得参数的估计,而与这些参数的准确特征相应的这样或那样判据的选择,应从具体飞行弹道试验所具有的物理特

征出发来确定。

仅按实验结果的最终精度来比较实验计划的最优性,实际上没有考虑要达到这样或那样的结果需要多少费用的问题。有时一个某些指标不大好(在上面所研究的判据意义下)的试验,如果所需费用比按 A 、 D 或 E 最优设计来进行试验的费用少得多,也可能是更有利的。

因此,更为通用的飞行弹道试验最优设计判据应认为是如下函数:

$$J(Q) = C + kL[K_q] \quad (13.46)$$

式中 k 是不变的规范化因子, $L[K_q]$ 是与估计精度相应的、并由最适合给定实验情况的设计比较方法所确定的泛函, C 是进行实验的总费用。

函数 $J(Q)$ 称为试验 Q 的耗损函数,就像在前面研究判据时的特殊情况一样,对于判据表达式(13.46),如果此耗损函数取极小值,则试验计划将是最优的。

在绝大多数飞行实验里,直接可测的参数只是待定参数中的很小一部分,这就迫使我们不得不吸收一些以被试飞行器状态数学模型的形式表示的附加先验信息。显然,这时有各种各样的模型可被利用,其中特别是曾在第三章中研究过的模型。被测参数的组成也可以是各种各样的,通常应用间接测量方法的情况下远不能在运动模型 X_i 和测量函数 Y_i 任何组合的情况下都获得所需的结果。因此在转入由直接相乘 $\{X\} \times \{Y\}$ 形成的集合之中选择最优模型之前必须回答根据被测参数向量确定待估计参数向量问题的解的存在性和唯一性问题。在根据外弹道测量(БТИ)确定飞行器运动时,最大的特点是要估计运动的初始条件,我们指出^[13,14],根据系统输出端的测量还原动力系统初始状态的可能性称之为动力系统的可观测性特性。

在证实了对于所研究的、集合 $\{X - Y\}$ 中任一对模型 $X - Y$ 满足可观测性条件后,就可以转入从它的可能集合中选择最优的(在所取判据的意义上)一对 $X - Y$ 的工作。对于所说的每一对模型都可以求得自己的、按下式定义的相关矩阵

$$\mathbf{K}_q = \left\{ \left[\frac{\partial x}{\partial q} \right] \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right] \mathbf{K}_s^{-1} \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]^T \left[\frac{\partial x}{\partial q} \right]^T \right\}_{1=m_q} \quad (13.47)$$

在这里矩阵

$$\mathbf{R}(Y) = \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right] \mathbf{K}_s^{-1} \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]^T$$

式中 \mathbf{K}_s 是测量噪声的相关矩阵, 表示测量模型的特征。而矩阵

$$\mathbf{G}(X) = \left[\frac{\partial x}{\partial q} \right]$$

为运动模型。

利用优化设计判据之一, 例如 D ——优化设计判据, 可将被选择的一对 $X - Y$ 模型的最优化条件表示成如下形式:

$$\min_{\{X-Y\}} \det \{ \mathbf{G}(X) \mathbf{R}(Y) \mathbf{G}^T(X) \} \quad (13.48)$$

以下我们在从每个集合 $\{X\}$ 和 $\{Y\}$ 中各取两个模型组成设计方案的最简单情况下, 研究一下寻找相应于(13.48)式的最优解的过程。

显然, 由集合 $\{X\}$ 的不同运动模型与从集合 $\{Y\}$ 中的不同测量方法可以组成 4 种不同型式的、向量 q 估计的相关矩阵。对这些矩阵中的每一个都必须算出它的行列式的值, 最大的一个行列式值, 例如 $|\mathbf{K}_q|_{21}$ 就是最优的模型匹配方案。就我们所研究的情况来说, 第二个运动模型和第一个测量模型的匹配是最优的。必须指出, 在给定的问题提法范围内, 所研究的一对 $X - Y$ 最优匹配的选择是对固定的测量方案 $U \in \{U\}$ 实现的, 通过改变测量 u_y 的次序, 可以得到更加优化的方案。在 D 优化设计范围里, 寻找优化的工作归结为求解极值方程:

$$\partial \mathbf{K}_q / \partial u_y = 0 \quad \partial \mathbf{K}_q / \partial \alpha = 0 \quad (13.49)$$

在联立研究飞行器运动模型和测量模型时, 一方面有实现测量的条件问题, 另一方面还会产生数学模型 $X - Y$ 与飞行器试验实际过程相符的问题。作为动力系统的飞行器, 关于其状态的详细信息是在飞行弹道试验中所获得的测量信息。因此, 过程和数学模型与实际试验相符性的问题就可以看作是过程的数学模型与测量条件相适应的问题。使得用于决定和分析运动过程的模型与测量条件相适应的条件就称为相符性条件^[17]。在区间 $[0, T]$ 上相匹配的运动模型和测

量模型 $X - Y$, 如果对于具有给定的、用于确定结果可靠性置信概率的误差矢量, 关于它的估值属性的假说是正确的, 那么就称模型与实际运动以及对于测试条件建立的、具有所需数学期望(特别是零)和不超过允许范围均方差值的分布规律是相符的。

我们指出, 相符性是问题提法正确性(规律性)的必要条件而不是充分条件, 在运动模型和测量进行条件里可以存在这样的综合误差^[17], 它使得尽管相符性条件已被满足, 但起始条件和瞬时运动(相坐标)的估计 \hat{x}_0 和 $\hat{x}(t)$, 以及被识别的飞行器参数 $\hat{\lambda}(t)$ 的估计在很大程度上与自己的实际值还是不同。相符性检验还不能检查误差本身, 而仅证明它存在的可能。

13.4.2 测量结果处理方法的简要评述

测量过程实际上总是存在着这样或那样的测量误差, 所以它受到未考虑因素对其作用的制约, 因此实际测量结果永远是一个随机实现。误差可分为三类: 系统误差、随机误差(正态误差)和粗大误差。所有这三类误差都是随机的, 这是因为系统误差在几组中也是随机的, 而另外两类误差按其自然属性必定是随机的。

为了减小测量误差对确定未知参数的影响, 需进行多次测量, 在这种情况下就要采用统计求解法, 这种解法可以利用超量的原始信息将在有随机误差存在时获得的函数关系加以平滑。

下面我们研究处理测量信息的统计方法基本原理。通常认为所得信息的基本资料是测量结果(后验信息), 并且所得数据的某些部分有着它们特有的相关关系。在进行分析时也要利用先验信息(在进行一组测量之前获得的), 用来在数学模型中设置飞行器运动参数的期望值。可能误差相应的概率特征也认为是已知的, 由于对测量结果进行的是统计处理, 故所求得的未知量全体应与测试结果符合得最好。在此情况下结果的最优化可依据各种各样的判据来实现, 但最普遍的是用待定运动参数的方差取极小值为判别准则求得。适合于此判别准则的统计方法分为两类: 间隔处理方法和点处理方法。最大似

然法和最小二乘法就属于间隔处理法,应用它时需要在进行一次测量的时间间隔内累积(采集)丰富的信息;逆推法(其中包括卡尔曼动力滤波法)属于点处理法,利用它时只需要数量不多,但似乎是连续积累(随着所进行测量次数增加而积累)的信息。

在这里我们不去研究这些方法的本质,关于这个问题,例如在教科书[10,11,12]以及文献[17,34,70,110,117]等中已有了充分的论述。在这里我们只简单地说一下它们的优缺点以及这些方法的应用范围。

最大似然法(MMPI)是最通用和最有效的一种方法,当分布规律预先不知,但在所处理的信息中无论有不相关测量还是有相关测量时,应用它都是正确的。处理测量结果的最小二乘法(MHK)是最大似然法的特殊情况,当所进行的测量具有独立的正态分布时采用最小二乘法(MHK)是最受欢迎的。在这种情况下,利用它所得到的结果就精度和可靠性讲都不比最大似然法(MMPI)差,而从实现它的计算方法讲,它显得更加简单。在按最小二乘法(MHK)处理测量信息时需要预先获得足够多的测量采样,因此就处理时间而言,此法获得估值的速度要比在数据处理中逐渐增加测量信息的方法要慢。此外,在完成每个紧接着的下一阶段的计算时,不是所有的先验信息都加入到数据处理中去(也即仅考虑上一阶段运动参数的近似值)。实现了测量值数量逐渐增加的第二类数据处理方法就没有上述缺点,此类方法的主要特点是可利用任意一组、以至几个测量结果来补充测量信息。这时为了进行计算要利用联系第 $(i+1)$ 步估值与前面第 i 步上得到的估值和参数的递推关系式。这种方法考虑了至任一瞬时(对任何固定的点)测量结果的累积总和,这样可保证求得该瞬时新的、更精确的估值。采用增加测量值数量的数据处理方法在以下一些情况里最为有效,即当按时间分散测量等时间间隔测量以及当需要快速求解(对于跟踪飞行器的状态),一次累积大量信息不利或不可能时。但这个方法也不是没有缺点的,其中首先要指出的是,迭代处理方法对于所吸收的先验信息可靠性水平的灵敏度很高,而采用此方法时所吸收的先验信息的数量大大超过第一类方法,这时,如果所

采用的先验信息不可靠,则采用迭代法要么失去意义(由于精度低,故有时不可能或者实际上不可能获得所要求的结果),要么需利用匹配原理同时进行极为复杂的运算。

13.4.3 在飞行试验结果处理中作为动力系统的飞行器参数识别

关于识别问题内容丰富的定义和一般数学描述其实在 13.2.4 节中已经给出,在这里我们只对飞行器试验数据处理范围内所采用的求解方法作具体的说明。当在狭义上研究识别问题时将假设:在所研究的运动时间间隔内,根据飞行试验结果已获得关于系统“输入”和“输出”的信息,而需要确定它的未知(非直接可测)参数。在这种情况下我们还将假设飞行器运动过程的数学模型已经给定,并且它满足以前研究过的相符性条件。这样就可将实际运动过程的参数识别问题与其数学模型的参数识别问题视为是等同的。在所求解的问题中,输入作用是表征大气状态的参数,它们由飞行试验之前或与之同时进行的气象准备的结果确定;还有给定的、形成控制作用的程序(对于有控飞行器)。后者可以预先装在飞行器上,也可以在制导(控制运动)过程中,在由舵执行信号的过程中由遥控装置确定。被测的输出参数是飞行器状态向量的各个分量,例如速度、线坐标、角速度。确定飞行器空间方位的角度等。待识别变量可以是不可直接测的起始相状态向量的各分量 $\mathbf{x}(t_0)$ 的值、空气动力系数状态矩阵 $A(t)$ 各元素($c_{x_a}, c_{y_a}, m_{z_a}$ 等)的值以及在飞行过程中不断变化的、飞行器的转动惯量(I_x, I_y, I_z)等。

必须强调一下,所研究的参数识别问题无论对于有控飞行器还是对于无控飞行器都是很现实的问题,特别是对于无控飞行器,在飞行试验中重要的是要确定在各种射击条件下弹道主动段上纵向和侧向静稳定储备量的实际值。对于有控飞行器,在估计飞行过程中调节对象的动态稳定性、控制性和其它特性时也要解决这个问题。

不难指出,在所研究的提法下,至少对于有控飞行器,参数识别

问题是与利用“试验作用”确定频率特性的问题极为相似的。实际上,根据系统“输入”和“输出”的测量结果可以确定系统的频率特性,而频率特性又与方程及其根的特性有关,由此,原则上就可以求得系统模型的参数。但在这里,这种相似之处只是表面上的,且不谈所说的处理方法在绝大多数情况里只能推广到很窄的一类定常系统上,而且还具有深刻的差异,即利用“试验作用”(阶跃的、脉冲的或具有不同频率正弦的作用)获得的是“超动力学过程”识别问题的解。因此,在这种情况下所确定的结果仅在如下条件下才是正确的,即对于一种类型的输入作用得到的输入/输出比所相应的条件对于其它所有类型的输入作用仍然存在。

多维动力系统识别(在根据飞行试验结果估计系统参数的意义下)问题如同动力系统滤波(确定飞行器状态变量最优估计)问题一样,应从概率和优化两个方面去研究。在这里也如同在前面所研究过的情形一样(参见 13.4.1 节),对所选择的耗损函数赋予概率解释,或即在合理地将估值问题归结为优化问题的条件下从概率方面考虑来确定耗损函数。与达不到绝对精确识别相联系的耗损函数称为惩罚函数,可将被识别参数的估值与其真值偏差的平方选作惩罚函数。因为真值是预先未知的(这也就是提出识别问题的原因),所以利用以耗损的条件数学期望代替未知参数估计中的误差来描述偏差的统计特性是更受欢迎的。

基于最小二乘法(MHK)回归过程的参数识别方法既适用于线性多维系统也适用于非线性多维系统,在这里,定常性要求只扩展到回归识别信息积累的时间间隔内。我们指出,在识别多维系统时,为了获得回归参数,需求出矩阵的逆,但如果利用回归方法的递归特性,从而转向所谓参数识别的连续回归法,则在上述计算关系中颇为不寻常的运算就可消除。惩罚函数极小化的过程需要用到一阶(有时是二阶)导数的数字确定,为此可以采用基于利用线性化模型的数学优化方法,例如梯度法,高斯-牛顿法(或牛顿-拉夫松方法),浸沉法(更新法)等。对于所讨论的问题通常最有利的办法是高斯-牛顿法及其变形方法。相应“变形方法”的详细分析叙述如下:牛顿-高斯法

在求解品质函数(耗损函数)为凸函数的参数辨识问题时以收敛性最高(与其它方法相比)为其特点,但是只有当零近似估计位于“吸引”域范围内时才能快速达到极值。如果参数的零近似估计不在该参数真值的“吸引”域内,则所研究方法的收敛速度就不如其它方法,特别是不如即使在非常不精确的初始近似值条件下也具有稳定(不慢)收敛性的沉入法。为了消除所指出的高斯-牛顿方法的缺点,可深入地分析基于此法与沉入法计算过程相结合的各种变形方法。实现沉入法算法的复杂性和困难性迫使我们必须去寻找将问题分解成部分独立或完全独立、可以平行求解的子问题的总和,这种对考虑了交叉(空气动力的、燃气动力的、控制通道的)影响的原始模型所进行的等价变换,可以在满足具有输出反馈的多维系统可分解性条件的基础上来实现。可分解性的结构特征在很大程度上可直接由建立退化状态模型的可能性来证实。退化状态模型描述的不是整个状态向量的变化,而只是描述研究者所感兴趣的某些分量的变化。

在对原始状态模型进行分解(分割)时所可能用的线性变换类型中,下述变换^[13]起着特殊的作用,这种变换利用专门的矩阵 V 实现, V 的列是原始方程组的特征向量 V_i ,所说的特征向量、因而矩阵 V 可根据齐次方程(2.79)的解来确定,此解可表示成如下形式:

$$x(t) = V \exp(\lambda t) \quad (13.50)$$

方程(13.50)微分后得

$$\frac{d}{dt} x(t) = \lambda_1 V_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + \lambda_n V_n e^{\lambda_n t} \quad (13.51)$$

另一方面,将式(13.50)代入方程(2.79)后得

$$\frac{d}{dt} x(t) = A[V_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + V_n e^{\lambda_n t}] \quad (13.52)$$

于是,比较(13.51)和(13.52)两式的右边,得到如下方程:

$$\lambda_i V_i = A V_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (13.53)$$

将此方程对 V_i 求解即可得所求的特征向量。为了让它们具有单值性,将它们的第一个元素都取为 1。

完成正则变化后就可按以下步骤实现方程组的对角线化。

设矩阵 λ 为对角线矩阵,则有

$$V\lambda = (\lambda_1 V_1, \dots, \lambda_n V_n) \quad (13.54)$$

注意到(13.53)式,作等式

$$(\lambda_1 V_1, \dots, \lambda_n V_n) = (AV_1, \dots, AV_n) \quad (13.55)$$

由以上两关系式即得等式

$$V\lambda = AV \quad (13.56)$$

由此得

$$A^* = \lambda = V^{-1}AV \quad (13.57)$$

利用矩阵 V 作为变换矩阵可得到正则系统

$$\frac{d}{dt}x^*(T) = A^*x^*(t) + B^*u(t) \quad (13.58)$$

$$\text{式中} \quad B^* = V^{-1}B \quad (13.59)$$

其状态变量的标量方程之间彼此无关。

我们以下面的特例来说明原始系统对角线化的过程。

例. 设需将射击面内被动段上在 $\dot{\psi} = \omega_y = 0$ 条件下水平、稳定飞行(在侧平面内有偏差补偿的情况下)的飞行器的运动模型对角线化。

按照方程(3.87), (3.90) 和 (3.95), 给定的模型将有如下形式:

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{X_a}{mV}\dot{z} + \frac{Z_a^\beta}{m}\beta + \frac{Z_a^\delta}{m}\delta \quad (13.60)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{X_a}{mV^2}\dot{z} + \frac{Z_a^\beta}{mV}\beta + \frac{Z_a^\delta}{mV}\delta \quad (13.61)$$

记 $\dot{z}_1 = \dot{z}, \beta = x_2, \delta = u$, 将(13.60) 和 (13.61) 表示成如下形式:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{X_a}{mV} & \frac{Z_a^\beta}{m} \\ -\frac{X_a}{mV^2} & \frac{Z_a^\beta}{mV} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{Z_a^\delta}{m} \\ \frac{Z_a^\delta}{mV} \end{bmatrix} u \quad (13.62)$$

在确定位于状态矩阵和方程中的量的数量级时, 将从如下考虑出发, 即在实际飞行条件下 Z_a^β/mV 的值具有 $1/1000(s^{-1})$ 的数量级, 为了使本例中的计算直观和简单, 我们改变比例尺的大小, 将系数值变成整数。这时, 可设在测量时间间隔上所研究的矩阵元素是常数, 设某个假想飞行器的状态模型如下:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

所研究系统的特征值是如下方程的根:

$$\det \left\{ \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = 0 \quad (13.63)$$

展开行列式

$$\det \begin{pmatrix} -6-\lambda & 7 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

可将方程(13.63)写成如下形式:

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

由此可得所求的特征值为

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = -5$$

为了求得特征向量,我们写出如下方程:

$$\begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} \quad (13.64)$$

$$-5 \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} \quad (13.65)$$

从矩阵形式的方程(13.64), (13.65)转换成按元素的写法,得

$$\begin{aligned} v_{11} &= v_{12} & v_{21} &= 7v_{22} \\ -v_{12} &= -v_{11} & -7v_{22} &= -v_{21} \end{aligned}$$

设子矩阵的第一个元素等于1($v_{11} = v_{22} = 1$),则我们求得

$$V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/7 \end{pmatrix}$$

因而,将原始方程组变成对角线形的矩阵 V 将具有如下形式:

$$V = [V_1, V_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/7 \end{pmatrix}$$

我们再算出逆矩阵

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ \frac{7}{6} & -\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

利用所得的逆矩阵就可求得矩阵 A^* 和 B^* 的元素

$$\begin{aligned}
A^* &= V^{-1}AV = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ \frac{7}{6} & -\frac{7}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/7 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \\
B^* &= V^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \\ \frac{7}{6} & -\frac{7}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/6 \\ 35/6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

结果就得到对角线方程组

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}^*(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}^*(t) + \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{35}{6} \end{bmatrix} u(t)$$

式中

$$\mathbf{x}^*(t) = [\dot{z}(t), \beta(t)]^T \quad u(t) = \delta(t)$$

这样,按照(13.58)式,在 m 维控制向量情况下的标量形式的状态方程组即具有如下形式:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_i^*(t) = a_{ii}^* x_i^*(t) + b_{i1}^* u_1 + \cdots + b_{ij}^* u_j \quad (13.66)$$

并且 $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$ 。

如果现在转到表达式(13.66)的离散形式并研究 $(m+n)$ 维增广向量

$$\mathbf{w}_k = [x_{1k}, \dots, x_{nk}; u_{1k}, \dots, u_{mk}]^T \quad (13.67)$$

以及增广矩阵

$$\Phi = \begin{bmatrix} a_{11}^*, \dots, 0; & b_{11}^*, \dots, b_{1m}^* \\ \vdots & \\ 0, \dots, a_{nn}^*; & b_{n1}^*, \dots, b_{nm}^* \end{bmatrix} \quad (13.68)$$

则方程(13.66)就可转换成如下形式:

$$\dot{\mathbf{x}}_{k+1} = \Phi \mathbf{w}_k \quad (13.69)$$

在方程(13.69)中 $k = tT^{-1}$, 式中 T 是离散化的周期, 在现在的情况下就是输入量和输出量变化的时间间隔。参数识别问题就是要在输

出变量

$$y_k = Cx_k + n_k \quad (13.70)$$

的向量多次测量条件下,用最小二乘法或最大似然法确定矩阵 $\hat{\Phi}$ 的元素的估值,上式中 n_k 是测量的离散噪声。

惩罚函数表示成如下形式:

$$J = \frac{1}{r-1} \sum_{k=1}^r [y_{k+1} - \hat{\Phi}w_k]^T K_n^{-1}(k) [y_{k+1} - \hat{\Phi}w_k] \quad (13.71)$$

式中 r 为时间点(测量点)的个数。 K_n 是测量的相关矩阵。寻找 $\min J$ 意义下矩阵 $\hat{\Phi}$ 的最优估计应由 J 对矩阵 $\hat{\Phi}$ 的每一行的极小化条件来实现。

为了求得 $\hat{\Phi}$ 的最终表达式,我们先讨论一下对具有连续时间,标量输出和向量输入的定常系统的简单情况下所研究问题的解。这个系统用下面的方程描述:

$$x^* = a_0 + a_1 u_1^* + a_2 u_2^* + \cdots + a_m u_m^* \quad (13.72)$$

设对于 x^* 和 u_j^* ($j=0,1,\cdots,m$) 进行了 ν 次测量,根据这些测量结果可以计算出平均值 x_{cp}^* 和 u_{jcp}^* ,式中 u_{jcp}^* 是在给定的测量序列中 u_j^* 的平均值。

研究如下差值

$$x(\nu) = x^*(\nu) - x_{cp}^*(\nu) \quad u_j(\nu) = u_j^*(\nu) - u_{jcp}^*(\nu)$$

按 ν 次测量序列取平均值后的方程(13.72)表示为

$$x(\nu) = a_1 u_1(\nu) + a_2 u_2(\nu) + \cdots + a_m u_m(\nu) \quad (13.73)$$

式中 $x(\nu)$ 和 $u_j(\nu)$ 是对测量序列的平均值偏差。

r 次测量的总和给出

$$x(\nu) = \mathbf{u}^T(\nu) \mathbf{a}(\nu) \quad (\nu = 1, 2, \cdots, r) \quad (13.74)$$

式中

$$\mathbf{u}^T(\nu) = U = \begin{bmatrix} u^T(1) \\ \vdots \\ u^T(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(1) & \cdots & u_m(1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(r) & \cdots & u_m(r) \end{bmatrix}$$

而 $\mathbf{x}(\nu)$ 和 $\mathbf{a}(\nu)$ 为列向量,其维数由进行测量的次数($\nu = 1, 2, \cdots, r$)确定。

将判据

$$J = (\mathbf{x} - U_a)^T \mathbf{K}_n^{-1} (\mathbf{x} - U_a) \quad (13.75)$$

按照显然的条件

$$\frac{\partial J}{\partial a} = 0 \quad (13.76)$$

对 a 取极小值后,得

$$\hat{a} = (U^T \mathbf{K}_n^{-1} U)^{-1} U^T \mathbf{K}_n^{-1} \mathbf{x} \quad (13.77)$$

式中

$$\hat{a} = [\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_m]^T$$

现在返回到(13.69)式。与(13.77)式相类似,我们写出对于确定最优(在判据(13.71)取极小值的意义下)估计 $\hat{\Phi}_i$,也即矩阵第 i 行 Φ_i^T ($i = 1, 2, \dots, n$) 的最优估计的表达式如下:

$$\hat{\Phi}_i^T = [W_k^T \mathbf{K}_n^{-1}(k) W_k]^{-1} W_k^T \mathbf{K}_n^{-1}(k) x_{i,k+1} \quad (13.78)$$

式中

$$\begin{aligned} W_k &= \begin{bmatrix} w_{1k}(1) & \cdots & w_{n+m,k}(1) \\ \vdots & & \\ w_{1k}(r) & \cdots & w_{n+m,k}(r) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1(t_0) & \cdots & x_n(t_0) & \cdots \\ \vdots & & & \\ x_1[(r-1)T + t_0] & \cdots & x_n[(r-1)T + t_0] & \cdots \\ u_1(t_0) & \cdots & u_m(T + t_0) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1[(r-1)T + t_0] & \cdots & u_m[(r-1)T + t_0] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13.79)$$

$$x_{i,k+1} = [x_i(T + t_0) \cdots x_i(rT + t_0)] \quad (13.80)$$

正如从所列关系得出的那样,为了实现系统的参数识别,须进行必要的测量,而进行这些测量所需的时间间隔应不小于 rT , 其中 $r = n + m + 1$ 。对于具有标量输入的对角线系统模型,也即当

$$\hat{\Phi}_i^T = [\hat{a}_i^*, \hat{b}_i^*] \quad (13.81)$$

时,参数识别过程最为简单。在上式中矩阵 Φ 的下标 i ,或参数 a_i^* 和 b_i^* 的下标 i ($i = 1, 2, \dots, n$) 确定了与输入和输出向量测量累积序列相应行的行号。

必须指出,按照已研究过的、极大地简化了识别过程的标准方法,实现了原始系统的对角线化,但这只能估计系统的“广义”参数(矩阵 A^* 和 B^* 的元素),而不能对原系统分量(质量-惯量特性,空气动力特性等)作详细的估计。

当求解识别问题的目的是要获取初始状态向量未测分量的估计时,状态矩阵(以及有控飞行器的控制矩阵)元素的估计只起辅助作用,在这里,矩阵 $A^*(t)$ 和 $B^*(t)$ 元素的后验估计是为了使向量 $x(t_0)$ 的估计达到更高一些的精度,故不是更重要的。因此,矩阵 $A(t)$ 的对角线化在这里不仅是允许的、而且是合理的。

但如果问题的“重心”转到根据飞行试验结果识别飞行器空气动力特征和惯性特征上,也就是转到参数识别上,则在绝大多数情况下不采用这种方法。

对与表达式

$$\hat{\Phi}_i^T = [\hat{a}_{i1}, \dots, \hat{a}_{im}, \hat{b}_{i1}, \dots, \hat{b}_{im}] \quad (13.82)$$

相应的非对角线系统状态矩阵和控制矩阵参数进行识别有着极大的计算困难,特别是对于多维模型更是如此。在这种情况下,还应注意到在一般情况下状态矩阵和控制矩阵的元素是随时间变化的。这就导致必须在极小的离散化时间周期(以提高精度为目的)条件下多次重复辨识过程。

此外在根据飞行试验数据辨识飞行器具体的空气动力特征和质量-惯性特征时,方程(13.69)对于以相坐标与未知系数之积的形式位于其中的待定量常常是非线性的。对于这种情况,待测的输出变量向量 y_k 将是向量 x_k 的分量以及待识别参数矩阵

$$\Phi = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{n1}; & b_{11} \cdots b_{1m} \\ & \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nm}; & b_{n1} \cdots b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1^T \\ \Phi_1^T \end{pmatrix}$$

的非线性函数 $y(\Phi, w)$ 。

在这种情况下,待识别参数矩阵 Φ 的值将在

$$\Phi_{\text{ист}} - \Delta\Phi \leq \Phi \leq \Phi_{\text{ист}} + \Delta\Phi \quad (13.83)$$

域中,式中 $\Phi_{\text{ист}}$ 是待识别参数矩阵的真值; $\Delta\Phi$ 是允许的参数值偏差。

对于在马赫数 $M \geq 1.5$ 以及当空间总攻角 $\alpha_n = \arcsin(\sqrt{V_y^2 + V_z^2}/V)$ 在 $0 \leq \alpha_n \leq 25^\circ$ 范围内改变的条件下飞行的飞行器,推荐以如下的近似多项式表示被识别的空气动力系数:

迎面阻力系数

$$c_{x_y}(M, \alpha_n) = c_{x_0} + c_{x_0}^{\alpha_n} \alpha_n^2 + A c_{y_a}^2 \quad (13.84)$$

($c_{x_0}^{\alpha_n}, c_{x_0}$ 是待识别的常数;系数 $c_{x_0}^{\alpha_n}$ 与 M 数以及攻角无关)

升力系数

$$c_{y_u}(M, \alpha_n) = c_{y_0}^{\alpha_n} \alpha_n \quad (13.85)$$

($c_{y_0}^{\alpha_n}$ 是待识别参数,由于它与 M 数的关系很弱,并且在 $\alpha_n < 25^\circ$ 条件下实际上与攻角无关,故可认为它是常数)

压心系数

$$c_d(M, \alpha_n) = c_{d_0} + c_{d_0}^M M \quad (13.86)$$

(c_{d_0} 和 $c_{d_0}^M$ 是待识别常数)

阻尼力矩系数

$$m_{z_z}^{\omega_z}(M, \alpha_n) = m_{z_z}^{\omega_z} + m_{z_z}^{\omega_z M} M + m_{z_z}^{\omega_z \alpha_n} (M, \alpha_n) \alpha_n^2 \quad (13.87)$$

($m_{z_z}^{\omega_z}, m_{z_z}^{\omega_z M}$ 和 $m_{z_z}^{\omega_z \alpha_n}$ 是待识别参数)

因为在所研究的情况里函数 $y(\Phi_i, \mathbf{w})$ 是参数的非线性函数,故对连续时间描述的泛函(13.71)极值的条件取如下形式:

$$\frac{\partial J}{\partial \Phi_i} = y[y - y(\Phi_i, \mathbf{w})]^T \mathbf{K}_n^{-1}(t) \frac{\partial y(\Phi_i, \mathbf{w})}{\partial \Phi_i} = 0 \quad (13.88)$$

为了相对于 $\Phi_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 获得唯一解,必须将称为正规方程组^[68]的(13.88)式线性化。为此应相对于满足条件(13.83)的矩阵 Φ_0 的行 Φ_{0i} 中各元素的某些先验值将位于方程组各组成成分中的函数分解成幂级数(特别是泰勒级数),经分解后得

$$\left[y - y(\Phi_i, \mathbf{w}) \frac{\partial y(\Phi_i, \mathbf{w})}{\partial \Phi_i} \right]_{\Phi_i = \Phi_{i0}} \times \Delta \Phi_i \Big)^T \mathbf{K}_n^{-1}(t) \\ \times \left[\frac{\partial y(\Phi_i, \mathbf{w})}{\partial \Phi_i} \right]_{\Phi_i = \Phi_{i0}} + \frac{\partial^2 y(\Phi_i, \mathbf{w})}{\partial \Phi_i^2} \Big|_{\Phi_i = \Phi_{i0}} \Big] = 0$$

式中

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(\hat{\Phi}_i, \mathbf{w})}{\partial \hat{\Phi}_i^2} &= \left[\frac{\partial y(\hat{\Phi}_{i0}, \mathbf{w})}{(\partial \hat{\Phi}_{i1})^2} \dots \frac{\partial y(\hat{\Phi}_i, \mathbf{w})}{\partial \hat{\Phi}_{i1} \partial \hat{\Phi}_{ik}} \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial y(\hat{\Phi}_i, \mathbf{w})}{\partial \hat{\Phi}_{ik} \partial \hat{\Phi}_{i1}} \dots \frac{\partial y(\hat{\Phi}_i, \mathbf{w})}{(\partial \hat{\Phi}_{ik})^2} \right]_{\Phi_i = \Phi_{i0}} \\ &= M(\Phi_{i0}, \mathbf{w}) \end{aligned} \quad (13.89)$$

并且矩阵 $[\partial y(\hat{\Phi}_i, \mathbf{w})]/(\partial \hat{\Phi}_{ik})^2$ 的每一个元素都是 n 维向量。

同样,我们引入如下的记号:

$$\left. \frac{\partial y(\hat{\Phi}_i, \mathbf{w})}{\partial \hat{\Phi}_i} \right|_{\Phi_i = \Phi_{i_{\text{act}}}} = N(\Phi_{i_{\text{act}}}, \mathbf{w})$$

$$y(t) - y(\hat{\Phi}_i, \mathbf{w}) = \Delta y(t) \quad (13.90)$$

这样,展开表达式(13.89)中的括号并考虑到所取的记号以后就得到如下的标准方程组:

$$\begin{aligned} [N^T(\Phi_{i_{\text{act}}}, \mathbf{w}) K_n N(\Phi_{i_{\text{act}}}, \mathbf{w}) - M(\Phi_{i0}, \mathbf{w}) K_n \Delta y(t)] \Delta \hat{\Phi}_i \\ = N^T(\Phi_{i_{\text{act}}}, \mathbf{w}) K_n \Delta y(t) \end{aligned} \quad (13.91)$$

为了书写简单,略去上式中矩阵 N 和 M 的自变量,得

$$\Delta \hat{\Phi}_i = (N^T K_n N - M K_n \Delta y(t))^{-1} (N^T K_n \Delta y(t)) \quad (13.92)$$

测量结果与先验模型之间的偏差越大,表达式(13.92)中的和式 $M K_n \Delta y(t)$ 的“权”也越大。

为了建立计算的算法,可利用下述情况,即当在包含 $\Phi_{i_{\text{act}}}$ 的封闭域中函数 $y(\Phi_i, \mathbf{w})$ 对于 $\Phi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 具有连续的一阶和二阶导数而足够光滑时,则在进行如下形式:

$$\hat{\Phi}_{ik} = \hat{\Phi}_i(k-1) + \Delta \hat{\Phi}_i(k-1) \quad (13.93)$$

的迭代时应趋于 $\Phi_{i_{\text{act}}}$ 。式中 $\Delta \hat{\Phi}_i$ 按公式(13.92)确定, k 是迭代序号。

因为 Φ_i 的真值是未知的,故可选它在域(13.83)中的任何一个假定值作为起始近似值。在这种情况下,所求估计的收敛性将取决于起始近似值接近于真值的程度、所采用的数值计算方法的类型(已指出过,特别偏爱的应是变形的高斯-牛顿法)以及所求问题的特点。在 $k \rightarrow \infty$ 时,估计值 $\hat{\Phi}_{i,k+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 的精度将取决于方差矩阵

$$K_\Phi(k) = (N^T K_n N - M K_n \Delta y(\nu))^{-1} \Big|_{\substack{\nu=r \\ k \rightarrow \infty}}$$

实际上迭代次数 k 不可能是无穷大的,因为在某个迭代次数以后再

继续迭代也不能明显提高所求参数辨识的精度,这就使迭代次数受到限制。

根据以上所述,我们转向研究下面的问题。设在飞行试验过程中已获得下列数据:被试飞行器过载矢量 n 的分量,角速度 $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 以及无控弹道测量段上无控飞行的高度和速度 $w(t) = X(t)$ 。根据气象准备数据还获得关于大气状态的资料。飞行器的几何特征(特征面积 S_M , 特征长度 l , 质心位置坐标 $l_{x,m}$ 等)和质量特征(mg, I_x, I_y, I_z 等)已知。要求根据飞行试验结果辨识无因次压心坐标 $\bar{c}_{u,\pi} = c_{u,\pi} l^{-1}$ 以及阻尼力矩分量系数 $m_y^{\omega_y}, m_z^{\omega_z}$ 。我们利用在固连坐标系里描述的飞行器相对于质心旋转运动的方程组(2.56)作为原始模型。

于是在式(13.88)中向量 $y(t)$ 的表达式具有如下形式:

$$\begin{aligned} y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} I_z - I_y & I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_x - I_y & I_{yz} \\ I_{xz} & -I_{yz} & I_y - I_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_y \omega_z \\ \omega_x \omega_z \\ \omega_x \omega_y \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} I_{yz} & 0 & 0 \\ 0 & I_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\omega_z^2 - \omega_y^2) \\ (\omega_x^2 - \omega_z^2) \\ (\omega_y^2 - \omega_x^2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注意到所有约定的识别参数和测量参数,我们将表达式 $y(\Phi, x)$ 表示成如下的形式:

$$\begin{aligned} y(\Phi, x) = \frac{\rho V^2}{2} S_M l \begin{bmatrix} m_{y_0} \\ m_{y_0} \\ m_{z_0} \end{bmatrix} \\ + mg \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(C_{u,\pi} - C_{u,\pi})l \\ 0 & (C_{u,\pi} - C_{u,\pi})l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \frac{\rho V S_M l^2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_y^{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & m_z^{\omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

在这里必需注意 $y(t)$ 的书写形式。 $y(t)$ 和 $y(\Phi_i, w)$ 之差 $\Delta y(t)$ 称为闭合差, 对它们之间关系表示方法的一般要求是要保证先验信息与同一类型后验(也即在试验过程中获得的)信息的比较性条件。一般说来, 在所利用的表达式里这个原则已被破坏, 事实上表达式 $y(t)$ 不仅包含有先验信息, 而且还含有被测飞行器角速度向量分量形式的后验信息, 因此, 如果不采取专门的措施, 就可能在被辨识的参数中带来附加的误差。应当指出, 在专门的文献里^[17] 可以找到能消除这种误差的方法。但考虑到教学的特点, 要在这里讲述所说的这种方法是不可能的。

考虑到所引用的表达式, 现得到在 $K_n = E$ (相应于无噪声确定性测量情况) 时与 (13.83) 相应的正规方程组, 也即我们求得满足条件

$$\frac{\partial J}{\partial \Phi} = 0 \quad (13.94)$$

的方程组。式中 Φ 对于所述问题采取被识别参数列向量的形式, 即 $\Phi = [c_{u,n}, m_y^{\omega}, m_z^{\omega}]^T$ 。在所述的提法和研究中所取模型范围内, 方程组 (13.94) 相对于待定参数是线性的, 这就给出了利用 (13.78) 型的关系式来求解的基础, 在 $K_n = E$ 和

$$w_k = X_k(\nu) =$$

$$(\nu = 1, \dots, r)$$

$$\begin{bmatrix} x_{11}[(\nu-1)T+t_0] & x_{12}[(\nu-1)T+t_0] & x_{13}[(\nu-1)T+t_0] \\ x_{21}[(\nu-1)T+t_0] & x_{22}[(\nu-1)T+t_0] & x_{23}[(\nu-1)T+t_0] \\ x_{31}[(\nu-1)T+t_0] & x_{32}[(\nu-1)T+t_0] & x_{33}[(\nu-1)T+t_0] \end{bmatrix}$$

的条件下, 此关系式成为如下形式的方程:

$$\Phi = X_k^{-1}(\nu) x_{k+1} \quad (13.95)$$

式中矩阵 $x(\nu)$ 和列矢量 x_{k+1} 的元素由以下线性方程组确定

$$x_{11,k} = 1 \times [n_{x,k}^2 + n_{y,k}^2] (mg)^2 l^2$$

$$x_{12,k} = x_{21,k} = 0.5[l^3V_k\omega_{y,k}n_{z,k}(mg)^2\rho_kS_M]$$

$$x_{13,k} = x_{31,k} = 0.5[l^2V_k\omega_{z,k}n_{y,k}(mg)^2\rho_kS_M]$$

$$x_{22,k} = 0.5[l^3V_k\omega_{y,k}\rho_kS_M]^2$$

角放大系数^[54], 计算关系式如下:

$$\begin{aligned} \alpha_0^0|_{\omega_x=0} &= |K_{\alpha_u}^*|^{-1} \alpha_0^0|_{\omega_x \neq 0}; \\ \beta_0^0|_{\omega_x=0} &= |K_{\alpha_u}^*|^{-1} \beta_0^0|_{\omega_x \neq 0} \end{aligned} \quad (13.97)$$

式中总攻角放大系数为

$$|K_{\alpha_u}^*| = \left[\sqrt{\frac{c_{y_a}^2 (c_{u,n} - c_{u,m}) \rho V^2 S_M l}{2(I - I_x)}} \right]^{-1} \quad \text{当 } I = I_y = I_z \text{ 时} \quad (13.98)$$

现在假设从瞬时 t_0 到 t_V 飞行器的空气动力特征发生连续变化, 导致其运动参数也在相应于 α_0^0 和 β_0^0 的基准运动附近的小偏差范围内改变, 于是得

$$\alpha^0 = \alpha_0^0 + \int_0^{t_V} \left[\omega_z - \frac{n_y g}{V} - \frac{g}{V} \vartheta \sin \vartheta \cos \gamma \right] dt \quad (13.99)$$

在算出了攻角的平衡值后就不难确定 β^0 的值

$$\beta^0 = \beta_0^0 \pm \int_0^{t_V} \left[\frac{n_z g}{V} + \omega_x \sin \alpha^0 - \omega_y \cos \alpha^0 - g V^{-1} \gamma \cos \vartheta \cos \gamma \right] dt \quad (13.100)$$

在(13.99)和(13.100)式中的“负”号相应于空气动力非对称性减弱, 而“正”号相应于空气动力非对称性增强。

在有了 α^0 和 β^0 后就可以求出如下导数值:

$$c_{y_a}^{\alpha} = \left[mg \sqrt{n_y^2 + n_z^2} \right] \times \left[\frac{\rho V^2}{2} S_M \sqrt{(\alpha^0)^2 + (\beta^0)^2} \right]^{-1} \quad (13.101)$$

然后在一级近似中我们就可以算出由空气动力非对称飞行器产生的空气动力矩系数分量 m_{y_0} 和 m_{x_0}

$$m_{y_0} = c_{y_a}^{\alpha} (\hat{c}_{u,n} - c_{u,m}) \beta^0 \quad (13.102)$$

$$m_{x_0} = c_{x_a}^{\alpha} (\hat{c}_{u,n} - c_{u,m}) \alpha^0 \quad (13.103)$$

式中 $\hat{c}_{u,n}$ 为待识别的无因次压心坐标的值。

正如所知, 量 $(c_{u,n} - c_{u,m})$ 确定了飞行器的静稳定储备量。在有轴向加速度计读数的情况下, 迎面阻力系数 c_x (或轴向阻力系数) 可按下列式足够精确地算出:

$$c_x = 2 n_x m g \rho^{-1} V^{-2} S_M^{-1} \quad (13.104)$$

在利用具有 12 维状态向量 $x(t) = [V, \theta, \phi, x, y, z, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \psi, \vartheta, \gamma]^T$, 6 维测量参数向量 $y(t, \Phi) = [x(t, \Phi); y(t, \Phi); z(t, \Phi); \phi(t, \Phi); \vartheta(t, \Phi); \gamma(t, \Phi)]$ 和 16 维辨识参量向量 $\Phi = \Phi_i = [V_0, \theta_0, \phi_0, x_0, y_0, z_0, \omega_{x_0}, \omega_{y_0}, \omega_{z_0}, \psi_0, \vartheta_0, \gamma_0, c_x, c_y^a, c_{u, n}, m_z^w]^T$ 的方程组作为原始模型时, 正规方程组将会有 192 个非线性微分方程。在这种情况下要利用上面研究过的方法是不现实的, 它的解只可能利用高斯 - 牛顿方法(或与之类似的方法)采用迭代计算过程求得。待估计参数向量 Φ 和第 k 步迭代的值由公式(13.93)确定, 迭代中止的条件为

$$|\Phi_k - \Phi_{k-1}| \leq |\Delta\Phi_n| \quad (13.105)$$

式中 $\Delta\Phi_n$ 为在后一步和上一步迭代上所得的被估值向量之差的允许值。

在采用高斯 - 牛顿识别法时要预先算出 J 对被估计变量向量的一阶和二阶梯度(一阶和二阶偏导数)。在迭代次数不超过 5 次并且待估计参量的个数比上面所说的少得多的情况下, 所述问题在每秒运算 40 万

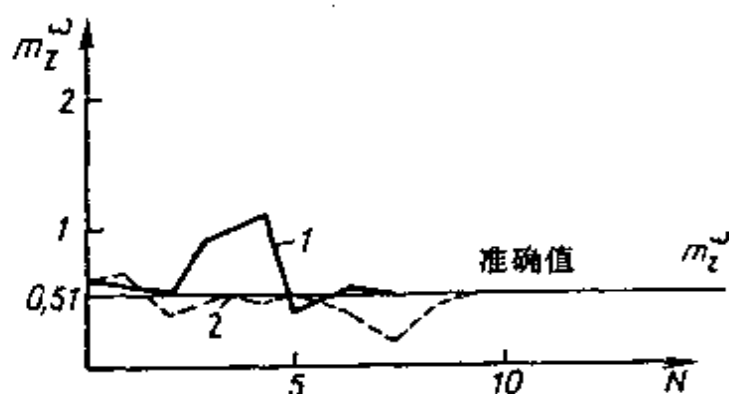


图 13.15 迭代次数与系数 m_z^w 先验初始值偏差之间的关系

次的高速电子计算机上求解的时间为几个小时。

因为收敛速度在很大程度上取决于初始近似值与真值接近的程度, 故迭代次数, 因而计算时间也可能比上述增大许多。我们采用文献[55]中的例子, 迭代次数与 m_z^w 先验初值偏差量之间的关系如图 13.15 中曲线所示, 它们是用经典的高斯 - 牛顿方法获得的(图中曲线 1 是初值偏差 10%, 曲线 2 是初值偏差 20%)。文献[55]还指出, 当初值偏差为 30% 时进行参数辨识就不可能得到收敛的过程。

以上所述直接表明了与状态模型和测量模型偶 $X-Y$ 的选择和

匹配相联系的实验设计的重要性,这也就是我们要在新的认识水平上再次回到简化原始过程模型这个问题的理由。

前面已指出过,在根据飞行试验辨识飞行器质量-惯性和空气动力特征的问题中,利用标准的状态矩阵对角线化的方法实际上是不可能的,因而必须寻找其它的途径和方法,其中特别是包括基于方程组试探分解和矩阵对角线化方法,这个方法是简化有控飞行器原始多维空间状态模型的有效方法和实际上唯一可行的方法。此方法的本质在于分析控制系统的“粗糙性”水平,也即分析在估计中采用当存在与方程组交叉联系放大系数静偏差有关的小变化时,有控运动过程参数的偏差也很小这样一个假设的正确性。

第十四章 射表编制的弹道学原理

射表应含有射击所必须的全部信息,以确定使火箭和炮弹弹道命中目标的装定诸元。在一般情况下这些信息包括:在对具体目标进行射击时用以形成瞄准装置装定的弹道基本诸元;考虑了各种射击因素变化后,对落点坐标和瞄准装置装定的修正量以及火箭和炮弹的散布量。对于火炮系统,穿过目标坐标的弹丸弹道由初速、射角和弹道系数三个基本参数确定,如此少的入口参数和出口参数使得火炮弹丸的射表十分简单。火箭射表编制就要比火炮射表编制复杂得多,这是因为表示火箭弹道特征的因素要比火炮弹丸多得多。

不同类型弹药的弹道特性不同,这就必须相应地编各种类型的射表。例如无控弹(除高炮弹药外)、有控弹和高炮弹丸射表之间就有很大的差别,并且对于高射弹丸,在作战情况下并不使用射表,射表只是用于建立各种计算求解仪的软件。

射表编制建立在炮兵标准大气的基础上,此标准大气由地表面标准气象条件、大气铅直平衡假设以及所取的气温随高度变化的规律所确定,在进行弹道计算时要用虚温。

射表编制要进行专门的射击和专门的计算,这种射击称为“射表射击”或“表射击”。对射表精度的要求不是一成不变的,随着战斗条件下射击准备精度的提高,对射表的精度要求也提高。

§ 14.1 火炮弹丸射表编制方法的基础

14.1.1 射表射击准备

为了获得射表编制所需的试验数据,需进行试验准备,以便得到可信的和在很大程度上综合的结果。试验准备包括武器(火炮和弹药)准备、气象准备和场地准备。

射表射击必须使用专门准备的、磨损小而且炮口曲率小的火炮、相同弹体和装药(也就是按同一图纸和工艺条件制造)的弹丸进行。磨损小的火炮是指其初速降低不超过3%的火炮^[33]。在进行火炮准备时,必须确认身管轴与炮尾检测平台相平行,这种检测利用经纬仪进行。经纬仪也用于确定炮耳轴倾斜对射击面方位改变的影响,并且对每一个射角都要考虑这种影响。对于身管相对长度超过45倍口径的火炮在进行射表射击时要挑选绝对直线的身管通常是办不到的,必须进行炮口曲率的测量并引入试验射角修正量。身管弯曲度的检测在每次校准瞄准装置时都要重复进行。

射击的弹药准备是按印记挑选符合表定特征的用于射击的弹药、弹丸称重以及确定装药温度。射表射击通常用涂漆弹丸进行,但为了确定未涂漆的距离修正量,在射击涂漆弹的同时也射击与涂漆弹壳体 and 装配相同的未涂漆弹。

射击使用规定装填物的炮弹进行,装填物重量偏离表定弹重不应超过两个弹重符号。一组射击的弹丸应具有同一个弹重符号,用于射击的发射药应在射击前用保温袋送至炮位。

气象准备是射表射击极重要的准备,显然,所得的射击结果只有在知道了它们是在什么气象条件下获得的才满足前述共同性条件。大气状态参数的测量要在地面上以及在所需确定其分布的整个高度上进行。考虑到大气的气象状态是时间和至观察点距离的函数,应努力缩短相应测量的时间,特别是对靶场射击条件下的气象保障,建议对风的探测不超过半小时,对气温的探测不超过两小时。

场地准备之所以是必要的,是因为自然界中不存一个理想平坦、而且场内任一点相对于炮位的坐标都精确标定了的靶场。为了测定在靶场高低不平地区弹丸落点和炸点的坐标,需要标定靶场基线。基线用大地测量方法确定,这时要借助于所谓大地测量中心以尽可能高的精度作出千米标记,然后再作出十米标记。在平行于基线并与之相距一个安全距离的地方建立一些装有交会观察炸点之用测角仪的观察塔,观察塔以高精度进行配置。根据基线水平测量数据,沿着垂直于基线的方向建立对炮位高差的剖面图。炮位布置在通过基线起

点并与基线垂直的方向上,炮位的几何中心坐标相对于基线起点固定,误差不超过 0.1m。炸点的坐标至少要是由三个观察塔测定,然后换算成相对于火炮的坐标,在确定了试验射程后还要将它换算到炮口水平面上,为此要确定出弹丸落点地区相对于给定高角上炮口断面中心的高差。

在进行小射程射击时可以采用对立靶射击的方法。在这种情况下就要测量到立靶的距离以及取作直角坐标系原点的立靶中心(“靶心”)在炮口断面中心之上的高差。

14.1.2 将射击结果换算到标准表定条件

在射表射击完成后,需要使在不可比条件下进行射击的结果具有可比性,为此要将射击结果向标准表定条件转换。必须指出,这种处理方法伴随有从一组射击到另一组射击而变化的误差。在精密准备条件下确定一组射击标准射程的中间误差可按下式计算:

$$E_{x_c} = \sqrt{\frac{B_n^2}{n} + E_{x_c}^{*2}} \quad (14.1)$$

其中 B_n / \sqrt{n} 是该组 n 次射击平均射程的中间误差, $E_{x_c}^*$ 是在将射击结果标准化时由影响各组射击平均弹道散布的误差共同作用产生的中间误差,其中包括确定初速、射角和弹道系数的误差以及测定一组射击过程中大气状态参数的不准确性。

研究关系式(14.1)得出,为了提高确定标准化射程的精度,在同一初始条件下重复进行 N 次射击是有利的,因为在这种情况下可以将确定标准射程平均值的中间误差减小 \sqrt{N} 倍,也即

$$\tilde{E}_{x_c} = E_{x_c} / \sqrt{N} \quad (14.2)$$

注意到(14.1)式最后得

$$\tilde{E}_{x_c} = \sqrt{\frac{B_n^2}{nN} + \frac{E_{x_c}^{*2}}{N}} \quad (14.3)$$

关系式(14.3)表明,同样一个标准化射程值的精度可以在不同的一组射击发数 n 和重复试验次数 N 下获得,但在这里不可能有一个最优化的简单结论,因为从一个方面看来数字 n 最小的方案应认

为是最好的方案,因为一组射击发数少则射击时间短,因而气象条件变化的概率也较小,这时身管的弹道特性改变也较小。但从另一方面看,由于试验结果少,所得的中间(概率)误差的精度和可靠性也降低。在靶场火炮射击实践中,依据火炮口径不同建议取 $n \geq 5 \sim 10$ 发,并认为取 $n = 7$ 较为合理。如果先验地给定 $E_{x_c}^*$ (它的值根据靶场射击的大量统计资料获得),则对于保证必要精度的重复试验次数 N 可以按下面的方式确定。这里所讲的必要精度是指在给定了单发射击中间误差的条件下所得到的平均标准射程必须具有的精度。

由公式(1.42)得

$$N = E_{x_c}^2 \tilde{E}_{x_c}^2 \quad (14.4)$$

令 δ 为以百分数表示的、在精密法准备条件下允许单发中间误差增加的误差值,于是有

$$[(1 + 0.01\delta)E_{x_c}]^2 = E_{x_c}^2 + \tilde{E}_{x_c}^2 \quad (14.5)$$

由(14.5)式确定了 $\tilde{E}_{x_c}^2$ 的表达式后再代入(14.4)式中,得到

$$N = \frac{100}{\delta(2 + 0.01\delta)} \quad (14.6)$$

对于实际上可以接受的 δ 值,在(14.6)式分母中的第二项将是二阶小量,因此有

$$N \approx 50/\delta \quad (14.7)$$

例如,当 $N = 7$ 时,相应于 $\delta = 10\%$ 的标准化射程的中间误差将有把握在重复试验 $N = 5$ 的条件下得以保证。

因此,提高靶场条件下获得标准化射程精度、从而最后提高射表精度的潜力主要地要从提高气象准备的精度入手。

14.1.3 弹道基本诸元、修正诸元和弹道系数与试验射角关系式的计算

在得到了与表定初速相应的标准射程后就可以计算与每天各次射击射角相应的弹道系数。这种计算必须用同一个标准阻力函数和相同的射表数据计算方法进行。在根据对立靶射击结果计算弹道系数时,要利用如下的原始数据:弹丸至立靶的飞行距离和飞行时间、初速和射角,并且转换到标准气象条件和表定弹重上去。

利用最小二乘法建立 $c = f(\theta_0)$ 曲线。

根据表定初速值 V_0 以及支撑射角, 用作图法或解析内插法求得弹道系数后就可以计算弹道基本诸元了。通常在可变的 θ_0 值(自变量)和对应的弹道系数 c 下算出射程 x_c 、飞行时间 T_c 、弹道高 y_c 、落速和落角(θ_c 和 V_c) 然后编成表, 根据表列数据作出相应的图形, 而非支撑点参数的值则用内插法求得。在试验确定了射击火炮的发射角后, 可求得与确定的一组弹道基本诸元相应的 θ_0 角和发射角之差, 也即求得了瞄准角, 接着再计算炮口高低角对瞄准角的修正量, 炮耳轴倾斜对射程和射向的修正量。炮目高低角对瞄准角的修正量要针对给定的水平射程或斜射程算出, 因为在进行射击测地准备时水平距离就已经直接测得了, 所以利用它是最合适的。这种计算要用专门的方法进行。

由炮耳轴倾斜产生的修正量计算归结为利用球面三角公式确定小的角度增量。对射程和射向的修正量分为两组, 第一组是由气压、气温、初速、弹重以及装药温度偏离标准值条件产生的修正量; 第二组是由纵风、横风和偏流产生的修正量。地球旋转修正量是单独一组修正量, 此修正量只有当射程超过 $10 \sim 15\text{km}$ 时才进行计算。

14.1.4 火炮射表编制的步骤

本节我们简短地总结一下身管火炮射表编制过程。由上面的叙述可知这个过程可以有条件地分成四个步骤。

- 1) 射表射击准备
- 2) 射表射击
- 3) 射击结果处理
- 4) 射表表格完成

同样, 上述每个阶段又包括一系列工作, 我们用如下的编号来编记这些工作: 编号中第一个数字是阶段号, 第二个字为一个点, 接着是射表编制总工作序号中所进行工作的顺序号。这样就有

1.1 射表射击靶场地形测绘准备

- 1.2 火炮准备
- 1.3 弹药准备
- 1.4 气象准备
- 2.5 以同一装药同一射角进行射程和密集度射击(在一天时间内)
- 2.6 确定偏流的射击(可以与上一点合并进行)
- 2.7 确定初速的射击(也可以与 2.5 合并进行)
- 2.8 确定射角的射击
- 2.9 重复射击(将 2.5, 2.6, 2.7, 2.8 中指出的射击重复进行不少于 3 次)
- 3.10 在 2.5 射击结果处理的基础上确定弹丸的试验射程、侧偏及中间偏差
- 3.11 根据 2.7 和 2.8 射击结果进行数据处理, 确定初速、射角值以及初速、射角和方向跳角的中间偏差
- 3.12 将射击结果标准化, 得到每一个射角相应于表定初速的标准化射程和偏流值
- 3.13 编制原始数据表作为随后射表数据处理的基础
- 3.14 计算弹道系数
- 3.15 计算基本诸元并将它用图形表示成规定射角(按所选定的自变量变化步长)上射程的函数值
- 3.16 计算瞄准角
- 3.17 计算修正系数和对射程及射向的修正量并用图线表示
- 3.18 计算弹道系数和偏流系数的中间偏差以及散布参数的平均值
- 3.19 计算弹丸的表定散布值, 并将它用图线表示成距离的函数
- 3.20 计算瞄准角改变 1 密位($3.6'$)或表尺改变 1 个分划时飞行距离和高度的改变量
- 4.21 编制射表表格、填写各栏数字

§ 14.2 火箭射表编制的特点

14.2.1 火箭发射的表定条件和实际条件

火箭射表编拟的原理建立在试验与理论相结合方法的基础上,实际上这与火炮弹丸射表编拟是一样的,先求得标准条件下的射表数据,由于它们只反映了名义运动,所以确定这些数据并不困难。然后再求出考虑实际发射条件与标准条件不同的修正量。

对于通常的小射程火箭,引起实际射击条件与标准条件不同的主要因素是:

气象条件偏离标准条件;

火箭参数(火箭质量和尺寸,装药质量和特性)与计算时所取的值不同。

需要指出的是与火炮弹丸一样,上述偏差与火炮弹丸的偏差类似,它不是指在允许偏差范围内的散布,而是指数学期望的移动,也即是指一组火箭的某个参数的平均值与计算所用的值不符。

对于具有增程作用的有控火箭增程弹和弹道式火箭,所讨论的因素则有所不同,因为其控制系统有补偿实际射击条件与标准条件之间可能偏差的作用,但是任何一个控制系统都有方法误差,它与实际扰动量有关,对于此类因素的补偿应用像无控弹药一样在基本装定中引进修正量的方法是合理的。

这类因素中最重要的是火箭发射时的地球物理条件。此外,在编制有控弹道式火箭和炮弹的射表时必须引入考虑控制系统工作仪器误差、火箭起飞重量和比冲偏差等扰动因素的修正,这些因素在过去按标准射击条件仅由射程来确定基本装定时是未考虑过的(射击方位仅由地球物理条件确定,并且取为“射击点—目标”连线的方位)。

14.2.2 射表射击结果标准化和无控火箭射表编制

射表射击结果标准化按如下方法进行^[32]:

1) 求出需标准化的一组弹道诸元(落点全射程和侧偏)的平均

值。

2) 确定在该组射击条件下火箭参数平均值 $\xi_{j, cp}$, 并确定参数与设计值的偏差 $\delta\xi_j$ 。

$$\delta\xi_j = \xi_{j, cp} - \xi_{j, p} \quad (14.8)$$

3) 计算由于火箭参数和大气参数偏离所引起的弹道诸元平均值的改变。

$$\begin{aligned} \delta A = & \sum_{j=1}^m \frac{\partial A}{\partial \xi_j} \delta \xi_j + \frac{\partial A}{\partial h_0} \delta h_0 + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial A}{\partial T_i} \right] \delta T_i \\ & + \sum_{k=1}^p \left[\frac{\partial A}{\partial W_k} \right] W_k \end{aligned} \quad (14.9)$$

式中 m —— 测量值与设计值有差别的参数的个数;

n 和 p —— 计算气温偏差和风影响时的分层数;

4) 计算在设计值和标准大气条件下的弹道诸元值

$$A_N = A_{cp} - \delta A \quad (14.10)$$

根据这个方法可求得标准条件下的任何弹道诸元。

在射表编制时先选出一系列所谓支撑弹道, 它们要包括所需弹道诸元的全部范围。支撑弹道的弹道诸元要以高精度积分最完整的运动方程组获得。

将所得到的支撑弹道按照射表射击结果进行校正, 以精确修正个别参数的影响。

在确定了数量不多的基准弹道诸元后, 再用插值法求中间弹道诸元并编成射表。

为了进行射击必须知道相应于给定射程上的射角。

射表中取射程作为输入诸元, 其步长足够小(约 200m), 以便能进行线性插值, 由计算获得关系式 $\theta_0 = f(x_0)$ 以及每个距离上的其它弹道诸元。

此外, 表中有火箭参数偏离设计值(首先是装药温度和质量, 以及火箭质量)的偏差, 以及大气参数(气压、气温和风)与标准值的偏差对落点射程和侧偏的修正系数。表中还应给出目标位置高于或低于发射装置水平面时表尺装定的修正量。

检查题

1. 请列举在弹道靶道上进行试验的优点及缺点。指出在弹道靶道上射击,确定法向力的空气动力系数的主要方法。什么样的原理作为确定飞行器角运动的磁测方法的基础?请给出确定被测对象运动速度的多普勒方法的物理解释。

2. 什么叫“射角”?给出射击精度的概念,什么叫距离和初速的“验差射”?

3. 请列举弹道试验计划最佳性的标准并给出其物理解释。叙述试验结果处理的方法并给出其简要特性。根据飞行试验结果进行飞行器的参量识别的本质是什么?什么叫“闭合差”?

4. 给出“射表射击”的概念并说明其必要性。为什么在具体气象条件下进行射表射击时获得的数据能用射表折算到任何气象条件下?

参考文献

1. Абгарян К. А., Ранкопорт Н. М. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1969. 378 с.
2. Абгарян К. А. Устойчивость движения на конечном интервале. // Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНТИ, 1976. Т. 3. С. 43... 124.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: ГИФМЛ, 1959. 915 с.
4. Аппазов Р. Ф., Лавров С. С., Мишин В. П. Баллистика управляемых ракет дальнего действия. М.: Наука, 1966. 307 с.
5. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
6. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения (3-изд.). М.: Наука, 1984. 271 с.
7. Арнольд В. И., Плывиненко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Том 1. Динамические системы. М.: ВИНТИ, 1985. 243 с.
8. Аэродинамика ракет/Под ред. Н. Ф. Краснова, М.: Высшая школа, 1968. 772 с.
9. Аэромеханика самолета (динамика полета). Учебник для авиационных вузов / А. Ф. Бочкарев, В. В. Андреевский, В. М. Белоконов и др. 2-е изд. перераб. и дополн., М.: Машиностроение, 1985. 41 с.
10. Баллистика и навигация ракет; Учебник для вузов / А. А. Дмитриевский, Н. М. Иванов, Л. Н. Лысенко и др. М.: Машиностроение, 1985. 312 с.
11. Баллистика и навигация космических аппаратов. Учебник

для вузов / П. М. Иванов, А. А. Дмитриевский, Л. П. Лысенко, М. : Машиностроение, 1986. 296 с.

12. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М. : Наука, 1976. 493 с.

13. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М. : Наука, 1969. 368 с.

14. Беляева С. Д. Исследование устойчивости невозмущенного движения одного твердого тела в случае пространственного движения в воздухе его центра масс. // Прикладная математика и механика. Т. 42. Вып. 2. 1978.

15. Бессмертных Г. А. О существовании и единственности решения многоточечной задачи Валле-Пуссена для нелинейных дифференциальных уравнений. / Дифференциальные уравнения Т. VI. № 2. Минск: Наука и техника, 1970. С. 298-310.

16. Боднер В. А. Системы управления летательными аппаратами. М. : Машиностроение, 1973. 504 с.

17. Брандин В. Н. и др. Экспериментальная космическая баллистика / Под ред. Д. А. Погорелова. М. : Машиностроение, 1974. 340 с.

18. Бюнгене Г. С., Студнев Р. В. Динамика пространственного движения самолета. М. : Машиностроение, 1967. 226 с.

19. Бюнгене Г. С., Студнев Р. В. Динамика пространственного движения самолета. М. : Машиностроение, 1983. 320 с.

20. Бусленко Н. П. Метод статистических испытаний. М. : Физматгиз, 1962. 331 с.

21. Вентцель Д. А., Шапиро Я. М. Внешняя баллистика. М. : Оборонгиз, 1939, ч. I ; 210 с. ч. II , 251 с. ч. III . 183 с.

22. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М. : Наука, 1964. 576 с.

23. Верещагин И. Ф. Методы исследования режимов полета

аппарата переменной массы. ч. II. Механика программного движения аппарата. П. : Изд. ПГУ им. А. М. Горького, 1972. 294 с.

24. Воробьев Л. М. К теории полета ракет. М. : Машиностроение, 1970. 223 с.

25. Гантмахер Ф. Р., Левин Л. М. Теория полета неуправляемых ракет. М. : Физматгиз, 1959. 360 с.

26. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 3-е изд. М. : Наука, 1967, 575 с.

27. Горбатенко С. А. и др. Механика полета (инженерный справочник). М. : Машиностроение, 1969. 420 с.

28. Горбатенко С. А. и др. Расчет и анализ движения летательных аппаратов. М. : Машиностроение, 1971. 352 с.

29. Грушинский И. И. Теория фигуры Земли. М. : Физматгиз, 1963. 446 с.

30. Гуткин Н. Л. Принципы радиоуправления беспилотными объектами. М. : Советское радио, 1959. 384 с.

31. Гуткин Л. С. и Д. Р. радиоуправления реактивными снарядами и космическими аппаратами. М. : Советское радио, 1963. 680 с.

32. Движение ракет (Введение в теорию полета ракет). / Под ред. А. А. Дмитриевского / Дмитриевский А. А., Казаковцев В. П., Лысенко Л. Н. и др. : Воспиздат, 1968. 464 с.

33. Дмитриевский А. А. Внешняя баллистика. М. : Машиностроение, 1972. 584 с.

34. Дмитриевский А. А., Лысенко Л. Н. Прикладные задачи теории оптимального управления беспилотными летательными аппаратами; М. : Машиностроение, 1978. 328 с.

35. Дмитриевский А. А. Внешняя баллистика; Учебник для вузов. 2-е изд. - М. : Машиностроение, 1979. 479 с.

36. Дмитриевский А. А., Богодистов С. С. К анализу устойчивости вращательного движения асимметричного аппарата.

входящего в атмосферу. // Труды V научных чтений по космонавтике. М. : АН СССР, 1981. С. 81-88.

37. Дмитриевский А. А., Жилейкин В. Д. Методика решения задач движения летательных аппаратов на ЭВМ. Учеб. пособие, М. : МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1986. 40 с.

38. Дмитриевский А. А., Кошовой В. Н. Основы теории полета ракет. М. : Воениздат, 1968. 311 с.

39. Доброленский Ю. П. Динамика полета в неспокойной атмосфере. М. : Машиностроение, 1969, 256 с.

40. Дородницын А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка // Изв. вузов. Успехи математических наук. 1952. Т. III. № 6. С. 32-48.

41. Дэвис Л. и др. Внешняя баллистика ракет. М. : Воениздат, 1962. 520 с.

42. Жаков А. М., Пигулевский Ф. А. Управление баллистическими ракетами. М. : Воениздат, 1965. 278 с.

43. Жанголович И. Д. Потенциал земного тяготения / Бюллетень института теоретической астрономии АН СССР. 1957. Т. 6. № 8. С. 29-37.

44. Зарубежное военное обозрение № 11. 1981. С. 41-42; № 12. 1982. С. 68-72; № 11, 1983. С. 37—39; № 12, 1983. С. 36-41.

45. Зубов В. П. Устойчивость движения. М. : Высшая школа, 1973. 271 с.

46. Иванов В. А., Чемоданов Б. К., Медведев В. С. Математические основы теории автоматического регулирования / Под ред. Б. К. Чемоданова. М. : Высшая школа, 1971. 754 с.

47. Иванов Н. М., Мартынов А. Н. Движение космических летательных аппаратов в атмосферах планет. М. : Наука, 1985. 384 с.

48. Поффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных

задач. М. : Наука, 1974. 479 с.

49. Иштинский А. Ю. Инерциальное управление баллистическими ракетами. М. : Наука, 1968. 144 с.

50. Исследование оптимальных режимов движения ракет // Сб. переводных статей / М. : Оборонгиз, 1959. - 293 с.

51. Карагодин В. М. Теоретические основы механики тела переменного состава. М. : Оборонгиз, 1963. 178 с.

52. Коой Н. , Ютенбогарт П. Динамика ракет. М. : Оборонгиз, 1964. 328 с.

53. Космодемьянский А. А. Курс теоретической механики. М. : Просвещение. Ч. II. 1966. 400 с.

54. Костров А. В. Движение асимметричных баллистических аппаратов. М. : Машиностроение, 1984. 272 с.

55. Костров А. В. , Гукон В. В. Итерационный синтез-метод идентификации аэродинамических характеристик КА по измерениям его движения // Космические исследования. Наука. Т. XXIV, вып. 5, 1986. - С. 680-694.

56. Колесников К. С. Динамика ракет. : Учебник для вузов, М. : Машиностроение, 1980. 376 с.

57. Краснов Н. Ф. , Кошовой В. Н. Управление и стабилизация в аэродинамике. М. : Высшая школа, 1978. 480 с.

58. Крутько П. Д. Обратные задачи динамики управляемых систем (Линейные модели). М. : Наука, 1987. 304 с.

59. Крылов А. Н. О вращательном движении продолговатого снаряда во время полета // Полн. собр. соч. Т. 4. М. - Л. 1937. С. 1-302.

60. Кузнецов А. А. Определение начальных условий при старте летательного аппарата с подвижной платформы // Исследование по динамике полета. М. : Машиностроение, 1965. С. 257-282.

61. Кузмак Г. Е. Динамика неуправляемого движения

летательных аппаратов при входе в атмосферу. М. : Наука, 1970. 348 с.

62. Кузовков Н. Т. Системы стабилизации летательных аппаратов (баллистических и зенитных ракет). М. : Высшая школа, 1976. 304 с.

63. Лахтин Л. М. Свободное движение в поле земного сфероида. М. : Физматгиз, 1963. 120 с.

64. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М. : Машиностроение, 1973. 616 с.

65. Лебедев А. А., Герасюта Н. Ф. Баллистика ракет. Некоторые задачи баллистики ракет дальнего действия. М. : Машиностроение, 1970. 244 с.

66. Лебедев В. Я. Справочник офицера наземной артиллерии. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Воспиздат, 1984. 400 с.

67. Лейтман Д. ж. Введение в теорию оптимального управления. М. : Наука, 1968. 192 с.

68. Летные испытания ракет и космических аппаратов. Учебн. пособие для втузов / Е. Н. Кринецкий, Л. Н. Александровская, А. В. Шаронов и др. ; Под ред. Е. И. Кринецкого, М. : Машиностроение, 1979. 464 с.

69. Летов А. М. Динамика полета и управление. М. : наука, 1969. 359 с.

70. Липшиц Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. 2-е изд. М. : Физматгиз, 1962. 350 с.

71. Лысенко Л. Н., Купнарев В. И. Метод восстановления вектора состояния нелинейной динамической системы по результатам наблюдений // Автоматика и телемеханика. 1987. № 2. С. 54-61.

72. Маневский Н. В. Курс внешней баллистики. Санкт-Петербург, 1870. -679 с.

73. Маневский Н. В. О влиянии вращательного движения на полет продолговатых снарядов в воздухе. Санкт-Петербург // Артжурнал №

3. 1865.

74. Магнус К. Гирископ. Теория и применение. М. : Мир, 1974. 526 с.

75. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелдзе и др. 2-е изд., М. : Наука, 1969. 384 с.

76. Маркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. М. : Наука, 1976. 319 с.

77. Менцеровский И. В. Работы по механике тел переменной массы. М. : Гостехиздат, 1952. 280 с.

78. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. М. : Наука, 1971. 576 с.

79. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М. : Наука, 1969. 379 с.

80. Моррисон Ф. Х., Эмбертсон Д. С. Система наведения выстреливаемого из пушки управляемого снаряда // Ракетная техника и космонавтика, 1978. Т. 16. № 2. С. 184-193.

81. Неймарк Ю. И. Динамические системы и управляемые процессы. М. : Наука, 1978. 336 с.

82. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М. -Л. : ОГИЗ. - Гостехиздат, 1947. 448 с.

83. Остославский П. В., Стражева И. В. Динамика полета. М. : Машиностроение, 1969. 500 с.

84. Охотимский Д. Б. К теории движения ракет // Прикладная механика и математика. 1946. Т. 10. Вып. 2. С. 251-273.

85. Охотимский Д. Б., Энеев Т. М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // Изв. вузов. Ученые физические науки. 1957. т. 63. Вып. 1а. С. 5-32.

86. Погорелов Д. А. Теория кеплеровских движений

летательных аппаратов. М. : Физматгиз, 1961. 108 с.

87. Постников А. Г., Чуйко В. С. Внешняя баллистика неуправляемых авиационных ракет и снарядов. М. : Машиностроение, 1985. 248 с.

88. Путачев В. С. Общая задача о движении вращающегося артиллерийского снаряда в воздухе. -Тр. ВВИА им. Жуковского, 1940. вып. 70, -89 с.

89. Путачев В. С. О колеблющихся оперенных снарядах. О движении вращающегося оперенного снаряда. -Тр. ВВИА им. Жуковского, 1940. вып. 74. -55 с.

90. Путачев В. С. Общая теория корреляционных случайных функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1953. Т. 17. № 5. С. 401-420.

91. Путачев В. С., Синицын И. Н. Стохастические дифференциальные системы. М. : Наука, 1985. 560 с.

92. Путачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М. : Физматгиз, 1962. 883 с.

93. Проектирование и испытания баллистических ракет. / Под ред. В. И. Варфоломеева, Н. И. Копытова, М. : Воениздат, 1970. 391 с.

94. Рабинович Б. И. Вариационные режимы полета крылатых летательных аппаратов. М. : Машиностроение, 1966. 182 с.

95. Разумев В. Ф., Ковалев Б. К. Основы проектирования баллистических ракет на твердом топливе. М. : Машиностроение, 1976. 357 с.

96. Румянцев В. В. Метод функций Ляпунова в теории устойчивости движения // В кн. Механика в СССР за 50 лет. Том I. Общая прикладная механика. М. : Наука, 1968. С. 7-65.

97. Светлицкий В. А. Динамика старта летательных аппаратов. М. : Наука, 1986. 280 с.

98. Святодух Л. И. Динамика пространственного движения

управляемых ракет. М. : Машиностроение, 1969. 270 с.

99. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М. : Наука, 1965. - 320 с.

100. Сихарулидзе Ю. Г. Баллистика летательных аппаратов. М. : Наука, 1982. 352 с.

101. Справочник по стрельбе береговой артиллерии ВМФ/П. А. Лось, Б. И. Юркевич, Л. Л. Ного и др. М. : Воениздат, 1977. 351 с.

102. Справочник по исследованию операций / Под общ. ред. Ф. А. Матвейчука. М. : Воениздат, 1979. 368 с.

103. Статистическая динамика и оптимизация управления летательных аппаратов; Учебн. пособие для вузов / А. А. Лебедев, В. Т. Боброшников, М. Н. Красильников, В. В. Малышев. М. : Машиностроение, 1985. 280 с.

104. Тарасов Е. В. Оптимальные режимы полета летательных аппаратов. М. : Машиностроение, 1969. 248 с.

105. Устинов В. Ф. Численное интегрирование дифференциальных уравнений движения тел в воздухе. М. : МВТУ им. Баумана. 1960. 98 с.

106. Устинов В. Ф., Кольцов Ю. Ф., Смирнов Н. Н. Определение скорости движения тел. М. : МВТУ им. Баумана, 1983. 49 с.

107. Устинов В. Ф. Оптимальные режимы планирующего полета // Оптимальное управление и определение переменных состояния систем / Под ред. проф. Л. Н. Лысенко. М. : МВТУ им. Баумана, 1985. С. 51-58.

108. Федоров В. В. Теория оптимального эксперимента. М. : Наука, 1971. 312 с.

109. Феодосьев В. И., Снярев Г. Б. Введение в ракетную технику. М. : Оборонгиз, 1960. 507 с.

110. Фомин В. И. Рекуррентное оценивание и адаптивная

фильтрация. М. : Наука, 1984. 288 с.

111. Цюлковский К. Э. Труды по ракетной технике. М. : Оборонгиз, 1947. 368 с.

112. Цаф Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. М. : Наука, 1970. 191 с.

113. Чеботарев Г. А. Аналитические и численные методы небесной механики. М. : Наука, 1965. 367 с.

114. Четаев Н. Г. О достаточных условиях устойчивости вращательного движения снаряда // Прикладная математика и механика. 1943. Т. 7. Вып. 2. С. 81-96.

115. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращательных движений снарядов // Прикладная математика и механика. 1946. Т. 10. Вып. 1. С. 135-138.

116. Чуев Ю. В. и др. Основы исследования операций в военной технике. М. : Советское радио, 1965. 592 с.

117. Шальгин А. С., Палагин Ю. И. Прикладные методы статистического моделирования. Л. : Машиностроение, 1986. 327 с.

118. Шапиро Я. М. Внешняя баллистика. М. : Оборонгиз, 1946. 408 с.

119. Шапиро Я. М. и др. Основы проектирования ракет на твердом топливе. М. : Воениздат, 1968. 352 с.

120. Шаронова И. М. Применение метода динамического программирования к решению вариационных задач динамики летательных аппаратов // Исследования по динамике полета / Под ред. проф. И. В. Остославского. Вып. 1, М. : Машиностроение, 1965. С. 338-354.

121. Шигелев Б. М. Математическая обработка наблюдений. 3-е изд. М. : Наука, 1969. 344 с.

122. Шиллов А. А., Гоман М. Г. Резонансные режимы пространственного неуправляемого движения аппаратов на участке

входа в атмосферу // Тр. ЦАГИ. 1975. Вып. 1624. 44 с.

123. Эйлер Л. Исследование по баллистике. М. : Физматгиз, 1961. 591 с.

124. Ярошевский В. А. Движение неуправляемого тела в атмосфере. М. : Машиностроение, 1978. 167 с.

125. Barbera J. , Frank J. An analitical technique for studing the anomalies roll behavior of ballistic re-entry vehicles, J. Spacecraft and Rockets. V. 6, N 11, 1969.

126. Bieber R. E. Missile Structural loads by Nonstationary Statistycal Methods // J. Purospace Science, 1961. V. 28. P. 284 — 294.

127. Gilbert E. G. The decoupling of multivariable systems by state jeedback // SIAM J. Contr. 1969. V. 7. N 1. P. 50—61.

128. Hewish M. The Assault Breaker Program, US stand-off weapon technology of the future // International Defense Review 1982. Sept. V. 15 P. 1207—1211.

129. Nicolaides J. JAS Preprint (Institute of Aeronautical Sciences, Preprint) 1953. N395. P. 1—32.

130. Pegan F. , Smith J. Aeroballistics of Tarminally Corrected Spinning Projectile (TCSP) // Journal of Spacecraft and Rockets. 1975. V. 12. N 12. P. 733—738.

131. Schamaedeke W. , Swanlund G. N. York-London // Acad. Press. 1962. P. 31—54.

132. Sinha P. K. A New Condition for Output Feedback Decoupling of Multivariable Systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1979. V. 24. N 3. P. 476—478.

133. Swistak R. R. Assault Breaker Breaks Out. // Aeronautics Astronautics. 1983. Febr. V. 21. N 2. P. 38—41.

134. Tomson W. , Tait P. Threatisse on Natural Philosophy. Cambridre University Press. 1886.

内 容 简 介

本书是一本系统完整的外弹道学书籍,全书共分十四章,内容包括:作用在飞行器上的力和力矩以及飞行器运动方程的建立,弹道方程的解法和外弹道最优问题,火箭和炮弹的角运动及飞行稳定性,统计飞行力学方法及射弹散布,弹道修正弹和子母弹的弹道特性,发射动力学和实验外弹道学,修正理论和射表编制等。

本书可供高等学校有关专业教师、大学生和研究生以及从事武器设计、制造和试验工作的专家和技术人员参考。

ISBN 7-118-02107-5/TJ · 131

定价:31.00 元